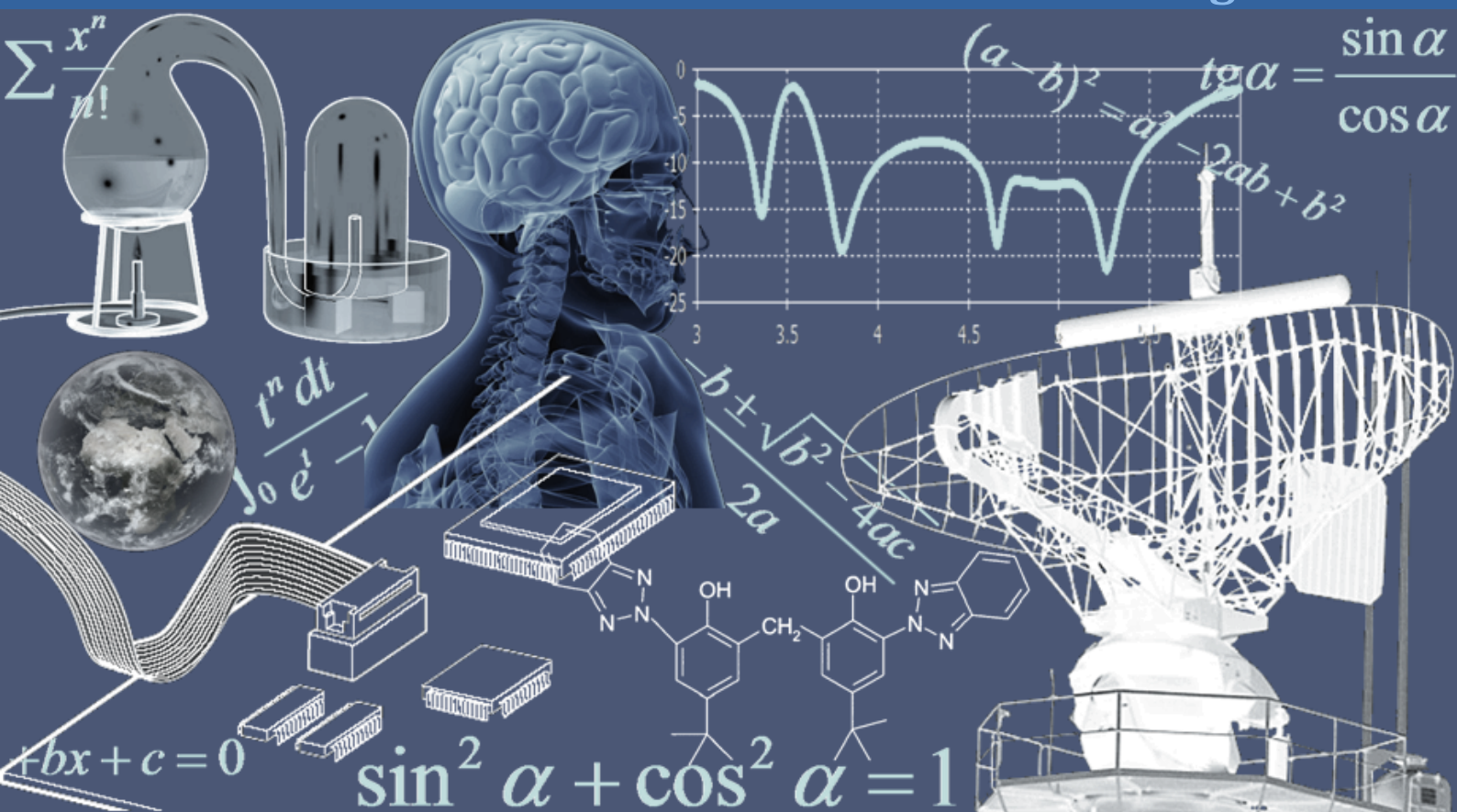


INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATION AND APPLIED STUDIES

Vol. 21 N. 1 August 2017



International Peer Reviewed Monthly Journal



International Journal of Innovation and Applied Studies

International Journal of Innovation and Applied Studies (ISSN: 2028-9324) is a peer reviewed multidisciplinary international journal publishing original and high-quality articles covering a wide range of topics in engineering, science and technology. IJIAS is an open access journal that publishes papers submitted in English, French and Spanish. The journal aims to give its contribution for enhancement of research studies and be a recognized forum attracting authors and audiences from both the academic and industrial communities interested in state-of-the art research activities in innovation and applied science areas, which cover topics including (but not limited to):

Agricultural and Biological Sciences, Arts and Humanities, Biochemistry, Genetics and Molecular Biology, Business, Management and Accounting, Chemical Engineering, Chemistry, Computer Science, Decision Sciences, Dentistry, Earth and Planetary Sciences, Economics, Econometrics and Finance, Energy, Engineering, Environmental Science, Health Professions, Immunology and Microbiology, Materials Science, Mathematics, Medicine, Neuroscience, Nursing, Pharmacology, Toxicology and Pharmaceuticals, Physics and Astronomy, Psychology, Social Sciences, Veterinary.

IJIAS hopes that Researchers, Graduate students, Developers, Professionals and others would make use of this journal publication for the development of innovation and scientific research. Contributions should not have been previously published nor be currently under consideration for publication elsewhere. All research articles, review articles, short communications and technical notes are pre-reviewed by the editor, and if appropriate, sent for blind peer review.

Accepted papers are available freely with online full-text content upon receiving the final versions, and will be indexed at major academic databases.

Table of Contents

Kinetic Effect For Printing Fabrics of Touristic Products <i>Huda Ahmed Rajab, Sahar Ahmed Ibrahim, and Hiba Abdessalam Ahmed</i>	1-24
Gestion des instabilités de terrain au Maroc (cartographie et sécurité) <i>Mohamed Yazidi, Fouad Benziane, Abdelaziz Yazidi, Khadija Nabih, and Nouredine Eloutassi</i>	25-36
Problématique de collecte et de gestion des déchets dans la ville de Kananga : Impact sur la sécurité environnementale / KASAI CENTRAL - RDC <i>Dubois MUTUPEKE LIBWA, Jean Calvin TSHIBUABUA SHAMBA, Gaston KABUAMBA MILEMBU, Jacques ISSONGO MFUTU, Jean Claude PANI USANDILL, and NKONGOLO KATOLO</i>	37-47
Use of starter cultures of lactic acid bacteria, yeasts, bacilli and moulds in the fermentation of cassava dough for attieke (an ivoirien fermented food) preparation <i>Koffi Maïzan Jean-Paul Bouatenin, N'dede Theodore Djeni, Kofi Alfred KOUAME, Youan Charles Tra Bi, Ehy Herve Menan, and Koffi Marcellin DJE</i>	48-58
EVALUATION DU COUT DE PRODUCTION DES MINERAIS DE CUIVRE DE LA MINE A CIEL OUVERT DE SHABA EN VUE DE L'EXPLOITATION DE LA DEUXIEME PHASE <i>Jean Paul KAYEYE MAHAMBA and Albert KALAU</i>	59-67
Growth performances and serum biochemical response of broiler chickens fed on diet supplemented with Tetrapleura tetraptera fruit powder as substitute to antibiotic growth promoters <i>Kana Jean Raphaël, Mube Kuetché Hervé, Ngouana Tadjong Ruben, Komquep Ronald, Yangoue Antoine, Tsafong Francklin, and Teguiq Alexis</i>	68-76
Le programme formaliste de David Hilbert <i>A.-Roger LULA BABOLE</i>	77-95
L'arithmétique formelle et l'incomplétude <i>A.-Roger LULA BABOLE and Yves MANGONGO TINDA</i>	96-102
L'arithmétisation et la métathéorie <i>A.-Roger LULA BABOLE</i>	103-123
Champignons comestibles de la région de Kikwit en République Démocratique du Congo : Approche écologique, nutritionnelle et socioéconomique <i>M.E. Madamo, A. Lubini, F. Lukoki, and E. Kidikwadi</i>	124-136
Bases logiques de l'incomplétude <i>A.-Roger LULA BABOLE, Alain MUSESA LANDA, and Oscar LUNGIAMBUDILA MAMONA</i>	137-152
Incomplétude et vérité <i>A.-Roger LULA BABOLE</i>	153-160
Incomplétude et Réfutabilité <i>A.-Roger LULA BABOLE</i>	161-166
UN PREALABLE INDISPENSABLE SUR LE CALCUL DU MULTIFLOT <i>Fernand MAMANYA TAPASA</i>	167-170
Incidence de la monnaie sur le PIB en République Démocratique du Congo : Une approche empirique de vérification de l'hypothèse de neutralité monétaire <i>Janvier EGUDRA NYADRI</i>	171-182

التأثير الحركي في طباعة أقمشة المنتجات السياحية

[Kinetic Effect For Printing Fabrics of Touristic Products]

هدى احمد رجب¹، سحر احمد ابراهيم²، هبة عبد السلام/احمد³

¹أستاذ التصميم / قسم طباعة المنسوجات والصباغة والتجهيز / كلية الفنون التطبيقية/ جامعة حلوان/ مصر

²أستاذ التصميم / قسم طباعة المنسوجات والصباغة والتجهيز / كلية الفنون التطبيقية/ جامعة حلوان/ مصر

³محاضر بكلية الفنون التطبيقية- جامعة بنها/ مصر

Huda Ahmed Rajab¹, Sahar Ahmed Ibrahim¹, and Hiba Abdessalam Ahmed²

¹Textile Printing, Dyeing and Finishing Department, Helwan University, College of Applied Arts, Cairo, Egypt

²Banha University, Egypt

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: Kinetic art is built on the idea that the movement and light can create works of art. If the things suspended a way that allows her movement and rotation, they, with the help of light, are beautiful forms of shadows. Some artists have hung artworks reversed by colorful lights to give very attractive forms.

artists of kinetic art Use all raw materials available in their environments such as iron, cloth, glass, wire and other so that these art forms are hung in the air in order to move and spin in a dynamic natural air or by the drive or by highlighting or a set of colored lights on the outstanding forms. The artists of this trend have the goal of creating works of art movement characterized by continuity and dynamic.

The research aims to strengthen the field of textile printing and innovative new ideas that have " Kinetic Effects " in order to promote Touristic Product after the tourists get used to see the traditionally sights and scenery and unusual, with the weakness of their shape and do not keep up with the attraction styles, which leading to a lack of tourism products for the global competitiveness.

KEYWORDS: kinetic art, Kinetic Effects, Manual lenses, Flip effect, Touristic Products Fabrics.

ملخص: ويبنى الفن الحركي على فكرة إن الحركة والضوء يمكن أن تخلق أعمالاً فنية ، فإذا ما علقت الأشياء بطريقة تتيح لها الحركة والدوران ، فإنها ، وبمساعدة الضوء ، توجد أشكالاً جميلة من ظلالها . وقد علق بعض الفنانين أعمالاً فنية عكسوا عليها أضواء ملونة فتكونت أشكال جذابة للغاية . واستخدم فنانون " الفن المتحرك " كل الخامات المتاحة في بيئاتهم كالحديد والقماش والزجاج والأسلاك وغيرها بحيث تكون تلك الأشكال الفنية معلقة في الهواء لكي تتحرك وتندور بصورة ديناميكية بفعل الهواء الطبيعي أو بفعل محرك آلي أو من خلال تسلط الضوء أو مجموعة من الأضواء الملونة على الأشكال المعلقة وقد هدف فنانون هذا الاتجاه إلى إيجاد أعمال فنية تتصف بالحركة والاستمرارية والديناميكية وليس الثبات والجمود . ويهدف البحث إلى تدعيم مجال تصميم طباعة المنسوجات بالأفكار الجديدة المبتكرة التي يكون "التأثير الحركي " هو الأساس فيها بهدف الترويج للمنتج السياحي بعد تعود السائح على رؤية مشاهد ومناظر بصورة تقليدية ومعتادة ، مع ضعف شكلها وعدم مواكبتها لأسلوب الجذب لعين السائح وذلك باستخدام الاتجاهات الفنية التي تعتمد على "التأثير الحركي " مما يؤدي إلى افتقار المنتجات السياحية إلى القدرة على التنافسية العالمية لعدم توافر عنصر الإبهار والواقعية في أنواع المنتجات السياحية المعروفة ذات القطعة الواحدة.

كلمات دلالية: الفن الحركي ، التأثيرات الحركية، العدسات اليدوية ، تأثير الفليب ،أقمشة المنتجات السياحية.

1 المقدمة

يعتبر التصميم من أهم الأدوات التي من خلالها يستطيع المصمم ترجمة احتياجات المستهلك وأيضاً احتياجات السوق ، لذلك يوجد عبء كبير على المصمم حتى يصل بتصميمه إلى إرضاء الذوق العام للمستهلك وكذلك إتمام عملية التسويق الجيد للمنتج مما يؤدي بطبيعة الحال إلى إنجاح التصميم.

ويحتاج التصميم دائماً إلى التطوير والتعديل والتغيير كذلك يتطلب لإنجاحه متابعة التصميم باستمرار ليتمكن المصمم من معرفة مدى ملائمة المطلوب الذي تم تصميمه من أجله أم لا، وهل يمكن إضافة أو حذف أو حتى تعديل مما يتيح له عملية تطوير مستمرة للتصميم.

ولقد ظلت تكنولوجيا تصميمات طباعة المنسوجات ذات التقنيات المتقدمة حكراً على الدول الصناعية المتقدمة والتي نشأت أفكارها وابتكاراتها من أجل أداء مهام وظيفية محددة في المجالات التطبيقية التي تمس معظم أنشطة الحياة بشكل عام. وانطلاقاً من ذلك فإن استخدامات هذه النوعية من التصميمات يعتمد على المستوى الاقتصادي للدولة. ويجب التنويه إلى أنه لا تزال هناك العديد من التحديات والمعوقات التي تعترض مجال تصميم طباعة المنسوجات على المستوى المحلي وذلك بسبب عدم مواكبة التصميمات المطبوعة بالتقنيات الحديثة في مجال الأقمشة المطبوعة في جمهورية مصر العربية وقد يكون ذلك نتيجة :

- 1- نقص المعلوماتية ووجود فجوة بين مصنعي طباعة المنسوجات والمستخدم النهائي لها.
- 2- عدم الاهتمام بوجود قاعدة تعليمية خاصة بتلك النوعية من المعلومات الخاصة بالتقنيات الحديثة في تصميم طباعة المنسوجات وذلك نتيجة لأنها تقنيات مكلفة وأسعارها باهظة وبالتالي فإن الشركات لا تلتفت إليها لأن الهدف الأساسي لها هو الربح فلا تخوض في أساليب تكنولوجية جديدة.
- 3- الحاجة إلى استثمارات عالية في بعض التكنولوجيات الخاصة بها.
- 4- عدم وجود خطة قومية للمشروعات العملاقة التي يتم بناءاً عليها الدراسة الفنية للنوعيات المختلفة منها.
- 5- تحديات السوق الخاصة بعدم ثبات دورة الحياة .
- 6- زيادة المنافسة في أسعار المنتجات التي تستخدم التقنيات الحديثة في التصميم .

ولذا فإن على المصمم دور كبير في ظل التقدم الهائل في التكنولوجيا الحديثة الموجودة بعالمنا، وهي ان يستخدم الأدوات الحديثة لتطويع هذا التطور بما يخدم تصميمه في ظل الإمكانيات والموارد الموجودة ببلدنا.

لقد شهد النصف الثاني من القرن العشرين كثير من المتغيرات أدت إلى تغيير العديد من المفاهيم الفكرية والفنية ، مما أدى إلى ظهور اتجاهات فنية متعددة لكل منها أسلوبها وفلسفتها التي ساهمت في تعدد الرؤى الفنية الغير مألوفة في الفن، فظهر (الفن الحركي) على يد مجموعة من الفنانين فقد هيمنت الحركة على فكرة تجسيد الحدث الحياتي أكثر من السكون وما تستهدفه الحركة من إحداث الأثر في المتلقي من حيث تفاعل عناصر التكوين وما تصنعه في المجال الحركي وما تعطيه الحركة من منجزات البحث ضمن نطاق التحرر من الكون الكتلني الذي تتمحور حوله بعض البنى التكوينية في العمل الفني .

من هنا يأتي دور " مصممي طباعة المنسوجات بكلية الفنون التطبيقية" في إمكانية عمل أنواع مختلفة ومتنوعة من المنتجات السياحية والتي تجسم تراث مصر بطريقة شبه واقعية وغير تقليدية والتي تجذب عين من يراها . ويتم ذلك باستخدام طريقة "التأثير الحركي " العدسات اليدوية ذات التأثير "الفليب" "تغيير الصورة " .

1.1 أهمية البحث

النهوض بمستوى تصميم طباعة المنسوجات باستخدام تقنية "التأثير الحركي " العدسات اليدوية في ابتكار تصميمات مستحدثة تصلح لطباعتها على المنتجات السياحية ذات القطعة الواحدة .

1.2 مشكلة البحث

تعود السائحون على رؤية مشاهد ومناظر بصورة تقليدية ومعتادة على المناطق السياحية في مصر ، مع ضعف شكلها وعدم مواكبتها لأسلوب الجذب لعين السائح وذلك باستخدام الاتجاهات الفنية التي تعتمد على "التأثير الحركي " مما يؤدي إلى افتقار المنتجات السياحية إلى القدرة على التنافسية العالمية لعدم توافر عنصر الإبهار والواقعية في أنواع المنتجات السياحية المعروفة ذات القطعة الواحدة .

1.3 أهداف البحث

- تدعيم مجال تصميم طباعة المنسوجات بالأفكار الجديدة المبتكرة التي يكون "التأثير الحركي " هو الأساس فيها بهدف الترويج للمنتج السياحي

1.4 فروض البحث

يفترض البحث ان: ابتكار تصميمات مطبوعة للمنتجات السياحية بكافة القطاعات السياحية تعتمد على تقنية "التأثير الحركي " تساهم في معرفة ورؤية التراث المصري بأشكاله المتنوعة (فرعوني – قبطي – اسلامي....) تساهم في رفع وعي ومعرفة السائح بهذا التاريخ العظيم.

2 التأثيرات الحركية في الفن

يمكن تعريف الحركة بأنها : هي حركة الشئ أو نقل الشئ ، وعلم الحركة هو العلم الذي يبحث في حركة الأجسام كما تحدثها القوى المؤثرة فيها بالإضافة الى أنها تتضمن علوم المسافة والزمن (عبد النبي، 2011، ص54) . وتعتبر الحركة أداء فعلى مرتبط ارتباطاً كلياً بالفنون التفاعلية ، والفنون التفاعلية يمكنها تصنيف الحركة إلى :

أ- حركة باليد كما بالشكل رقم (1).



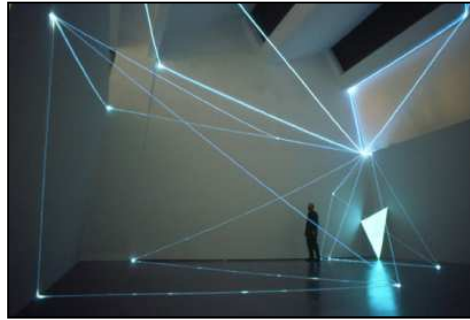
شكل رقم (1) يوضح تفاعل احد المتلقين مع العمل الفنى باليد (Youtube.com : معرض للفن الحركي في دار كريستيز في لندن)

ب- حركة بكل الجسد كما بالشكل رقم (2)



شكل رقم (2) يوضح تفاعل المتلقى للعمل بحركة الجسم كله (Soto arte cinetica_medium)

ج- حركة ثم ثبات فى مكان محدد . شكل رقم (3)



شكل رقم (3) يوضح تفاعل المتلقى للعمل بحركة ثم ثبات فى مكان محدد (www.collater.al/kinetica-art-fair-2012)

تلك الأنواع تتطلب حركة المشاهد ، أى تتطلب الحركة التفاعلية فى حد ذاتها ، فالحركة هنا هى وسيلة ضرورية لأداء التفاعل بين المشاهد والعمل الفنى (رزق، 2015، ص 211).

وتعتبر الحركة من العناصر الهامة فى بعض الأعمال الفنية والتي تبدو مستقرة على السطح الثنائي الأبعاد أو أن يكون بعضها مليئا بالحركة .

3 الفن الحركي KINETIC ART

ان تتبع التطور فى مجال الفن البصرى سيقودنا الى ما عرف باسم (الفن الحركي Lartcinetique) الذى كان قد مارسه جزئيا او مهد له عدد من فناني الاوب ارت(عطية، 2001، ص 92). وبخاصة أولئك الذين جعلوا من التصوير البيئوى نشاطا لهم .والحقيقة أن محاولة نقل الحركة فى العمل التشكيلي من مجال الإيهام المنظورى إلى المجال الواقعى والفعلى قد بدأت مع بداية العشرينات ، وارتبطت بالأعمال ذات الطابع الاختيارى للمستقبلين .(فريدريك، 1993، ص 73)

ويرجع ظهور هذا الاتجاه للأفكار الفنية التى طرحها بالدرجة الأولى المهندس الأمريكى (الكسندر كالدرا) من خلال تجربة تحول الاعمال التجريدية للفنان (بيت موندريان) ذات بعدين الى اعمال متحركة ذات ثلاث ابعاد ومن المعتقد ان مسألة (اللاوزن) كجزء من التقليد الحركى ، تعود فى نشأتها الى هذا الفنان (الكسندر كالدرا).

ويبنى الفن الحركي على فكرة إن الحركة والضوء يمكن أن تخلق أعمالاً فنية ، فإذا ما علقت الأشياء بطريقة تتيح لها الحركة والدوران ، فإنها ، وبمساعدة الضوء ، توجد أشكالاً جميلة من ظلالها . وقد علق بعض الفنانين أعمالاً فنية عكسوا عليها أضواء ملونة فتكونت أشكال جذابة للغاية .

يشمل هذا النوع من الفن كما يشمل أي عمل فني متحرك كتلك الأعمال التي أنتجها فنانون وجعلوها تتحرك ، واستخدم فنانون " الفن المتحرك " كل الخامات المتاحة في بيئاتهم كالحديد والقماش والزجاج والأسلاك وغيرها بحيث تكون تلك الأشكال الفنية معلقة في الهواء لكي تتحرك وتُدور بصورة ديناميكية بفعل الهواء الطبيعي أو بفعل محرك آلي أو من خلال تسلط الضوء أو مجموعة من الأضواء الملونة على الأشكال المعلقة وقد هدف فنانون هذا الاتجاه إلى إيجاد أعمال فنية تتصف بالحركة والاستمرارية والديناميكية وليس الثبات والجمود كما في الأعمال المنحوتة سابقاً ، مستوحية الأفكار المتعددة من الواقع وإن يكن إنجازها بأشكال مختلفة .

إن الفن الحركي الذي مهدت له مختلف التيارات انتشر على نطاق واسع من عام 1954 ولوحظ أن تيارات مختلفة قد برزت منذ عام 1961 داخل الفن الحركي رافقتها تطلعات جديدة تسعى لأن تدخل هذا الفن في الحياة الاجتماعية المعاصرة ، بإدخاله في نطاق الديناميكية التشكيلية للعمارة وتخطيط المدن ومن خلال دفع المشاهد للمشاركة جسدياً ونفسانياً في العملية الجمالية وثمة ظاهرة أخرى ، هي ظاهرة التلاقي الحاصل بين الأغراض الجمالية والمساعي العلمية والتكنولوجية الحديثة وما نتج عن هذا التلاقي من محاولات للتوفيق بين الطموحات العامة لعصرنا والفن الحركي الذي بدا وكأنه يمثل بعض هذه الطموحات (علوان ، ص 96).

فالفن الحركي قادر على أن يغطي تصنيفات كثيرة للشئ المنظور . حيث يمكن تصنيفها إلى :

أعمال تبدو أنها تتحرك أو تتغير على الرغم من سكونها في الواقع قد تكون هذه الأعمال ببعدين أو ثلاثة أبعاد .

أعمال تتحرك دون ضابط من قوة ميكانيكية مثل محركات " الكسندر كالدور " .

أعمال التي تشغل ميكانيكياً والتي تسخر فيها الضوئية الممغنطة الكهربائية. (ناهي ، 2004)

وقد قسم الفنان "فرانك بوبر" ذلك النمط من الفن إلى ستة أصناف وهي :

3.1 تحريضات بصرية

أي الأعمال التي تثير عند المشاهد رد فعل نفسي - فسيولوجي باستعمال الفنان رسوماً ذات تأثيرات متموجة تثير العين وتحيرها. والحقيقة أن أعمالاً على هذا المنوال هي وحدها التي يمكن تصنيفها أعمالاً بصرية خالصة. مثل أعمال "كاندنسكي" والتي تعتمد على خداع البصر الناتج عن تداخل الأشكال الهندسية والتي توحى بالحركة، وإطلاق عليها اسم " تحريضات بصرية تجريدية " .

3.2 لأعمال التي تتطلب تدخل المشاهد

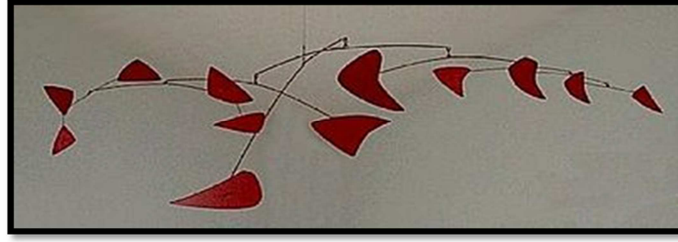
وهي تلك الأعمال التي تتطلب بطريقة أو بأخرى تدخل المشاهد، إذ عليه وحده أن ينتقل في المكان لينشطها ويفعلها. مثل أعمال "فيكتور فازاريللي"، الذي قدم تجارب عديدة كالرسم على طبقات من ورق السلوفان (ورق شفاف عازل) أو على البليكس جلاس Plexiglass (زجاج الوقاية) ووضعها على مسافات متفاوتة فيما بينها بشكل يغير تأثيرها مع انتقال المشاهد من مكان لآخر؛ أو أعمال "ج.رسوتو" الذي علق شبكات معدنية (من أسلاك حديد أو غيرها) أمام خلفية مخططة (لوحة: إهترازية)، ويتغير انطباع هذه اللوحة وتأثيرها كلما تحرك المشاهد.



شكل رقم (4) يوضح احد أعمال " فازاريللي " في خارج متحف بيكس في هنغاريا

3.3 الآلات الحقيقية :

وهي تلك الأعمال التي دخل في إنتاجها الفني أجهزة أو ما سمي بالسبرانيّة la cybernétique مثل أعمال الفنان البلجيكي " بول بوري " الذي قدم أعمالاً تعتبر نظير الإنسان الآلي؛ وآلات "جان تانغلي" القادرة على الرسم والتصوير بأسلوب تعبيرية تجريدية؛ ومنحوتات " تاكيس " التي يستخدم فيها المغناطيس وتأثير المغناطيس الكهربائي عليه؛ حيث تعتمد تلك المنحوتات على الطاقة أكثر من اعتمادها على المادة، فإنها تفقد للطابع الشكلي ولا تلبث الآلة بعد انفصالها عن التيار أن تفقد كل شيء للحضور الذي تمتلكه أثناء نشاطها، وبناء على ذلك فإنها تقف ونجاج كل من بوري أو تانغلي على طرفي نقيض.. وغالباً ما يكون للأصوات، من جهة أخرى، أهمية المشهد نفسه الذي تقدمه الآلة أثناء عملها. يبدو لنا من خلال ما سبق ظهور بوادر لدخول (الصوت/الموسيقى) في العمل الفني بالإضافة إلى الحركة والفنون التشكيلية؛ كذلك لدينا بعض الأعمال الأخرى كعمل " غابو " وتسمى "المنحوتة الحركية" وهي عبارة عن قضيب فولاذي متصل بمحرك كهربائي عند قاعدته يجعله في حركة متناغمة ؛ وكذلك الفنان الأمريكي " الكسندر كالدور " الذي أضاف إلى منحوتاته التجريدية محركات تبعث فيها الحركة.



شكل رقم (5) من أعمال "الكسندر كالدور" وتسمى (متحرك احمر Mobile rouge) عام 1956

3.4 المتحركات MOBILES:

المتحركات هي تلك الأشياء التي لا تدور بفعل الآلة ولكنها تتحرك أو تدور من تلقاء ذاتها. أما الصنفان الآخران لبوبر فإنهما يحتويان الأعمال التي أدخلت الضوء والحركة، والأعمال الأكثر تجهيزاً، وهي تلك التي صيغت لتكون مشهداً أو بيئة أكثر من كونها أعمالاً مستقلة. والمتحركات mobiles : مثل أعمال "كالدور" كـ"السيرك المصغر" بأشخاصه المصنوعة من الخشب والأسلاك الحديدية، والذي أعتبر لاحقاً رائد المتحركات، وقد عرض "كالدور" أول متحركاته في عام 1932؛ كذلك أعمال النحات الألماني "غونتر هيز" التي صنعها بأسلاك حديدية لتقدم تشكيلات بحجوم مصغرة تتألف بشكل عام من إطار مرن وغير ثابت، ويحتوي على العديد من العناصر المتذبذبة؛ وكذلك قدم الفنان "آجام" أعمالاً تهتز عناصرها المثبتة بواسطة النوابض عند أي احتكاك فتتولد عنه كل أشكال الخداع البصري.

3.5 أعمال الضوء والحركة:

أعمالاً تدخل في نطاق ما يسمى بـ (الضوء - حركية) (Luminocinetique) والتي تجمع بين الضوء والحركة سواء على مساحات مسطحة ذات بعدين ، أو في أعمال ذات أحجام حقيقية ثلاثية الأبعاد ومثل هذه الأعمال تمارس على المشاهد بفضل ما توصلت إليه من انطباعات تناغمية ، ضوئية لونية تشكيلية جديدة تأثيراً بصرياً ولمسياً ، كما تدفع للمشاركة الحركية (مايزر، 1996) . وهي تلك الأعمال التي أدخلت الضوء والحركة لتجعلها أكثر تجهيزاً والتي صيغت لتكون مشهداً أو بيئة أكثر من كونها عملاً مستقلاً حيث قام " توماس ويلفرد " Wilfred " بتجارب (ضوء - حركية) فيما سمي بالفن الضوئي "art lumina" وأطلق " فرانك مالينا" على أعماله اسم "الصور الضوئية المتحركة" " images lumineuses mobiles " حيث يستعين بمصادر ضوئية يصنعها في علبة خشبية مزودة بمرآة عاكسة ولوح من الزجاج الصناعي يتحرك آلياً، ويغلق العلبة بلوح زجاج غير مصقول ليسقط عليه الضوء، فيتكون تلاعب في الأشكال والألوان متبدل دوماً؛ عدد من الفنانين الأمريكيين لجأوا في أعمالهم الحركية إلى استخدام غازات نادرة كالنيون وبخار الزئبق والأرجون. شكل رقم (6)



شكل رقم (6) يوضح استخدام أعمال الضوء والحركة في الأعمال الفنية

3.6 الأعمال التي صيغت لتكون مشهداً أو محيطاً

منذ سنة 1961 برزت تيارات وتطلعات داخل الفن الحركي تسعى إلى إدخاله في الحياة الاجتماعية في مجال الدينامية التشكيلية للعمارة وتخطيط المدن، حيث أنجز "شوفر" سنة 1961 البرج " الفضاء- ديناميكي "spatiodynamique" والمشهد المرافق له في منتزه "بوفري دي لبيج" في مدينة "البيج" في بلجيكا، وهو عبارة عن عامود يصل ارتفاعه إلى (52) متر، ويتألف من جسور وصفائح- مرآة Plaque- miroirs بأشكال مختلفة تديرها محركات بسرعات متباينة، مرتبطة بنظام إلكتروني للإعلام والحركة، ويصفه "د. محمود أمهر" يصدر حركات وتشكيلات وأصوات متبدلة دوماً تبعاً لما يصله من استعلامات بواسطة أجهزة خاصة، كمسجلات النقاط الأصوات، وخلايا تصوير كهربائية لتسجيل الضوء، والمصادر الحرارية. ثم إن التسجيل، على خمس أسرطة، لمقاطع موسيقية ومختلف أنواع الضوضاء المدنية، التي أعيد تأليفها، يعطي البرج قيمة صوتية ترافق، في الليل، المشهد الملون المنعكس على الواجهة الزجاجية للبناء المقابل (قصر المؤتمرات) للبرج. وبفضل هذا النظام، يدخل البرج في حياة المدينة ويصبح رمزها الحي .

4 أهم فناني " الفن الحركي "

4.1 الكسندر كالدور :

عرض كالدور متحركاته أول مره في الثلاثينات وقد ولدت الفكرة في الأصل من (سيرك) للتسلية ، تلك المتحركات ذاتها بحوافها الزاهية والمتصلة بثوابت وأسلاك ، تبدو وكأنها استنقت أفكارها من رسوم الفنان " خوان ميرو " ، وهي فرضية تؤكد أعمال " كالدور " المماثلة في طبيعتها لرسوم " ميرو " لكن هناك اختلافاً بينا ، أن ترتيب الأشكال في متحركات " كالدور " هو أمر عابر حيث كلما تأرجحت إحدى الرقائق تولدت علاقة جديدة مع الأخريات . إن الاحتمالات التي

تسببها الأشياء إنما تتحكم بها أمور أخرى مثل نقاط التوازن المتعددة وطول الأسلاك ووزن هذه الرقائق. (علوان، ص 65) ومن أشهر أعماله ، عمله النحتي (Tutem) شكل رقم (7) ، و (النجمة) شكل رقم (8) .

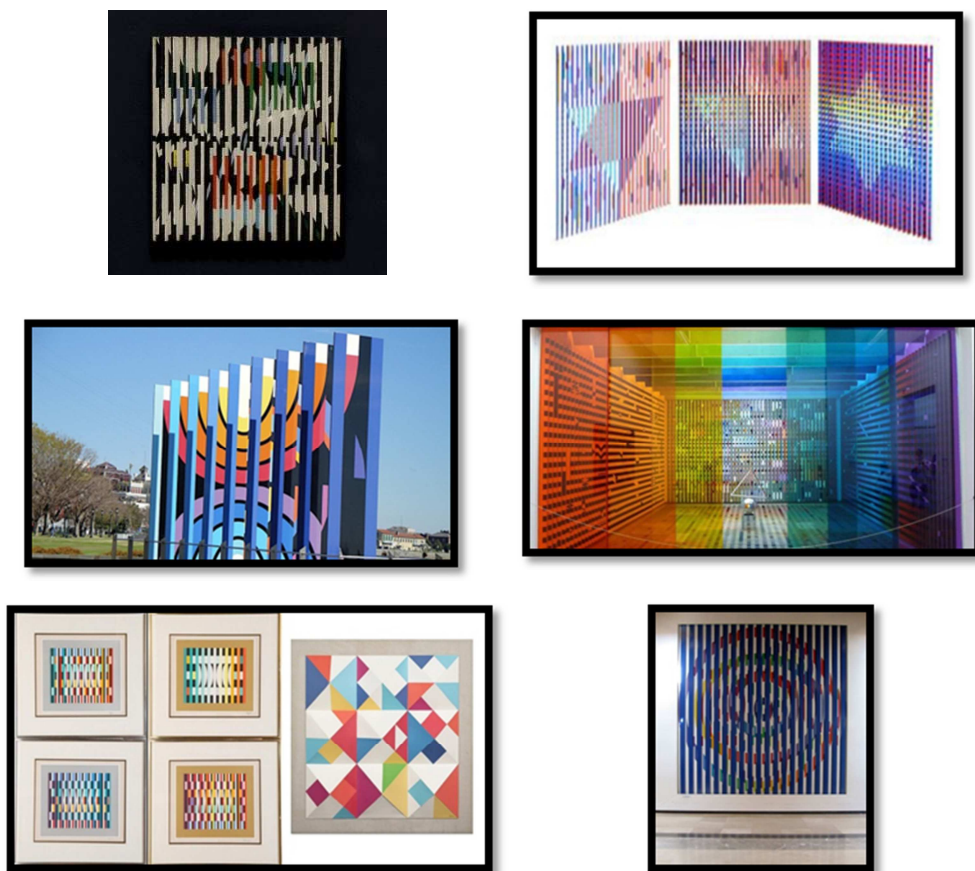


شكل رقم (8) العمل الفني (النجمة)

شكل رقم (7) العمل الفني (Tutem)

4.2 يعقوب أجام (YAACOV AGAM) :

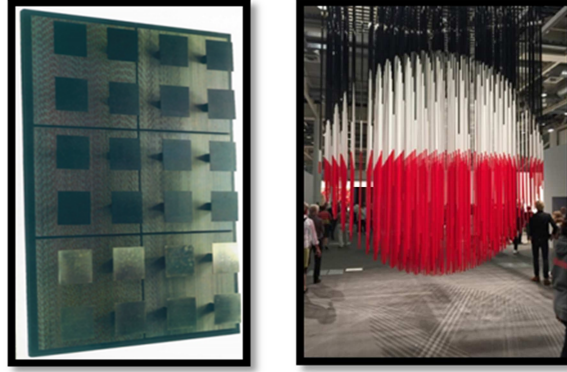
وهو من أشهر فناني " فن الحركة " والذي استخدم تغييرات في وجهات النظر للعمل الفني الواحد، حيث ان عرض التصميم في هذا النوع من الأعمال لا يشمل حركات الحقيقية. ولكن يتم إنشاء التغييرات في وجهات النظر من زوايا مختلفة يقوم بها المشاهد أو المتلقي من الالتفاف حول العمل ، مما يؤدي إلى توليد الوهم البصري التي أنشأتها الأشكال في الحركة مما يعطى إحساس بالحركة وتغير الصورة. يوضح الشكل رقم (9) مجموعة من الأعمال المختلفة للفنان يعقوب أجام (Yaacov Agam) .



شكل رقم (9) مجموعة من الاعمال المختلفة للفنان يعقوب أجام

4.3 الفنان "سوتو"

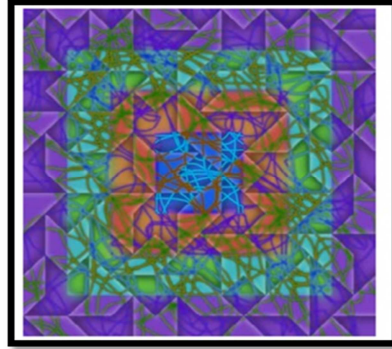
الفنان سوتو ذو الأصل الفنزويلي، فقد كان هدفه المبدئي أن "يُفعّل" dynamiser تكوينات الفنانين الجدد "بتكراره للمربع إلى ما لانهاية، لينتهي هذا التكرار بتواري المربع واختفائه، فينتج عن ذلك حركة خالصة"، وفي أوائل الخمسينات أنجز رسوماً تحقق تأثيرها بتكرار وحدات توضع بطريقة تجعل الإيقاع الذي يصل بينها أكثر أهمية للعين من أي جزء بمفرده، لذلك فإن الصورة لا تُؤلف شيئاً متكاملأً بحد ذاتها، بل هي جزء مأخوذ من نسيج واسع لا حدود له ينبغي على المشاهد تخيله. إن أكثر أعمال سوتو لفتاً للانتباه هي الشبكات الكبيرة من العصي المعلقة على طول الجدار بطريقة تبدو فيها هذه الطبقات من العصي وكأنها تلغي جانب الغرفة كله، فتثير في المشاهد ردود فعل غريزية إزاء فضاء منغلق. شكل رقم (10)



شكل رقم (10) احد أعمال الفنان "سوتو" شكل رقم (11) العمل الفني "اهتزاز" للفنان "سوتو"

4.4 الفنان البلجيكي بول بوري POL BURY

واحداً من الأوائل الذين استخدموا المحركات الكهربائية (الآلات) في تجاربهم التشكيلية، وكانت أعماله تتبع إيقاعاً غير متوقع في «زمن متمدّد» بوساطة حركات بطيئة إلى أقصى الحدود «مُغلّطة، وصامتة، وفوق طبيعية»، وهي تشكيلات من المطاط أو النايلون والألواح الخشبية، ومن القضبان أو الكرات المعدنية، تقدم للمشاهد تنظيماً تشكيمياً تتعارض تشكيلات بوري بحدة مع آلات الفنان السويسري جان تانغلي الذي أبرز ما في الآلة من سحر وسلطان، وما يتحلى به هو من روح النقد والتهكم وقوة الابتكار عبر تشكيلاته العبثية التي يلعب الصوت فيها دوراً مهماً في العلاقات بين مختلف حركات كل أثر فني. ومع آلاته من الخردة وما يلتقطه من سقط المتاع توصل تانغلي إلى ابتكارات تزداد ضخامة ووقفاً مع الأيام. ويوضح الشكل رقم (12-13) أعمال الفنان "بول بوري".



شكل رقم (12) يوضح احد أعمال الفنان "بول بوري"



شكل رقم (13) لوحة 410 قضيب للفنان "بول" عام 1960 وهي يطلق عليها اسم
(Hunting the Quark)

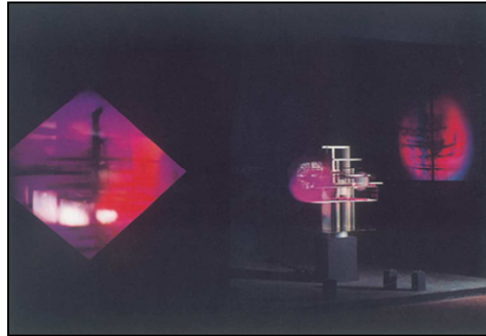
4.5 الفنان نيكولاس شوفر

أعاد الفنان " نيكولاس شوفر " تجارب موهولي ناغي، ويقترح في الوقت نفسه، تجديد مختلف التجارب الضوئية الحركية التي أنجزت في عام 1920.



شكل رقم (14) يوضح احد اعمال الفنان "شوفر" وهي باسم (Rotoreliefs) عام 1935

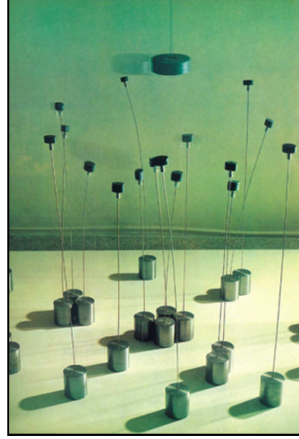
وإلى جانب شوفر جرب كثير من الفنانين، الأمريكيين خاصة، «الأضواء - الحركية» مطورين تقانات مستحدثة: لوحات ضوئية متحركة، مواشير ودارات فيديو، وأنابيب معبأة ببخار الصوديوم واليود والزئبق، وأنظمة، بسيطة أو معقدة، لتعديل مصادر الضوء وتغيير مساره، والحصول على احتمالات لا حدود لها لمركبي «الضوء والحركة»: بدءاً من التشكيلات الضوئية الثلاثية الأبعاد، وانتهاء بأعمال البيئة environment والأعمال المشهية، مروراً بالنواحي reliefs ومعلقات المعادن العاكسة، وتأثيرات التصوير الضوئي الفوري، والهولوجرافي holography (التصوير بإشعاعات الليزر)، والزجاجات البصرية المتحركة.



شكل رقم (15) عمل للفنان "شوفر" باسم (منحوتات مكانية - ديناميكية)

4.6 فاسيلاكيس تاكيس :

استخدم الديناميكية الخفية للطبيعة، بإدخاله القوة المغناطيسية في الأعمال النحتية. كان هدف هذا الفنان اليوناني إبراز قوة المغناطيس غير المرئية عبر الحركة التي تبعث الحياة في تشكيلات من الحديد والفولاذ.



شكل رقم (16) يوضح احد اعمال الفنان تاكيس (حقول مغناطيسية)

ومما سبق يتضح أن الفن الحركي كان له الأثر في توجهات عالمنا الحالي في عالم الإبداع، فبوساطته خرجت الفنون المفتونة بدنياميكية العالم المعاصر من عزلتها النسبية لتلتقي مع مباحث العلم والتكنولوجيا.

ويسعى فن الحركة إلى استقطاب جمهور تتضاعف أعداده يوماً بعد يوم، ويعمل على تنشيط العمارة بابتكاره الأعمال البيئية والمشهدية spectacles. إنه فن يتوجه إلى العين التي تبصر، واليد التي تتدخل، والمشاهد الذي يشارك، من دون أن يقتصر في توجهه على جماعة من المجربين أصحاب الامتياز، لاسيما أن تحقيق أثر حركي غالباً ما يستوجب عملاً جماعياً يقوم به فريق كامل، فكلما اعترضت الفنان قضايا ومشكلات تتجاوز حدود الجمالية الخالصة إلى حد بعيد يزداد اندماجه في الواقع الاجتماعي.

فمن البديهي أن يصير مفهوم الفراغ، المتوارث من عصر النهضة، والقائم على إدراك عالم مرئي توحدته أنظمة علم المنظور التقليدي، مفهوماً قاصراً وعاجزاً عن تلبية متطلبات العصر الحالي، وعليه فإن إدراك معطيات الواقع المتجددة على الدوام بالعلوم والتقنية تتطلب من الإنسان تطوراً ديناميكياً: فالنسبية اكتشفها الفن كما اكتشفها العلم تماماً، وهذا ما دفع فريقاً من المبتكرين المدركين للحاجات الجمالية الجديدة إلى استخدام الحركة وسيلة من وسائل التعبير في تجاربهم في الحيز (المكان الفراغ) التشكيلي المرتبط بالزمن.

5 الدراسة التطبيقية

وفي ضوء ما سبق يحدد المصمم الوحدات والعناصر المستخدمة المستمدة من الطرز التاريخية، ويمكنه أن يجمع بين أكثر من عنصر أو أكثر من طراز، كما يمكنه أن يستخدم المعالم الطبيعية والأثرية كعناصر ووحدات للمنتج السياحي، ويتطلب ذلك معرفة المصمم بتاريخ الطرز وكذلك العناصر التراثية القومية، ومراعاته للانسجام اللوني، وتوزيع العناصر والمساحات اللونية حتى يبهز السائح لتوافر عناصر الجذب السياحي.

وقد تم اتباع طريقة "التأثير الحركي" العدسات اليدوية ذات التأثير "الفليب" "تغيير الصورة" في الدراسة التطبيقية. مما كان له الأثر في التغلب على التكلفة العالية للطباعة العدسية الأوتوماتيكية، حيث تم ابتكار تصميمات تستخدم فيها "طريقة التأثير الحركي" أو العدسات اليدوية، والتي تعتمد على تغيير زاوية الرؤية وتنتج صورتين مختلفتين مع حركة المتلقى امام العمل، والتي يمكن من خلالها إنتاج صور ذات تأثير الفليب "تغيير الصورة"، كما في العدسات الأتوماتيكية.

وتتميز طريقة "التأثير الحركي" العدسات اليدوية ذات التأثير "الفليب" باعتمادها على تغيير زاوية الرؤية حيث تعتمد على إشراك المشاهد (المتلقى) في العمل الفني وذلك من خلال:

- حركة المشاهد أمام العمل .
- حركة المشاهد داخل العمل الفني . شكل رقم (17)



شكل رقم (17) يوضح أعمال تتطلب حركة المشاهد داخلها

- أعمال تطلب مشاركة المشاهد في تكوينها . شكل رقم (18) حيث يعتبر المشاهد من القوة المحركة للأعمال الفنية من هذا النوع من التصميمات.



شكل رقم (18) يوضح أعمال تطلب المشاهد في تكوينها <https://openhousebcn.wordpress.com>

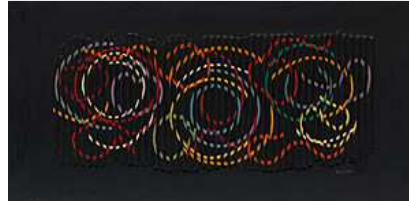
خداع زاوية الرؤية :

هي احد أنواع الإحساس بالوهم البصري والذي يعطى إحساسا بالعمق في بعض الأعمال مثل أعمال الفنان " باتريك هيويز " بعنوان تلاشي البندقية " والتي يظهر بها مباني رسمت على سطح ثنائي الأبعاد . شكل رقم (19)



شكل رقم (19) لوحة تلاشي البندقية للفنان " باتريك هيويز " والتي تتغير نتيجة حركة المشاهد امامها يمين ويسار العمل <https://www.artsy.net/artwork/jesus>

كما يمكن استخدام (تغير زاوية الرؤية) في إعطاء التصميمات تغيير في شكلها كلما تحرك المشاهد من حولها نتيجة اختلاف درجة زاوية الرؤية مع درجة زاوية السطح الذي يتم رؤيته . كما هو واضح من خلال أعمال الفنان " يعقوب اجام " . شكل رقم (20)



شكل رقم (20) يوضح احد أعمال الفنان " يعقوب اجام " والتي تختلف وتتغير في شكلها تبعاً لتحرك المشاهد أمامها <https://www.artsy.net/artwork/jesus-rafael>

و تتميز تلك النوعيات من التصميمات بعدة مميزات وهي :

- 1- إمكانية تنفيذها يدوياً بدون الحاجة إلى معالجات خاصة للصورة ببرامج خاصة مرتفعة التكاليف .
- 2- لا تحتاج الى لصق للعدسة ، إذ يمكن رؤية تغيير الصورة بدون وسيط للرؤية ، مما يقلل التكلفة النهائية للتصميم.
- 3- إمكانية طباعتها على معظم أنواع الأقمشة وخاصة أقمشة " البوليستر " ، وبالطرق الطباعة الخاصة بطباعة المنسوجات .

وتعتمد طريقة التنفيذ على عدة مراحل :

أ- الحصول على صورتين ، سواء كانوا من نفس المكان (صورة من داخل المكان ، صورة من خارج المكان) او من مكانين مختلفين ، كما بالشكل رقم (21) ، (22).



شكل رقم (22) يوضح معبد " الكرنك



شكل رقم (21) جامع الحاكم بأمر الله بالقاهرة

ب- يتم عمل تعديل فى أبعاد الصورتين بحيث يكونوا نفس الأبعاد (المقاس) .

ج- يتم تقطيع الصورتين بمقاسات واحدة ، ولتكن (5سم) لكل شريط.

د- عمل "منتجة " للصورتين بوضع جميع الشرائط بجوار بعض كما بالشكل رقم (23)



شكل رقم (23) يوضح منتجة الصورة بعد تقطيعها (عمل الباحثين)

هـ - طباعة الصورة على القماش ، ثم تكسيها فيما يعرف بـ " البليسيه " وهى "تلك الأقمشة ذات الكسرات الطويلة أو العرضية والتي يمكن الحصول عليها بعدة طرق نسجية بخلاف أساليب الضغط أو الكى أو الحياكة ، فيمكن الحصول على تلك الكسرات بطرق نسجية خاصة وهى مرتبطة بفن التراكيب النسجية ، وقد عرفت باسم " البليسيه " جميع أنواع الأقمشة التى بها ثنايات سواء كانت عن طريق النسيج او بواسطة التجهيز والمنسوجات ذات الثنايات تعرف بالفرنسية (Plisse) وبالانجليزية (Pleated)" (صديق،2008،ص87) . لياخذ التصميم زوايا هرمية تمكن المشاهد من رؤية صورتين مطبوعتين على القماش .

و- كما يمكن استخدام الصور فى التأثير الحركى من عدة زوايا مختلفة ، حيث يمكن أن تكون من زوايتين مختلفتين للرؤية أو من ثلاث زوايا مختلفة ، كما بالشكل رقم (24)



شكل رقم (24) يوضح استخدام صورة واحدة لنفس العنصر " الوحدة " من ثلاث زوايا مختلفة فى "التأثير الحركى" (عمل الباحثين)

ز- كما يمكن استخدام صورة واحدة ، ومعالجتها بحيث تعطى التأثير ثلاثى الأبعاد (العمق Depth) كما بالشكل رقم (25)



شكل رقم (25) يوضح استخدام صورة واحدة لتعطى التأثير ثلاثى الأبعاد (العمق Depth) (عمل الباحثين)

وفيما يلي عرض للأفكار التصميمية التي تم تنفيذها بالعدسات اليدوية بتأثير الفليب :
وقد تم استخدام ثلاث أنواع من التصميمات :

- النوع الأول : مناظر كاملة لعدد من الأماكن المختلفة . وذلك في الأفكار التصميمية من (1) إلى (6) .
- النوع الثاني : تصميمات لعنصر واحد من عدة زوايا مختلفة . وذلك في الأفكار التصميمية من (7) إلى (9) .
- النوع الثالث : تصميمات لنفس الصورة لتعطي إحساس بالعمق .

5.1 لنوع الأول :

الفكرة التصميمية رقم (1) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من نفس المكان " راقصة البالية " من دار الأوبرا المصرية .

• التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير الفليب اليدوي .

• تفاصيل الصورة الأولى (بالترتيب) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER : NIKON CORPORATION

CAMERA MODEL : NIKON D7000

أبعاد الصورة (Dimensions) : 4076 * 2724 pixels.

العرض (Width) : 4076 pixels .

الطول (Height) : 2724 pixels .

الجودة (Resolution) : 240 dpi .

تفاصيل الصورة الثانية :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER : NIKON CORPORATION .

CAMERA MODEL : NIKON D7000

أبعاد الصورة (Dimensions) : 3264 * 4628 pixels .

العرض (Width) : 3264 pixels .

الطول (Height) : 4628 pixels .

الجودة (Resolution) : 240 dpi .

تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution) .



شكل رقم (27) راقصة البالية (2)



شكل رقم (26) راقصة البالية (1)



الفكرة التصميمية النهائية رقم (1)

الفكرة التصميمية رقم (2) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من مكانين مختلفين ، ففي الصورة الأولى تم استخدام صورتين من مدينة الإسكندرية، الصورة الأولى لـ " منظر لمدينة الإسكندرية والبحر "، والصورة الثانية تم استخدام صورة لـ " الفنار " .

• التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير الفليب اليدوي .

• تفاصيل الصورة الاولى (منظر لمدينة الاسكندرية والبحر) :

🚩 نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER : Canon

CAMERA MODEL : Canon EOS 600D

🚩 أبعاد الصورة (Dimensions) : 4834 * 3223 pixels .

🚩 العرض (Width) : 4834 pixels .

🚩 الطول (Height) : 3223 pixels .

🚩 الجودة (Resolution) : 72 dpi .

• تفاصيل الصورة الثانية (الفنار) :

🚩 نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :Canon

CAMERA MODEL : Canon EOS 600D

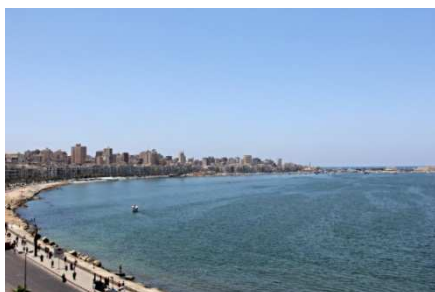
🚩 أبعاد الصورة (Dimensions) : 5184 * 2912 pixels .

العرض (Width) : 5184 pixels .

الطول (Height) : 2912 pixels .

الجودة (Resolution) : 240 dpi .

تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution).



شكل رقم (29) مدينة الإسكندرية



شكل رقم (28) الفنار



الفكرة التصميمية النهائية رقم (2) يتم التحرك أمام العمل يمينا ويسارا

الفكرة التصميمية رقم (3) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من مكانين مختلفين لنفس المحافظة ، ففي الصورة الأولى تم استخدام صورة لـ " وادى الحيتان " من محافظة الفيوم ، والصورة الثانية تم استخدام صورة لـ " التنوع البيولوجى " لمحمية وادى الريان " بمحافظة الفيوم.

• التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير الفليب اليدوى .

• تفاصيل الصورة الأولى (التنوع البيولوجى بمحمية وادى الريان) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :Canon

CAMERA MODEL :Canon EOS 600D

ابعاد الصورة (Dimensions) : 2534 * 3801 pixels .

العرض (Width) : 2534 pixels .

الطول (Height) : 3801 pixels .

الجودة (Resolution) : 72 dpi .

تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution).

• تفاصيل الصورة الثانية (وادي الحيتان) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :FUJIFILM

CAMERA MODEL : Fine Pix S3pro

أبعاد الصورة (Dimensions) : 4256 * 2848 pixels .

العرض (Width) : 4256 pixels .

الطول (Height) : 2848 pixels .

الجودة (Resolution) : 72 dpi .

تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution) .



شكل رقم (31)
(وادي الحيتان بمحافظة الفيوم)



شكل رقم (30)
(التنوع البيولوجي بمحافظة الفيوم)



الفكرة التصميمية النهائية رقم (3) يتم التحرك أمام العمل يمينا ويسارا

الفكرة التصميمية رقم (4) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من مكانين مختلفين لمحافظة فين ، ففي الصورة الأولى تم استخدام صورة لـ " القلعة " من محافظة القاهرة ، والصورة الثانية تم استخدام صورة لـ " التنوع البيولوجي " لمحمية " وادي العلاقي " بمحافظة أسوان .

• التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير القلب اليدوي .

• تفاصيل الصورة الأولى (القلعة) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :NIKON CORPORATION

CAMERA MODEL : NIKON D40

أبعاد الصورة (Dimensions) : 2940 * 2000 pixels .

- العرض (Width) : 2940 pixels .
- الطول (Height) : 2000 pixels .
- الجودة (Resolution) : 240 dpi .

- تفاصيل الصورة الثانية التنوع البيولوجي " لمحمية "العلاقي" بمحافظة اسوان :
- نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :.OLYMPUS IMAGING CORP

CAMERA MODEL : FE310, X840, C530

- ابعاد الصورة (Dimensions) : 3264 * 2448 pixels .
- العرض (Width) : 3264 pixels .
- الطول (Height) : 2448 pixels .
- الجودة (Resolution) : 314 dpi .
- تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution).



شكل رقم (33) القلعة



شكل رقم (32) محمية "العلاقي" بمحافظة اسوان



الفكرة التصميمية النهائية رقم (4)

الفكرة التصميمية رقم (5) :

- التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من مكانين مختلفين لمحافظةين مختلفتين ، ففي الصورة الأولى تم استخدام صورة لـ" جامع الحاكم بأمر الله" من محافظة القاهرة ، والصورة الثانية تم استخدام صورة لـ" معبد الكرنك " محافظة الأقصر .

- التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير الفليب اليدوي .

- تفاصيل الصورة الاولى (جامع الحاكم بأمر الله) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :Canon

CAMERA MODEL : Canon PowerShot SD880 IS .

أبعاد الصورة (Dimensions) : 7472 * 1850 pixels .

العرض (Width) : 7472 pixels .

الطول (Height) : 1850 pixels .

الجودة (Resolution) : 72 dpi .

تفاصيل الصورة الثانية (معبد الكرنك) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :.Canon

CAMERA MODEL : Canon PowerShot S2 IS

أبعاد الصورة (Dimensions) : 7729 * 3648 pixels .

العرض (Width) : 7729 pixels .

الطول (Height) : 3648 pixels .

الجودة (Resolution) : 96 dpi .

تم معالجة الصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution).



شكل رقم (35) معبد الكرنك



شكل رقم (34) جامع الحاكم بأمر الله



الفكرة التصميمية النهائية رقم (5)

الفكرة التصميمية رقم (6) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورتين من مكانين مختلفين ، ففي الصورة الأولى تم استخدام صورة لـ " التنورة " ، والصورة الثانية تم استخدام صورة لـ " سياحة السفارى " بمحافظة الفيوم .

• التصميم :

تم التعامل مع الصورتين لإنتاج تأثير الفليب اليدوى .

• تفاصيل الصورة الاولى (التنورة) :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :NIKON CORPORATION

CAMERA MODEL :NIKON

أبعاد الصورة (Dimensions) : 960 * 639 pixels .

العرض (Width) : 960 pixels .

الطول (Height) : 639 pixels .

الجودة (Resolution) : 96 dpi .

• تفاصيل الصورة الثانية (سياحة السفارى) بمحافظة الفيوم :

نوع الكاميرا المستخدمة :

CAMERA MAKER :NIKON CORPORATION

CAMERA MODEL :NIKON D800

أبعاد الصورة (Dimensions) : 1170 * 781 pixels .

العرض (Width) : 1170 pixels .

الطول (Height) : 781 pixels .

الجودة (Resolution) : 240 dpi .

تم معالجة للصورة : (تصحيح الألوان – ضبط المقاسات مع ضبط Resolution).



شكل رقم (37) سياحة السفارى بمحافظة الفيوم



شكل رقم (36) رقصه التنورة



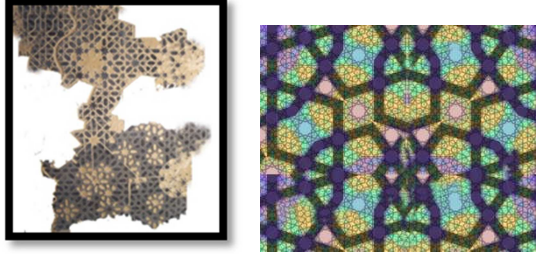
الفكرة التصميمية النهائية رقم (6)

5.2 النوع الثاني : تصميمات لعنصر واحد من عدة زوايا مختلفة

تتميز تلك الأنواع من التصميمات بإمكانية استخدام صورة واحدة من عدة زوايا مع دمجها مع تصميمات مختلفة للتراث المصرى المتنوع ، بما يعطى التصميم التأثير الحركى الجيد مع جودة وجمال العمل الفنى ، وفيما يلى شرح للأفكار التصميمية :

الفكرة التصميمية رقم (7) :

- التحليل الفنى :
- فى هذا النوع من التأثير الحركى تم استخدام صورة لعنصر واحد وهو لتمثال من الفن المصرى القديم للملك " الكا أو إيب رع حور " والمحفوظ فى المتحف المصرى بالقاهرة ، ثم تغيير خلفية صورة الملك بالشبكيات الهندسية الإسلامية ، ويلاحظ انه عند دمج نوعين من الفنون وهما فى هذا التصميم (الفن المصرى القديم) متمثلا فى صورة تمثال (الكا) و (الفن الإسلامى) متمثلا فى نوعين مختلفين من الشبكيات الإسلامية الهندسية التى قوامها الأطباق النجمية ، أن يكونا من زاويتين مختلفتين .
- الشكل :
- احتوى التصميم على صورة لتمثال (الكا) من زاويتين مختلفتين ، وضعت بطريقة متبادلة على جانبي التصميم ، بما يجعلها تتحرك فى اتجاهين عند معالجة التصميم "بالتكسير البليسيه " .
- استخدم فى الخلفية عناصر مختلفة من الفن الإسلامى وذلك لإعطاء التصميم القوة الفنية فى احتوائه على نوعين مختلفين من الفنون (المصرى القديم – الإسلامى) .



شكل رقم (38) العناصر الإسلامية المستخدمة فى التصميم

- اللون :
- تم التركيز على الألوان الزاهية فى التصميم لإعطاء التصميم القوة فى التأثير الحركى المطلوب ، وذلك باستخدام الأزرق ودرجاته .
- تم استخدام لون فى الخلفية وهو اللون (البيج) من نفس الدرجات الموجودة بالتمثال .
- تم وضع عدة خلفيات مختلفة من اللون اللبنى وذلك لتعطى إحساس بالعمق أكثر .



شكل رقم (39) تمثال الكا



التصميم الثاني زاوية (2)



التصميم الأول زاوية (1)



الفكرة التصميمية النهائية رقم (7) يتم التحرك أمام العمل يمينا ويسارا

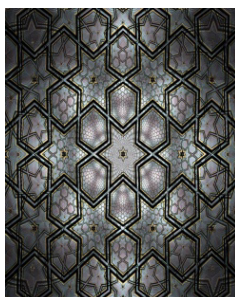
الفكرة التصميمية رقم (8) :

التحليل الفني :

تم استخدام صورة لعنصر واحد لصورة لتمثال من الخشب يوضح الطقوس الملكية للقضاء المصريين " ، مع استخدام احد الشبكيات الهندسة الإسلامية .

الشكل :

- احتوى التصميم على صورة للتمثال الفرعوني من زاويتين مختلفتين ، وضعت في منتصف التصميم .
- استخدم في الخلفية الشبكيات الإسلامية الهندسية التي قوامها الأطباق النجمية.



شكل رقم (40) العنصر الإسلامي المستخدم في التصميم

اللون :

- تم الاعتماد على إعطاء الخلفية نفس اللون الموجود بالتمثال ، وذلك لتوفير التناسق بين ألوان التمثال والخلفية .
- تم التركيز على أحداث بؤرة من الضوء في منتصف التصميم لإعطاء إحساس أكثر بالعمق .



شكل رقم (41) تمثال من الخشب يوضح الطقوس الملكية للقديما المصريين



التصميم الثاني زاوية (2)



التصميم الأول زاوية (1)



الفكرة التصميمية النهائية رقم (8)

الفكرة التصميمية رقم (9) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورة لتمثال لرأس الملكة " نفرتيتي " من زوايتين مختلفتين ويعتبر هذا التمثال دليل واضح على جمال الفن والتراث الفرعوني القديم والذي يمتد جذوره بالتحديد في محافظة المنيا " آثار العمارنة " .

الشكل :

- احتوى التصميم على صورة للتمثال الفرعوني (نفرتيتي) من زوايتين مختلفتين ، وضعت إحداها في الجانب الأيمن للتصميم ، والصورة الأخرى وضعت في منتصف التصميم لتعطي التأثير الحركي المطلوب .
- تم الاعتماد في هذا التصميم على إظهار جودة ووضوح الصورة وقدرة التصميم على إحداث التأثير الحركة (الفليب) المطلوب في التصميم .



شكل رقم (42) تمثال الملكة نفرتيتي



الفكرة التصميمية النهائية رقم (9)

5.3 النوع الثالث :

تصميمات لنفس الصورة لتعطي إحساس بالعمق .

- يختلف هذا النوع اختلافا كليا عن النوعين السابقين ، حيث يعتمد اعتمادا كليا على صورة واحدة ، يتم تحديدها واختيارها ، لتعطي تأثير (Depth) في التصميم . وهو ما يوضحه التصميم التالي.

الفكرة التصميمية رقم (10) :

• التحليل الفني :

تم استخدام صورة لمعبد (الكرنك) .

• الشكل :

• احتوى التصميم على صورة واحدة لمعبد الكرنك .

• تم وضع التصميم بطريقة هرمية بدون تقطيعه شرائح لإعطاء تأثير العمق.



شكل رقم (43) معبد الكرنك



الفكرة التصميمية النهائية رقم (10)

6 التوصيات

- 1- عدم الوقوف على الطرق التقليدية لطباعة المنسوجات والتطلع إلى الطرق الحديثة لطباعة المعلقات السياحية بما يتناسب ويتمشى مع التكنولوجيا الحديثة الموجودة على مستوى العالم.
- 2- عدم اقتصار التصميمات المتداولة في طباعة المعلقات السياحية على التصميمات المتداولة (صور توت عنخ آمون – الأهرامات – حورس ...) ، ولكن يجب توجيه النظر إلى الأماكن السياحية الأثرية في محافظات جمهورية مصر العربية المختلفة بما يحقق التنشيط السياح لتلك الأماكن من خلال استغلال ما تمتلكه من ثروات غنية من الأماكن والمناطق الأثرية .

المراجع العربية

- 1- رزق، وسيم(2015) . الخداع البصري وأثره في تحقيق البعد الثالث الإيهامي للمعلقات الطباعية ثنائية الأبعاد ، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية التربية النوعية ، جامعة القاهرة ، القاهرة.
- 2- صديق ، خالد (2008) . امكانية الحصول على الطيات المنسوجة " البليسية " باستخدام الخيوط المطاطة والاستفادة منها في تحقيق المتطلبات الفنية بملابس السيدات ، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية الفنون التطبيقية ، جامعة حلوان ، القاهرة .
- 3- عبد النبی ، احمد (2011). متطلبات تصميم طباعة أقمشة السيدات بمعطيات الفنون الحديثة للحركة والضوء، رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية الفنون التطبيقية ، جامعة حلوان، القاهرة.
- 4- عطية، محسن (2001) . الفنان والجمهور ، دار الفكر العربي ، القاهرة .
- 5- علوان، جولان: بنية التكوين في النحت الحركي ، كلية التربية الاساسية ، قسم التربية الفنية ، مجلة كلية الاداب ، العدد 93، جامعة ديالى ، العراق .
- 6- فريدريك، مالنز (1993) . الرسم كيف ننذوقه ،ترجمة هادي الطائي ، وزارة الثقافة والاعلام ، دار الشؤون الثقافية ، ط1، العراق .
- 7- مايزر، برنارد (1996) . الفنون التشكيلي وكيف ننذوقها ، ترجمة : سعد المنصوري ومسعد القاضي ، مراجعة وتقديم : سعد محمد خطاب ، مكتبة النهضة ، القاهرة .
- 8- ناهي، مايسه (2004) . الرموز وعلاقتها بالفضاءات والتكوينات بالمنحوتات العراقية القديمة في العصر السومري ، بحث مقدم الى جامعة بغداد ، كلية الفنون الجميلة ، العراق .

Youtube.com : معرض للفن الحركي في دار كريستيز في لندن -9

REFERENCES

- [1] http://www.ecodibergamo.it/stories/cultura-e-spettacoli/12_Soto/
- [2] <http://www.collater.al/kinetica-art-fair-201211->
- [3] <http://pooinnt.blogspot.com.eg/2013/08/kinetic-art.html> 12-
- [4] <https://www.artsy.net/artwork/jesus-rafael-soto-great-panoramic-vibrant-wall>
- [5] <http://tss-est.info/encyclopedia> 14-
- [6] <https://www.artsy.net/artwork/jesus-rafael-soto-great-panoramic-vibrant-wall15->
- [7] <https://openhousebcn.wordpress.com/2012/09/14/openhouse-barcelona-shop-moving-with-you-before-the-rain-art-exhibition>
- [8] <https://www.artsy.net/artwork/jesus-rafael-soto-great-panoramic-vibrant-wall->

Gestion des instabilités de terrain au Maroc (cartographie et sécurité)

[Management of landslide risks in Morocco (cartography and security)]

Mohamed Yazidi¹, Fouad Benziane², Abdelaziz Yazidi², Khadija Nabih³, and Nouredine Eloutassi^{4,5}

¹Laboratoire des sciences de la Terre,
Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Marrakech-Safi, Maroc

²Laboratoire de cartographie géologique,
Ecole Nationale de l'Industrie Minérale (ENIM), Rabat, Maroc

³Laboratoire de Chimie Organique,
Délégation du MENFP, AREF, Marrakech - Safi, Maroc

⁴Laboratoire des sciences de la Vie,
Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Fès, Maroc

⁵Laboratoire de Génie des Matériaux et Environnement (LGME),
Faculté des Sciences Dhar Mahraz, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah, Fès, Maroc

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: In Morocco, as in several regions of the world, field instabilities are one of the most serious problems on several levels: social, economic and environmental. This study is aimed at the safety of people, the protection of infrastructures and the environment, and on the other hand the forecasting of areas to be avoided for future development. Landslides are polygenic sets that result from the combined action of complex factors. Some, permanent factors, create the essential conditions for instabilities; the others, called dynamic factors, act under the dependence of the former and play the role of detonator. The geological complexity of the land concerned, the diagnosis of the phenomenon is sometime delicate. Risk prevention and protection of populations require, at least for the most threatening sites, delicate and costly studies and recognitions. To stabilize and delineate the damage, several solutions have been proposed and based on the use of various techniques. On the other hand, the preparation of a guide of the stabilization to reinforce the unstable areas has a paramount importance for the development of the regions, which are subjected to rapid and often disorderly urban growth.

KEYWORDS: sustainable development, guide of the stabilization, landslides, Rif, security, risk areas.

RESUME: Au Maroc, comme plusieurs régions du monde, les instabilités de terrain constituent un des plus graves problèmes sur plusieurs niveaux : social, économique et environnemental. Cette étude cible d'une part la sécurité des gens, la protection des infrastructures et de l'environnement et d'autre part la prévision des zones à éviter pour des futurs aménagements. Les instabilités de terrain sont des ensembles polygéniques qui résultent de l'action combinée de facteurs complexes ; les uns permanents, créent les conditions indispensables aux instabilités ; les autres, dits facteurs dynamiques, agissent sous la dépendance des premiers et jouent le rôle de détonateur. La complexité géologique des terrains concernés, rend parfois délicat le diagnostic du phénomène. La prévention des risques et la protection des populations nécessitent, au moins pour les sites les plus menaçants, des études et des reconnaissances délicates et coûteuses. Pour stabiliser et délimiter les dégâts, plusieurs solutions ont été proposées et différentes mesures ont été prises. Dans l'ensemble, elles sont basées sur l'emploi de diverses techniques. D'autre part, l'élaboration d'un guide de confortement de ces zones instables est d'une

importance capitale pour l'aménagement de ces régions qui sont soumises à une croissance urbaine rapide et souvent désordonnée.

MOTS-CLEFS: développement durable ; guide de confortement ; instabilités de terrain ; Rif ; sécurité ; zones à risque.

1 INTRODUCTION

Le Maroc est exposé aux phénomènes à risques majeurs de caractères climatiques, météorologiques, géologiques ou biologiques. La conjonction de ces phénomènes naturels cause des dommages importants, voire compromettre le développement socio-économique des régions exposées aux catastrophes naturelles [1].

Parmi ces phénomènes on trouve, les instabilités de terrain (écroulements, éboulements, solifluxions, glissements de terrain...). Leurs durées de manifestation sont variées : elles peuvent se traduire soit d'une façon brutale, en quelques minutes, soit s'étaler sur des décennies.

Toujours plus nombreux sont les régions touchées par ces instabilités de terrain. Ce problème, préoccupe les chercheurs [2] et les intéressés, vu le désordre qu'elles causent dans le développement durable, le réseau routier (figure 1), les habitations, les terres agricoles et parfois même de pertes humaines [3].



**Fig. 1. Dégradation des routes marocaines par les instabilités de terrain
(La rocade méditerranéenne)**

Les causes d'instabilités de terrain ont été déjà recherchées dans des études antérieures [4][5][6][7]. C'est dans cette optique que nous avons défini les instabilités en vue, d'abord, d'étudier les risques puis d'en délimiter les causes et de proposer quelques solutions.

Plusieurs régions du royaume connaissent un développement socio-économique important. De grands projets d'infrastructure sont soit en voie d'achèvement ou de lancement et de développement : rocade méditerranéenne reliant Tanger à Saidia ; ligne à grande vitesse Casablanca-Tanger ; autoroutes ; infrastructures portuaires.... Ces projets vont permettre de désenclaver de nombreuses zones, de favoriser un développement touristique des côtes méditerranéennes et atlantiques et de créer des plateformes d'accueil. Mais la problématique est que certaines zones sont géologiquement instables, caractérisées par une intense érosion, des glissements de terrain et une activité sismique, et dont l'environnement doit être protégé.

L'objectif de l'étude proposée ciblera d'une part la sécurité des gens, la protection des infrastructures et de l'environnement et d'autre part la prévision des zones à éviter pour des futurs aménagements. Aussi, les enjeux par rapport aux changements climatiques qui prévoient une hausse du niveau de la mer sont des paramètres qui doivent être intégrés pour les aménagements futurs.

Ces paramètres ont été résumés comme suit :

- Les régions amenées à voir de grands projets de développement posera des problèmes de sécurité pour les constructions, d'où la nécessité de l'élaboration d'une zonalité des risques ;
- La lithologie parfois formée de roches marneuses, argileuses et métamorphiques dont les plans de moindre résistance sont parallèles à la topographie et/ou ligne de pente, qui plonge vers des zones aménagés en certains endroits. C'est un facteur défavorable qu'il faut améliorer.

- Certaines régions connaissent une activité sismique ; l'intégration de ces hypothèses en matière de planification et de conception des ouvrages est nécessaire.
- Les zones géologiquement instables où les glissements de terrain sont périodiques et très fréquents et leurs entretiens coûtent cher à la société ;
- Les zones au relief jeune soumises à de fortes érosions ; sans négliger la présence de grandes failles actives ;
- La zone à pluviométrie élevée et irrégulière.

D'où une nécessité d'un zoning des risques et de leur classement pour définir des cartes de zonalité suivant le degré de risque.

2 SECTION D'ETUDE ET METHODOLOGIE

La région choisie pour cette étude c'est le Rif. Cette zone du domaine septentrional du Maroc, fait partie de la chaîne alpine.

La zone d'étude connaît chaque année d'importants mouvements de terrain. Leur vitesse et leur ampleur causent des catastrophes susceptibles d'affecter des dizaines, sinon des centaines de milliers de mètres cubes de terrain. Ces instabilités ont également de grandes répercussions économiques qui se traduisent par des dommages corporels et matériels, des retards et des perturbations dans le trafic et des dépenses excessives pour la remise en état des lieux touchés par les catastrophes.

Le présent travail se veut une contribution à la recherche de solutions aux nuisances causées par certains types d'instabilités de terrain. C'est dans cette optique que nous comptons mener notre approche des instabilités en vue, d'abord, d'analyser et d'en délimiter les causes puis de cartographier les zones à risque et enfin de proposer quelques solutions.

3 ANALYSE DES INSTABILITES DE TERRAIN

Le passage de l'état stable à l'état instable est lié à des causes nombreuses et variées qui viennent s'ajouter aux conditions intrinsèques au terrain. On distingue les prédispositions comme facteurs passifs, et les facteurs préparatoires et déclenchant comme facteurs actifs. La figure 2 résume les causes de mouvement de terrain.

3.1 PRÉDISPOSITIONS

- **La géologie** : La lithologie (composition, texture, granulométrie, caractères) ; la structure (le pendage, la présence de joints, de stratification, de plis, de schistosité qui constituent des zones de faiblesse dans un massif) ; l'histoire du versant (un versant qui a déjà connu des mouvements gravitaires aura une certaine prédisposition à être instable à nouveau).
- **La pente** : De nombreuses observations nous ont permis de constater que les pentes des zones souvent instables ont une inclinaison qui dépasse 15 degrés.
- **La végétation** : La végétation diminue l'érosion du sol. Elle a un rôle au niveau de la cohésion et de la fixation du sol (racines). De plus, nous avons remarqué que dans certaines régions où le couvert végétal est très dense, les versants deviennent instables.
- **L'hydrogéologie** : L'analyse des réseaux hydrographiques comparée aux zones sujettes d'instabilités de terrain, a permis de mettre en évidence le rôle déclencheur du torrents, du ruissellement, du drainage, des circulations d'eau souterraine et de la perméabilité du terrain.
- **Le contexte climatique** : L'analyse des données des stations climatiques de certaines régions du nord du Maroc (comme celles de Chefchaouen), a permis de montrer une grande relation entre la fréquence des instabilités de terrain et la répartition des précipitations annuelles et la pluviométrie annuelle totale [6][7].

3.2 FACTEURS PRÉPARATOIRES ET DÉCLENCHANT

- L'infiltration d'eau dans un terrain peut conduire un massif à se liquéfier. L'augmentation du poids du sol augmente les forces déstabilisantes. L'eau rend les terrains plus lourds, ce qui favorise les ruptures et entraîne un glissement de terrain.
- L'alternance de périodes de sécheresse (phases très chaudes) et de périodes d'humidité (phase de fortes précipitations).

- Les mouvements sismiques/vibrations dues à un séisme ou à des activités humaines. Le poids des moyens mécanique de transport augmente le poids du terrain, cela peut suffire pour que le seuil de stabilité soit franchi et que le terrain se mette en mouvement.

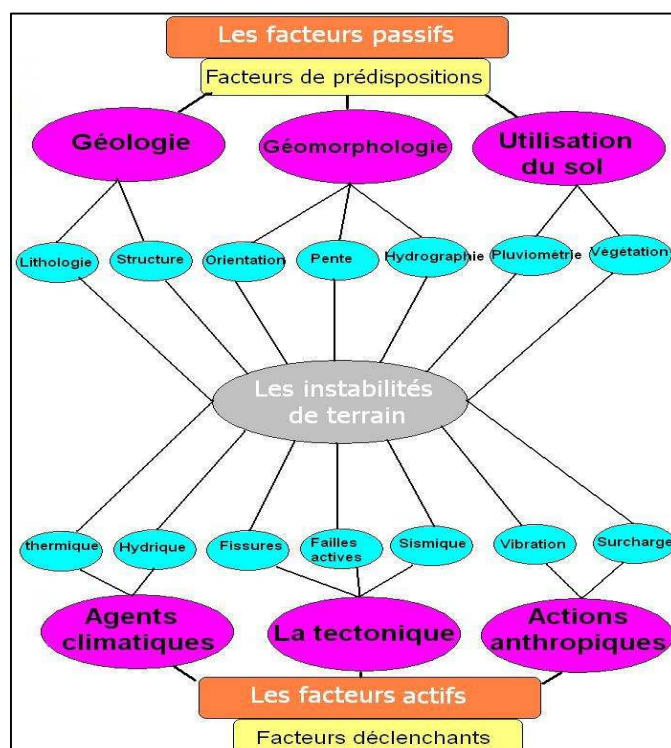


Fig. 2. Récapitulation des causes des instabilités de terrain

4 GESTION DES INSTABILITES DE TERRAIN

4.1 CARTOGRAPHIE DU RISQUE

S'agissant de la gestion des risques liés aux instabilités de terrain, nous recommandons la cartographie des risques (figure 3). Elle s'appuie sur l'observation de phénomènes et sur l'analyse des facteurs qui en sont les justificatifs [8] [9]. Il s'agit d'une banque de données très utile. Cette carte permet un approfondissement de la connaissance et de la localisation du site instable.

En effet, l'identification des modalités d'un événement plus ou moins catastrophique qui s'est produit dans le passé et l'identification de sa fréquence dans le temps historique, peuvent permettre d'évaluer l'éventualité de sa reproduction dans le futur [10][11].

OBJECTIF DE LA CARTOGRAPHIE

Les instabilités de terrain sont de plus en plus destructrices du réseau routier, des maisons et de nombreuses infrastructures. Les régions rifaines viennent en tête des zones les plus touchées [3]. En effet, des maisons et des tronçons de la route sont réalisés dans des zones à très fort risque d'instabilité. Donc il est nécessaire la production d'une carte synthétique dite "carte des risques". Ce document est le point d'aboutissement d'une étude des différentes instabilités et des facteurs qui les justifient.

De plus, les moyens d'information du public sur les problèmes géologiques liés aux instabilités de terrain sont nombreux. Cependant celui-ci est mal préparé à recevoir des informations qui sont techniques et scientifiques. C'est pourquoi, la présentation cartographique et l'approche géologique sous forme d'une carte de zonage des risques d'instabilités de terrain, semble constituer un moyen de visualisation pratique.

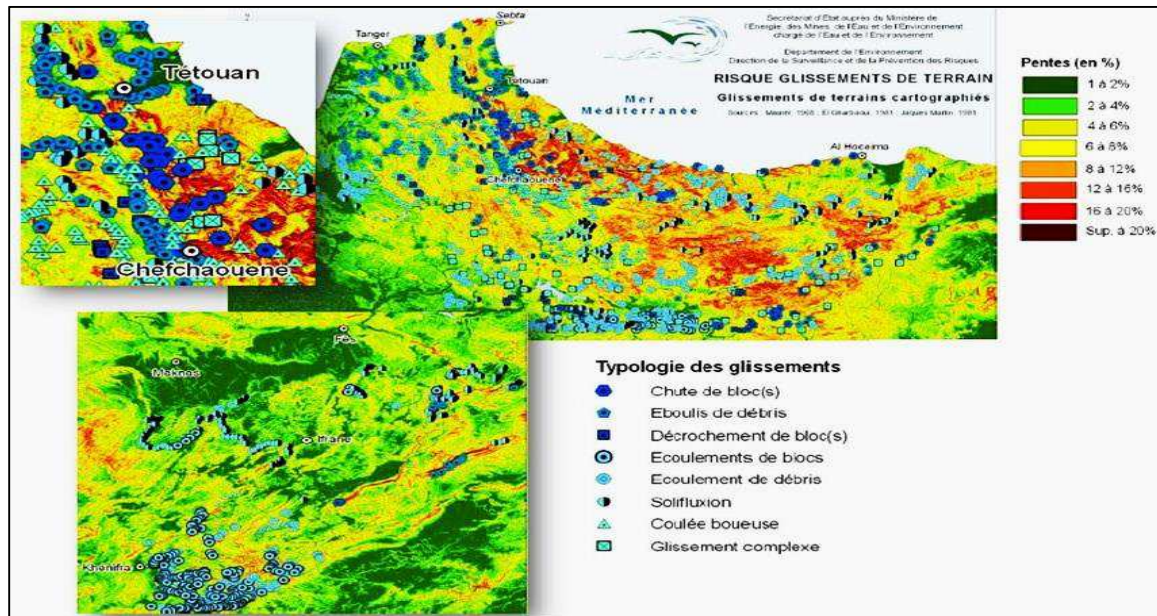


Fig. 3. Mouvements de masse au Nord du Maroc, d'après Messouli [8]

LECTURE DE LA CARTE DU RISQUE

La carte de zonage du risque se veut une réponse à la préoccupation majeure des intéressés, qu'ils soient responsables administratifs, aménageurs ou responsables des Travaux Publics qui doivent prévoir le budget d'intervention ou d'entretien [1][7]. Cette carte exprime la probabilité d'apparition spatiale des zones à risques.

C'est donc conscient de l'importance prise aujourd'hui par cet axe de recherche que nous avons réalisé une carte dans la région de Chefchaouen (figure 4) qui exprime la probabilité d'apparition spatiale des zones à risques et à partir de laquelle nous avons pu délimiter les aires suivantes :

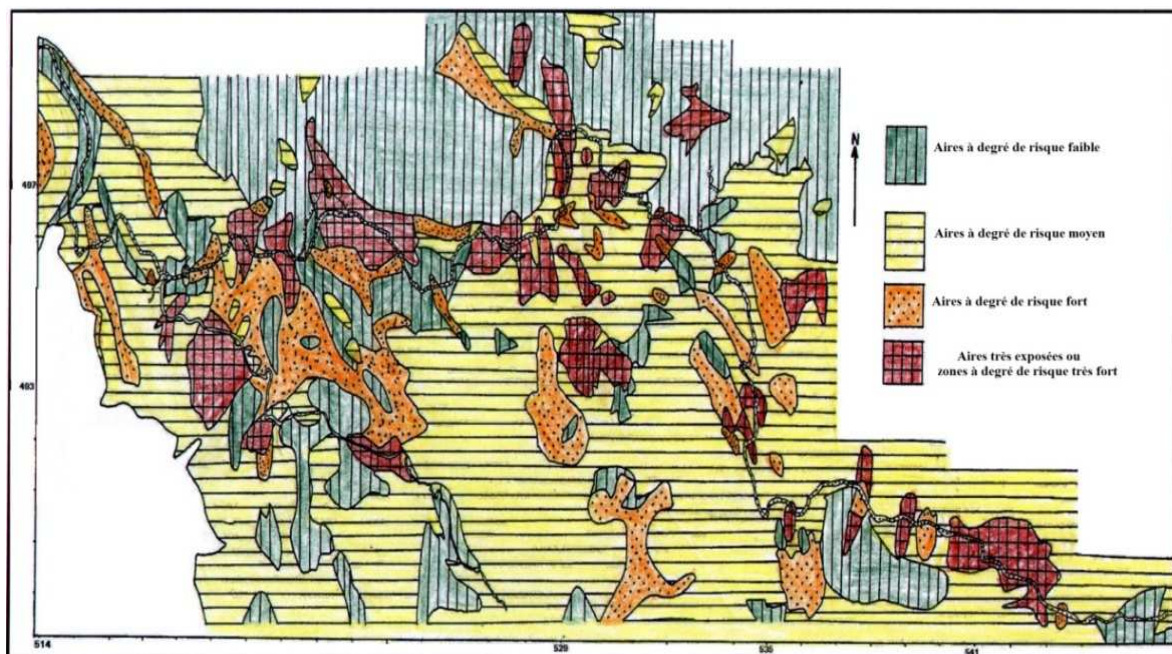


Fig. 4. Extrait de la carte des degrés du risqué dans la région de Chefchaouen [6][7]

- **Aires très exposées ou zones à degré de risque très fort :**

Ce sont des zones où la probabilité de risque est comprise entre 50 et 100%. Ces secteurs présentent des manifestations d'instabilités très actives. Ils doivent être classés non aménageables.

- **Aires à degré de risque fort :**

La probabilité d'apparition spatiale du risque est comprise entre 30 et 50% inclus. Ces secteurs ont une activité d'instabilités de terrain élevée. Ils doivent retenir particulièrement l'attention des décideurs et responsables car ces aires ont déjà été affectées par des mouvements de terrain et les risques d'une réactivation y ont une forte probabilité, surtout, lors d'une conjoncture météorologique agressive.

- **Aires à degré de risque moyen:**

La probabilité du risque est comprise entre 10 et 30% inclus. Dans cette catégorie, on rencontre tous les processus mineurs et tous les phénomènes à évolution lente. Dans la majorité de ces aires, bien qu'elles ne présentent pas en l'état actuel d'indice d'instabilité, on ne peut exclure qu'en cas de précipitations violentes, elles redeviennent très préoccupantes.

- **Aires à degré de risque faible :**

Ce sont des zones où la probabilité d'apparition du risque est comprise entre 1 et 10% inclus. Elles ne sont pas exposées, actuellement, à des manifestations ou à des conséquences d'instabilités de terrain.

4.2 DRAINAGE

Le principale responsable de tous les phénomènes rencontrés, dans les différents endroits étudiés où il y a instabilité, est l'eau. Elle est le principal facteur de destruction et de dégradation des ouvrages de génie civil [4][5][6][7] [8][12][13].

Son évacuation est donc une nécessité vitale pour que la zone reste stable et que les infrastructures gardent un niveau de service satisfaisant. Le drainage apparaît, par suite, comme le premier des remèdes proposé pour traiter les zones de glissements de terrain. Il peut concerner les eaux de surface afin de les éliminer loin de l'ouvrage : c'est le drainage superficiel dit d'assainissement ; ou encore, il s'agit d'extraire l'eau contenue dans la masse des sols : c'est le drainage profond ou le drainage interne.

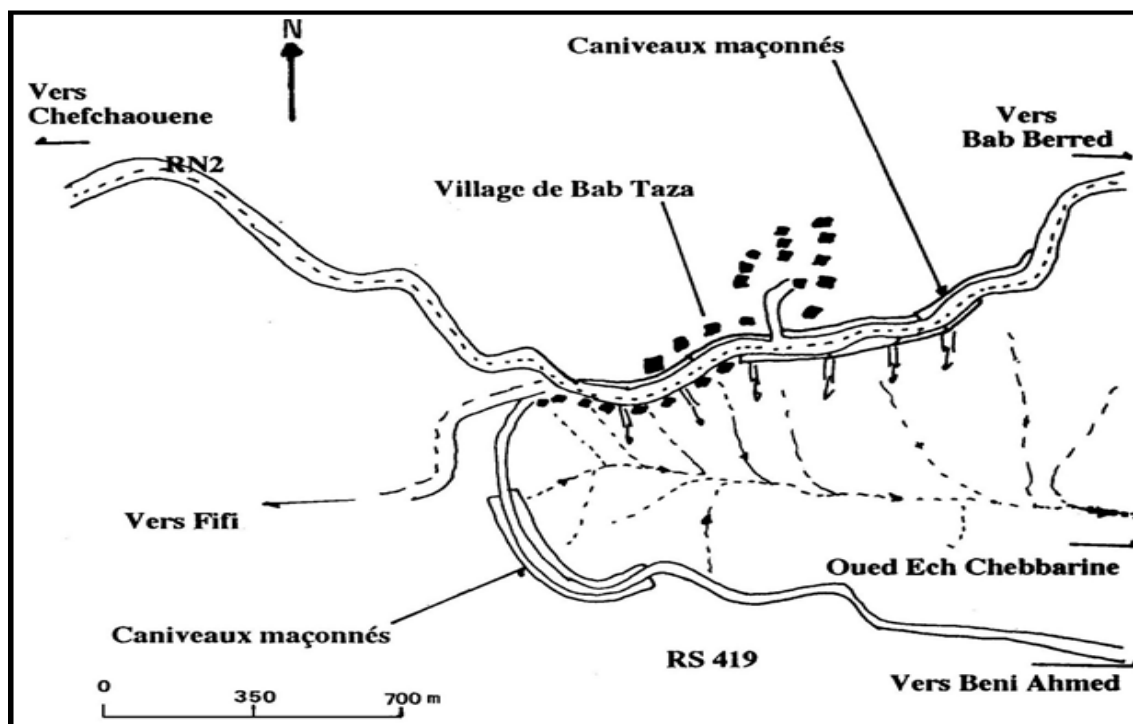


Fig. 5. Aménagements des systèmes de drainage proposés aux environs du village de Bab Taza (Rif)

Il est important de signaler que ces systèmes d'évacuation d'eau ne remplissent leur rôle que s'ils sont dimensionnés en fonction de la pluviométrie et de l'importance du bassin versant de la zone où ils sont implantés. Les ouvrages d'art se colmatent et s'obstruent facilement. Un entretien des ouvrages d'art existant doit donc être effectué périodiquement.

4.3 ELÉMENTS RÉSISTANTS

Les techniques utilisant les éléments résistants, ne s'attaquent pas qu'à la cause des mouvements de terrain mais visent aussi à réduire ou à arrêter les déformations. On peut pour ce faire, introduire des éléments résistants à titre préventif, de façon à éviter les déplacements de terrain. Une des conséquences est la diminution de la résistance au cisaillement des sols.

OUVRAGES DE SOUTÈNEMENT

Ils sont destinés à reporter la poussée du massif instable sur une assise parfaitement stable et résistante. Parfois la solution des ouvrages de soutènement est la mieux adaptée à la stabilisation des glissements de terrain, à condition de rechercher une assise saine.

- Gabions : Ce sont les plus utilisés au Maroc et entrent dans les ouvrages de soutènement. Ils se rencontrent dans les talus de déblais et dans l'aménagement de descente d'eau en cascade où ils jouent un double rôle, celui du drainage et celui du soutènement (figure 6).



Fig. 6. Les gabions jouent un double rôle: drainage et soutènement

- Terre armée : C'est un matériau formé par l'association de terre et d'armatures, ces dernières étant des éléments linéaires, le plus souvent des bandes en acier ou synthétiques à haute adhérence, susceptibles de supporter des efforts de traction importants (figure 7).

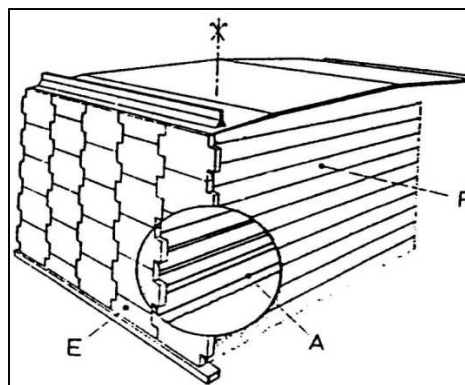


Fig. 7. Mur enterre armée (A : armature, E : écaille, R : remblai)

Cette technique en Terre armée crée une structure de soutènement gravitaire durable est très recommander. En effet, elle pet s'adapter à un large éventail d'environnements et elle est capable de supporter d'importantes charges de poids propre et de service, imposées par les structures associées, véhicules, train ou autres équipements.

- Ouvrages rigides : La plupart de ces dispositifs sont des murs de poids en béton, armé ou non. Ils ne sont pas les mieux adaptés à la stabilisation des glissements de terrain, du fait de leur incompatibilité avec toute déformation, en outre, le dimensionnement doit prendre en compte les efforts très importants engendrés par le glissement (figure 8).



Fig. 8. Type d'ouvrage rigide pour le soutènement des talus routiers

TIRANTS D'ANCRAGES

Le principe consiste à réduire les forces actives du glissement et à accroître les contraintes normales effectives sur la surface de rupture. Pour ce faire, on ancre des tirants constitués de câbles d'acier dans le terrain stable situé sous la surface de rupture et on applique en tête un effort de traction. La gestion des risques d'instabilité de terrain par tirants d'ancrages a été réalisée dans des études séparées. Cette technique demande des modèles (physiques et mathématiques). Elle contribue à l'augmentation des performances des caractéristiques géotechniques des versants.

FILETS MÉTALLIQUES EN CÂBLES D'ACIER

La figure 9 montre un exemple des filets métalliques en câbles d'acier. Ils constituent des ouvrages de protection sous forme d'écrans déformables implantés sur la pente permettant d'intercepter et de stopper les blocs éboulés par dissipation de l'énergie cinétique [5].



Fig. 9. Les filets métalliques en câbles d'acier sur les talus routiers

RENFORCEMENT PAR INCLUSIONS

C'est la technique du clouage des pentes instables. On a deux catégories d'inclusions :

- Clous et micro pieux : Ils sont constitués d'une armature de faible inertie et d'un coulis d'injection, placés obliquement ou verticalement ;

- Pieux et barrettes : Ce sont des éléments de grande rigidité, mis en place verticalement.
- Le clouage des glissements par des pieux ou des barrettes ont tous les deux un rôle de stabilisateurs de terrain (figure 10). Le clouage est un mécanisme d'accrochage des parties instables sur la partie stable du sol.

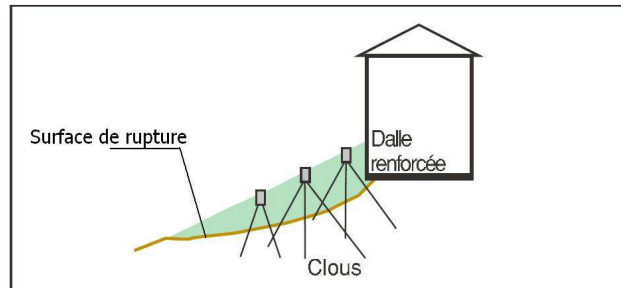


Fig. 10. Exemple de clouage d'un glissement de terrain

4.4 REMODELAGE DU PROFIL INSTABLE

Cette technique, appelée aussi terrassement, a pour but d'améliorer les conditions d'équilibre par déchargement des masses poussantes au profit des masses butantes (figure 11). On peut distinguer trois groupes de méthodes de stabilisation par terrassement:

- Les actions sur l'équilibre des masses : allègement en tête et remblai en pied ;
- Les actions sur la géométrie de la pente : purge et reprofilage ;
- Les substitutions partielles ou totales de la masse instable.



Fig. 11. Exemple de remodelage du profil instable des talus routiers

4.5 SURVEILLANCE

La surveillance des talus instables consiste à suivre dans le temps l'évolution des mouvements qui les affectent. Elle présente l'avantage de renseigner sur le développement du mouvement, notamment son accélération et surtout de prévenir la rupture suffisamment à l'avance. Ceci permet de prendre, au moment opportun, les mesures qui s'imposent pour éviter tout dommage éventuel et d'avoir la possibilité d'intervenir avant l'apparition de la rupture. Plusieurs appareils et méthodes peuvent être utilisés actuellement pour le suivi de l'évolution des glissements de terrain.

Les différentes approches de gestion des instabilités de terrain (cartographie des risques et les solutions techniques envisagées pour assurer la stabilité des sites) sont intimement liées à l'extrême diversité et variabilité des formations géologiques. De plus, il est à signaler que des études géotechniques de conception sont très recommandées pour chaque solution proposées. En effet, chaque zone a ses propres propriétés géotechniques.

5 RECOMMANDATIONS

Au Maroc, Plusieurs infrastructures (tronçons de routes, agglomérations, projets...) empruntent des zones d'instabilités de terrain très variable [5]. Ces zones comprennent des phénomènes qui peuvent, certes, exclure l'occupation "raisonnable" du sol ; à savoir, la construction du réseau routier, l'installation des populations et de leurs biens, etc. Mais puisque ces zones sont habitées depuis longtemps et le resteront sans doute à l'avenir, l'élaboration d'un guide des méthodes de confortement de ces zones instables devient une nécessité.

A partir de l'étude géologique ainsi que de l'établissement d'un inventaire des instabilités de terrain, nous proposons certaines solutions :

Le ripage de l'axe de la route, les maisons ou les ouvrages d'art en dehors des zones en mouvement, dans les secteurs reconnus comme stables, lorsque cela est possible. Par exemple reconstruire la route sur le versant opposé stable de la vallée. Parfois, le coût de la réalisation du projet, vu le relief accidenté des zones, est énorme.

Les travaux de confortement menant à s'opposer aux mouvements et aux glissements sans les empêcher et cela en créant des moyens de résistance et de protection convenables. Les actions visant à stabiliser le versant en améliorant la planéité des surfaces de ruissellement, ou en renforçant le terrain par des plantations, etc. Ces deux dernières solutions doivent être pratiquées par l'emploi de diverses techniques que nous avons proposées.

Aussi, il faut assurer le nettoyage périodique et l'entretien des réseaux de drainage des eaux superficielles, des barrages filtrants et des bassins de sédimentation, notamment après de fortes précipitations. La périodicité de nettoyage des bassins dépendra de leur dimension, de l'érodabilité des sols ainsi que du régime des pluies.

Dans le réseau routier marocain, les tranchées drainantes sont très recommandées, car elles sont moins coûteuses. Elles sont réalisées dans des matériaux drainants (galets de l'oued) et enveloppées dans du géotextile afin d'éviter le problème de colmatage et assurer leur pérennité.

Le reboisement des talus est un autre point essentiel à préconiser. Mais il faut surtout tenir compte de l'adaptation des espèces choisies au climat et aux fonctions recherchées (stabilité des terrains) et veiller à leur mode de plantation.

Notre étude s'est préoccupée des terrains instables qui présentent des dangers évidents, et encore et surtout de ceux qui font courir un risque à la sécurité des individus et de leurs biens. Il apparaît à ce propos que la sensibilisation du public est une étape importante pour que les riverains des talus instables et la population locale prennent connaissance des dangers auxquels ils sont exposés et prennent conscience de ce qui doit être ou ne pas être fait pour éviter ce qui est évitable et se préparer, efficacement aux phénomènes inévitables, générateurs de catastrophes. L'information du public a retenu notre attention, car il nous a été permis de constater que des buses ont été colmatées par certains individus et que certains incendies ont été provoqués involontairement par des exploitants agricoles.

On constate tout d'abord que, dans certaines zones, même s'ils existent des moyens de confortement, ces derniers sont mal entretenus, mal adaptés que leurs fondations ne sont pas aussi profondes. C'est pour cette raison que certains murs de soutènements se fissurent, des gabions se détruisent et que les systèmes de drainage se dégradent ou sont colmatés. D'autres zones manquent de moyen de confortement adéquat, ce qui cause sa déstabilisation. Comme exemple, des routes se transforment régulièrement en piste ou en voie de circulations à demi-chaussée.

Dans d'autres secteurs, en revanche, il semble judicieux de prévoir des moyens de confortement qui ne nécessitent pas beaucoup d'investissement, comme la pose de grillages. Ces techniques s'avérant très efficaces contre les éboulements rocheux. Certains talus qui sont affectés par les dégâts soumis à l'action de l'eau peuvent être traités soit par le chargement du pied aval avec un remblai très perméable, soit par le drainage, à l'intérieur même du talus. Ces interventions mettent en œuvre des tranchées drainantes ou des galeries drainantes.

Ceci étant, même si le degré de risque est moyen ou faible sur certaines sections, la morphologie actuelle témoigne de la probabilité de glissements, surtout lorsqu'une intense activité pluviométrique se manifeste. Il convient donc de les surveiller, de les traiter et de mettre les mesures nécessaires pour éviter tout dommage éventuel.

Enfin, le contrôle des terrains et l'entretien des ouvrages réalisés, surtout les réseaux de drainage et les grillages, doivent devenir la règle. Ils sont indispensables à une meilleure lutte contre les instabilités de terrain.

Ces recommandations sont nécessaires à l'aménageur et les décideurs de projets de la zone d'étude. Elles sont également valables pour tous le Maroc. Ils vont permettre à tous les intervenants une bonne gestion de la nature, leur éviter le gaspillage et des interventions inadaptées et coûteuses.

6 CONCLUSION

Certaines régions du Maroc manifestent de fortes instabilités de terrain qui affectent gravement et durablement les infrastructures, les individus et leurs activités. Ces instabilités de terrain sont des phénomènes aux formes multiples. Elles représentent une évolution normale de versant, quoique d'apparence spectaculaire. Elles sont sporadiques et induisent une périodicité dans le transport solide. La gestion du risque de ces instabilités de terrain, c'est prévoir la possibilité de leur déclenchement et de leur fréquence dans l'espace et dans le temps. Il en résulte que la prévision du risque nécessite une cartographie des zones à risque.

Donc pour établir un diagnostic sur la stabilité d'un terrain ou sur les amplitudes des mouvements, il est nécessaire de dégager toutes les données qualitatives et quantitatives susceptibles d'entrer en jeu.

L'établissement d'une carte interprétative ou la carte du risque permettra de mieux distinguer les zones vulnérables des zones stables et constitue la base d'une prévention efficace, puisque prévenir c'est d'abord localiser le risque.

Enfin, le contrôle des terrains et l'entretien des ouvrages réalisés, surtout les réseaux de drainage et les grillages, doivent devenir la règle. Ils sont indispensables à une meilleure lutte contre les instabilités de terrain. De même, l'extension des surfaces urbanisables doivent dorénavant faire l'objet d'une plus grande attention. Il est primordial que la réglementation actuelle en matière de permis de construire tienne compte des phénomènes d'instabilités et des phénomènes géodynamiques qui résultent de la surcharge des zones instables.

Nous suggérons aussi l'encouragement, autant que possible, à la reconquête végétale, ce qui, à terme aurait pour effet de limiter les effets du ruissellement et de fixer les talus.

Ce travail s'inscrit donc dans une problématique plus vaste qui est loin d'être épuisée. Nous espérons toutefois, que les exemples retenus permettront de mieux cerner les risques encourus par les hommes et leurs biens et, en conséquence, de lutter plus efficacement contre eux. Nous souhaitons enfin que les méthodes de prévention mises au point soient fructueuses.

Ceci d'une part, d'autre part, l'existence de telles informations scientifiques aidera les professionnels et les centres de décisions à mieux raisonner leurs interventions sur le terrain particulièrement dans les zones isolées et dépourvues de moyens scientifiques et techniques appropriés.

Les connaissances scientifiques sur les instabilités de terrain sont nécessaires et utiles. Elles permettent de cerner les facteurs responsables, de réaliser des cartes des zones à risque et de préconiser les principales solutions et moyens de confortement. Elles ont permis de modifier de nombreux tracés de routes et de voies ferrées. Elles ont aussi permis de changer des sites de construction, et de proposer des zones plus stables.

RÉFÉRENCES

- [1] Charte Nationale d'Aménagement du Territoire et du Développement Durable, Royaume du Maroc, ministère de l'aménagement du territoire, de l'urbanisme, de l'habitat et de l'environnement, aménagement du territoire et urbanisme, secrétariat général direction de l'aménagement du territoire.2015.
- [2] A. Gartet, & J. Gartet, Gestion et prévention des risques des chutes de blocs et des éboulements rocheux à Sidi Harazem (région de Fès), Revue AFN Maroc, N° 4-5, pp 70-81.2009.
- [3] INGÉROP, NOVEC, ACTERRA, Adaptation des routes au risque et au changement climatique au Maroc, Banque mondiale et direction des routes, Guide simplifié, 99279 v2, Maroc.2015.
- [4] A. Yazidi, & F. Benziane, Géologie du Rif - Relation avec les mouvements de terrain. Séminaire : Glissements de terrain : Cas du Nord marocain. Casablanca, Maroc.1995.
- [5] M. Yazidi, (2000). Examen géologique de l'éboulement de la falaise du port de M'Diq (étude de stabilité). Rapport LPEE, Dossier N° : 2000 / 08 / 1 / 097. 20p. et 18p. Annexe.
- [6] M. Yazidi, Etude et cartographie de zones d'instabilités de terrain le long de la route nationale 2 entre Bab Taza et Bab Berred. Thèse Doc. National ; Uni. Ibn Tofail.2002.
- [7] A. Yazidi, F. Benziane & M. Yazidi, Note relative à l'étude sur la stabilité des versants le long de la rocade méditerranéenne : Zonalité des zones à risques. École Nationale Supérieure des Mines de Rabat ou Mines Rabat.2010.
- [8] M. Messouli, Anticipation et gestion des risques d'événements climatiques extrêmes ; Etat des lieux sur des risques climatiques extrêmes et leurs impacts sur l'économie marocaine. Programme d'étude : Changement climatique, impact sur le Maroc et option d'adaptation globale. Ires (Institut Royal des Etudes Stratégique).2013.

- [9] A. Ezzardi, J. Darif, A. Essami, La gestion cartographique de la dynamique des versants dans la zone de Beni Derkoul (Chefchaouen, Maroc). 21ème Rencontre des Géomorphologues Marocains, Milieux naturels atlantiques, géomorphologie et développement durable.2015.
- [10] J.P. Mougin, Les mouvements de terrain. Recherche sur les apports mutuels des études géologiques et mécaniques à l'estimation de la stabilité des pentes. Thèse, Univ. Grenoble, 295p.1973.
- [11] J.C. Flageollet, Les mouvements de terrain et leurs préventions. Collection géographie. Masson, Ed, 224p.1989.
- [12] B. Ledoux, Les catastrophes naturelles en France. Ed. Payot et Rivages, Document Payot; 455p. 1995.
- [13] A. Lemsioui, La prévention et la gestion des risques au Maroc, Guides et documents, Le Ministère de l'Energie, des Mines, de l'Eau et de l'Environnement, Royaume du Maroc.2012.

Problématique de collecte et de gestion des déchets dans la ville de Kananga : Impact sur la sécurité environnementale / KASAI CENTRAL - RDC

Dubois MUTUPEKE LIBWA¹, Jean Calvin TSHIBUABUA SHAMBA¹, Gaston KABUAMBA MILEMBU², Jacques ISSONGO MFUTU³, Jean Claude PANI USANDILI⁴, and NKONGOLO KATOLO⁵

¹Université de Kananga (UNIKAN), Faculté des Sciences Agronomiques, Kananga, Kasai Central, RD Congo

²Institut Supérieur des Techniques Médicales de Kananga (ISTM / Kga), sections Gestion des intuitions de santé et sciences Infirmières, Kananga, Kasai Central, RD Congo

³Médecin physique et réadaptation, chercheur indépendant, RD Congo

⁴Université de Kananga (UNIKAN), Faculté des Sciences Agronomiques et vétérinaires, Kananga, Kasai Central, RD Congo

⁵Université de Kananga (UNIKAN), Faculté des Sciences Agronomiques, Kananga, Kasai Central, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The problem related to collective and management of waste in Kananga town is a concern of the moment, especially as the environmental security is one of seventeen objectives of the lasting development on the horizon 2030. Nowadays, waste (craps) is an indicator of the human existence which degrades the environment if some precautions are not taken. More than 600000 tons of wastes are wildly evacuated, and the way they are managed constitutes a danger affecting our ecosystem.

This publication aims at informing, alerting and making the scientific world in general and the population of Kasai in particular aware of their responsibilities in terms of precautions to be taken in order to manage waste which faces the climatic change and damage the environment of Kananga town. This approach aims at awakening the population to adopt the code of environment so as to promote good conditions of life on the earth.

Thus, we propose the government to create a special and well-equipped service in charge of collecting, evacuating and destroying waste. Burying is the only method used to destroy dirt and rubbishes in Kananga.

Therefore, considering waste as a matter and managing it safely may reduce possible damage it will cause on the environment. In Kananga town, however, there exists a center in charge of treating waste located at TUBULUKU, unfortunately in remains non-operational.

KEYWORDS: waste, environment, Kananga, ecosystem.

RESUME: Le problème de collecte et de gestion des déchets dans la ville de Kananga est une préoccupation de l'heure d'autant plus que la sécurité environnementale est l'un des 17 objectifs de développement durable à l'horizon 2030. Aujourd'hui, le déchet est un indicateur de l'existence humaine qui dégrade l'environnement si les mesures de protection ne sont pas réunies. Plus de 600000 tonnes de déchets sont évacuées sauvagement, et la manière de les gérer constitue un danger affectant notre écosystème.

L'objectif de cette communication est d'informer, de sensibiliser et de responsabiliser les masses populaires du Kasai en particulier et le monde scientifique en général sur les mesures à prendre dans la gestion des déchets face au changement climatique et à la dégradation de l'environnement de la ville de Kananga pour l'assainissement de la ville et la sauvegarde de la biodiversité. Cette démarche vise à l'éveil de conscience sur l'éthique au regard de la protection de l'environnement qui se propose d'amener la population à souscrire à un code de bonne conduite et de changement de comportement vis-à-vis de

l'environnement pour rendre tant soit peu la vie vivable sur la planète terre. Donc, il faut que les gouvernants affectent un service à la collecte, au transport, à la destruction et à l'élimination des déchets ainsi que rendre disponible l'équipement de protection requis ; séparer les déchets par types depuis le lieu de production jusqu'à la destruction et l'élimination finale. L'enfouissement est la seule méthode de destruction des ordures à Kananga. Toutefois, la valorisation des déchets est un outil prépondérant dans la gestion des déchets, car elle permet de diminuer les quantités à traiter dans le prix à payer ; mais à Kananga un centre de traitement des ordures à 12 Km de la ville (localité TUBULUKU) sur projet de la mairie est inopérant, d'où l'insécurité environnementale dans la ville.

MOTS-CLEFS: déchets, environnementale, écosystème, Kananga.

1 INTRODUCTION

L'environnement recouvre des nombreuses acceptations. A l'origine, il s'agissait d'un anglicisme signifiant le milieu dans lequel un être vivant fonctionne incluant l'air, l'eau, le sol, les ressources naturelles, la flore, la faune et les êtres humains. L'environnement est aussi l'ensemble des facteurs physiques, chimiques, biologiques et socioculturels susceptibles d'interagir positivement ou négativement avec les êtres humains et leurs activités¹.

Le plan national d'actions environnementales de Paris (1997), propose que les problèmes de l'environnement des villes congolaises soient essentiellement dominés par le manque d'assainissement du milieu. Il en est de même des villes africaines pour lesquelles TIDIANEDIKITE considèrent comme étant les plus sales du monde².

La conférence des nations unies sur l'environnement et le développement tenue à Rio de Janeiro de juin 1992 avait réuni les représentants de 172 pays parties prenantes au Brésil³. Les principaux sujets abordés étaient les suivants : changement climatique, biodiversité et protection de l'environnement et adoptés à l'unanimité au regard des conséquences écologiques, économiques et politiques qui furent.

La ville de Kananga est caractérisée par les conditions précaires d'hygiène du milieu qui prévalent dans toutes les communes de la ville, entraînant des conséquences directes sur la mortalité et la morbidité des populations. Le rapport de l'UNICEF (1991), rapportant les maladies liées à l'insuffisance d'assainissement du milieu tant urbain que rural montre que 74% dans l'ensemble sont dues au manque d'hygiène et assainissement du milieu. La santé humaine est de plus en plus mise en danger et ne préoccupe pas les décideurs politiques. L'on peut citer entre autres les maladies diarrhéiques, parasitaires, infectieuses et des voies respiratoires ainsi que d'autres maladies épidémiques qui refont surface dans cette contrée administrative à savoir, fièvres typhoïdes ; paludisme; parasitoses intestinales...ainsi que le cholera qui sévit habituellement dans les villes de l'Est du pays(Uvira, Kalemie et Baraka), au Nord Katanga et la ville Province de Kinshasa.

Quant aux verminoses intestinales, elles constituent un indicateur de la pollution fécale de l'environnement. Les résultats des enquêtes effectuées par VANHUS (1966) et GOTTIT et al (1969) montrent que 95%d'écoliers congolais fréquentant les écoles périurbaines de Kinshasa étaient infectés par des nématodes intestinaux et Ascaris lombricoïdes, Ankylostomes sp, Strongloïdesstercolis et Trichuristrichura⁴.

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LA GESTION DES DÉCHETS

De nos jours, l'utilisation intensive et abusive des ressources et le rejet des déchets dans l'environnement contribuent à la détérioration du milieu. L'état d'insalubrité de la ville de Kananga s'explique par la mauvaise gestion des déchets d'origine diverse telle que :

¹ Anonyme, *communication sur la gouvernance minière, pétrolier, forestière et foncière* ; CARF, Lubumbashi, RDC, octobre 2013

² TIDIANE DIKITE : *L'Afrique malade d'elle même*, kauthula, Paris 1986, p36

³ www.wikipedia.fr, 2016, *changement climatique consulte*, le26 mars 2016 à10h30

⁴ KAYEMBE N.,*la dégradation d'un écosystème en milieu urbain cas de la ville de Kananga*, in *Annales, ISP Kananga*, vol 3 N° 2 Déc. 1986

- **Les déchets solides⁵**

- Les produits vivriers à savoir, les fanes des légumes frais, des céréales fraîches et sèches, les abas des animaux, les sous-produits de la cueillette et de ramassage ;
- Les produits manufacturés notamment, les sachets en polyéthylène, les bouteilles en plastique, les boîtes de conserves, les cartons, les papiers variés, les emballages perdus, les vêtements usés, les chaussures usées ainsi que les ferrailles ;
- Les produits de bureaux et de services administratifs, les déchets médicaux, les fournitures de bureaux usagés.

- **Les déchets liquides**

Les déchets liquides qui sont à la base de la transmission des plusieurs maladies causées par le manque de conditions d'hygiène et qui deviennent des foyers de développement des germes pathogènes pour les infections diverses. C'est le cas des eaux fluviales, industrielles, ménagères, commerciales et fosses septiques.

A Cet effet tout au long de notre étude, nous allons essayer de répondre aux questions relatives à la collecte et la gestion des déchets dans la ville de Kananga et son hinterland :

1. Quels sont les risques que court la population urbaine au regard de l'insalubrité récurrente dans cette entité administrative ;
2. Quelles techniques pouvons-nous préconiser pour la collecte des ordures ménagères dans les artères de la ville de Kananga ;
3. L'absence d'une éducation environnementale contribue-t-elle à l'accentuation de la pollution physique, chimique et biologique ;
4. Qu'allons-nous suggérer à la population urbaine et à l'administration publique quant aux mesures hygiéniques et médico-sanitaires comme pistes de solution à ces aléas.

Pour y parvenir nous nous sommes assignés comme objectif de :

- Identifier les types des déchets et leur mode de gestion;
- Apprécier les techniques de gestion des déchets ;
- Inventorier les dépotoirs publics ;
- Analyser les problèmes d'assainissement des eaux usées dans la ville de Kananga.

- **Les déchets gazeux :**

La politique d'assainissement n'est adoptée par la mairie pour gérer ce type des déchets.

1.2 ETAT DE LIEU

1.2.1 KANANGA : UN DÉPOTOIR À CIEL OUVERT

Ces dernières années, on assiste à une dépréciation incontrôlée des composantes physiques de base dans le milieu de vie, l'eau, l'air, le sol etc.; et leur utilisation anarchique à entraîner l'insalubrité inévitable sur la ville, un peu partout dans les habitations.

Les causes de cette dépréciation sont multiples, cependant, l'exploitation démographique suite au développement industrielle (la population quitte le milieu rural pour s'installer dans le milieu urbain ;alors que le nombre des bouches à nourrir augmente de façon géométrique), la consommation intensive des substances nutritives (aliments), l'ignorance de

⁵ Miescher, 1988, *Identification des types des déchets et des polluants physiques, chimiques, et biologiques (de l'air, de l'eau, et du sol)*

règles d'hygiène et d'assainissement du milieu et de la négligence comme l'absence d'une politique de la culture urbanistique, font la loi sur la ville et d'autres agglomérations importantes de la province du Kasai central.

Ainsi, la source de ces déchets est l'ensemble de toutes les maisons d'habitation et de tous les lieux de travail et de service public. Les ordures sont issues de la consommation journalière et permanente, des services rendus, de production des biens et services et de transformations diverses.

Nous attestons que les ordures sont produites par les voies et selon la nature qui les produit selon la typologie suivante:

1. Les déchets liquides : qui englobent les déchets naturels et humains ; ils sont à la base de la transmission de plusieurs maladies causées par le manque de conditions d'hygiène et deviennent de ce fait le foyer de développement des germes pathogènes, responsables des infections diverses. Il s'agit des eaux fluviales, industrielles, ménagères, commerciales et excrémentielles.
2. Les déchets solides :
 - Les produits vivrières : les fanes de légumes frais, des céréales fraîches et séchées; les abats de produits animaux, les résidus des produits de la cueillette et du ramassage ;
 - Les produits manufacturés notamment, les sachets en polyéthylène et plastique, bouteilles, boîtes de conserves, vêtements usés, ferrailles ;
 - Les produits de bureaux et de service de la bureautique (papiers, cartouches d'imprimante) ; les déchets des hôpitaux.

Pour y parvenir, nous avons effectué des excursions sur terrain afin de faire l'état de lieux de l'insalubrité et de nous rendre compte de l'état de la décomposition des tas d'ordures. Ces dépotoirs sauvages exposés à ciel ouvert et sans considération de la modeste dimension sociale, favorisent la pullulation des germes responsables des maladies diverses. Ils constituent aussi des véritables foyers des mouches, moustiques, bactéries et autres parasites capables d'assurer la propagation des maladies des mains sales à savoir la fièvre typhoïde, etc.

1.2.2 ABSENCE D'UNE ÉDUCATION À L'ENVIRONNEMENT

La santé est le bien être de tous. Elle profite d'un environnement assaini et amélioré. Il est alors important de rechercher les voies et moyens afin de tirer profit d'un environnement favorable en éliminant les ordures pour satisfaire aux besoins fondamentaux que regorge ce dernier, tels que l'air, l'eau, le sol, etc. Ce qui constitue une des premières nécessités de l'homme.

La plupart de la population habitant la ville de Kananga et ses environs n'est pas suffisamment informée sur les notions d'hygiène et d'assainissement du milieu. En plus, la protection de notre environnement permet de lutter contre les nuisances de tout genre qui constituent pour nous une préoccupation majeure à résoudre avant la fin du 21^{ème} siècle. La responsabilité de rendre sain notre environnement est impérieuse pour tout jeune, adulte et vieillard. Cette noble tâche revient à l'éducation permanente de tous pour veiller à la sauvegarde et protection de ce patrimoine. De cette manière, nous estimons qu'avec la collaboration, la conviction de tous, l'identification des sources de la pollution et la détermination de leur conséquence sur les autres constituants du milieu est un atout important afin de mettre en place une thérapie adaptée pour la gestion durable de l'environnement.

1.2.3 MÉTHODES ET TECHNIQUES D'ÉVACUATION DES DÉCHETS

a. Méthodes d'évacuation des déchets liquides et excréta

Dans cette méthode, on utilise les collecteurs souterrains pour évacuer les matières. On distingue pour ce faire ⁶:

- Des latrines à fosses ;

⁶Cours d'assainissement du milieu, université de Kananga, 2015, inédit

- Des latrines avec entrainement par l'eau (fosse septique, puits perdus et latrines à seau ou tirette).

b. Méthodes d'évacuation des déchets solides

Les déchets abandonnés ou jetés en désordres deviennent nuisibles, salissent et favorisent la multiplication des germes pathogènes et deviennent des principales sources de pollution. Il faudrait alors que ces déchets soient collectés, recyclés, incinérés, compostés ou réutilisés d'une manière classique. Les différentes méthodes de traitement des déchets sont : la décharge, l'incinération, le compostage, l'enfouissement et le conditionnement pour les déchets gazeux au degré minimal.

c. Techniques appliquées pour l'assainissement du milieu

Les procédés hygiéniques utilisés comme moyen de traitement des déchets et de lutte contre la propagation des maladies sont les suivants : désinfection, désodorisation (le gaz) et dératisation.

1.2.4 POLITIQUE DE GESTION DES DÉCHETS DANS LA VILLE DE KANANGA

La ville de Kananga un dépotoir à environnement malsain à cause de l'absence d'une politique appropriée de gestion par l'administration publique ainsi que l'absence d'éducation environnementale de la population.

La gestion des déchets biomédicaux dans les formations médicales est inapproprié aux étapes du cycle d'acheminement des déchets depuis le conditionnement, la collecte, le transport, le traitement jusqu'à l'élimination finale.

Les poubelles existent, mais à un nombre insuffisant. Elles ne sont pas couvertes dans 53% des cas, les déchets ne sont triés dans 79% des cas, 85% des déchets tranchants sont jetés dans les poubelles mélangés avec d'autres déchets, ce qui limite leur traitement; les déchets liquides provenant des usages ménagers et des abats ainsi que des structures médicales tels que : le sang, les pus, les liquides mortuaires et industriels sont éliminés dans les drains sans aucun traitement particulier.

Les incinérateurs existants dans les hôpitaux fonctionnant mal et quasi inopérants à cause du manque de courant électrique. Le personnel soignant qui gère les déchets biomédicaux ne pas suffisamment équipé ni formé sur la gestion des déchets de ce secteur.

L'implantation des cimetières constitue aussi une source potentielle de la pollution de l'air, du sol et surtout des nappes d'eau souterraine ; l'absence des enquêtes géologiques préalables avant d'affecter des espaces à vocation environnementale ou récréative pour implanter des cimetières, contribue à l'amplification de cette pollution par manque de la désinfection des cadavres des personnes décédées des suites des maladies infectieuses, la non utilisation des cercueils hermétiquement fermés constituent une source de contamination de l'eau, du sol et des aliments.

L'afflux de la population dans des marchés affecte directement la santé par la production des ordures de toutes catégories qui ne sont pas sélectionnées, collectées et évacuées, par conséquent aménage des conditions favorables à la prolifération des mouches et moustiques qui transmettent des germes pathogènes responsables des maladies diarrhéiques et des mains sales à l'instar de la fièvre typhoïdes ainsi que le paludisme, etc.

L'insuffisance, la fermeture, le non traitement des toilettes publiques, domestiques et de terrasse (Nganda) est une source permanente des infections. Les bouteilles brisés et les verres sont mélangés avec des déchets et jetés de n'importe quelle manière voire même sur les voies publiques.

Le manque des poubelles appropriées pour la collecte des sachets, papiers et autres déchets dans les établissements publics et commerciaux constituent une autre source non négligeable de la pollution environnementale.

L'eau usée qui provenait de la brasserie de la ville de Kananga était évacuée sans contrôle avec comme conséquence la pollution des sols et ses dérivés.

2 MILIEU, MATERIELS ET METHODES

2.1 DESCRIPTION DU MILIEU D'ÉTUDE

Chef lieu de la Province du Kasai Central, Kananga est située au Centre-Sud de la République Démocratique du Congo entre 05°33' de latitude Sud et 22°25' longitude Est et les parallèles 2°15' et 7°59' latitude Sud. Sa superficie est de 154. 741, 8 Km² soit 7 % du territoire national (2. 345. 095 Km²).

La Ville de Kananga jouit de 3 types de climat: le climat de type équatorial (une seule saison de pluie) au Nord ; le climat tropical humide (une saison pluvieuse de 9 mois et une saison sèche de 3 mois) au Centre et le climat tropical sec (une saison pluvieuse de 3 mois et une saison sèche de 4 mois) au Sud.

La grande saison des pluies, de mi-août à mi-janvier, avec un maximum de pluviosité en novembre-décembre ;

La petite saison sèche, de mi-janvier, à peine bien marquée, pendant laquelle on observe un ralentissement important des pluies ;

La petite saison des pluies, de mi-mai, généralement marquée par de fortes précipitations, tandis que la grande saison sèche, de mi-mai à mi-août, est caractérisée par une baisse des températures et la quasi-absence de précipitations provoquant une diminution de niveau des eaux des rivières.

La température moyenne est de 24, 3 ±0, 5°C avec le mois de mai comme mois le plus chaud (25°C). La pluviosité annuelle est de 1. 622 mm⁷.

La Province du Kasai Central comprend, au regard du degré d'altération atteint par la roche mère, les sols sableux du Kalahari, de Salonga et de recouvrement des plateaux qui appartiennent à l'ordre des Kaolisols.

Ces sols se forment dans l'arrière-pays de Kananga. Ils sont entrecoupés de galeries forestières. Ces sols ont une bonne valeur agricole et permettent un cycle des cultures de 4 à 5 années répétées toutes les saisons culturales. De vocation principalement vivrière, ce parmi les meilleurs sols du Kasai Central.

Notons que le relief du Kasai Central est constitué par le prolongement de la cuvette centrale et des plaines dans le Nord (altitude moyenne : 400 m) et de bas et moyens plateaux

L'hydrographie de la Province est abondante et offre d'immenses possibilités de traitement d'eau potable, de la production de l'électricité, de navigation, de pêche et d'irrigation. En effet, l'aire de la ville est ceinturée par les grands cours d'eau des deux bassins fluviaux importants (bassins de la Lulua et du Sankuru) et rares sont les points de Kananga qui se trouveraient à plus de 1000m d'une source ou d'un lit quelconque. Ainsi les limites géographiques coïncident avec les grands cours d'eau comme Mwanzangoma au Nord-Est, Lubi-a-mpata au Sud-Ouest.

Nombreux affluent de rivières traversent la ville ou y prennent leurs sources, jouant divers rôles dans cette agglomération (sources d'approvisionnement en eau, source des denrées de première nécessité, source d'énergie)Il s'agit de :

- Au Sud : Nkombua, affluent de la Nganza, elle-même tributaire de la Lulua ;
- Au Nord : Ndesha, kamilabi, mintuabo, malole, Ngoy'a luba et Mpemba affluent de la Tshibashi qui se déverse dans la Lulua ;
- à l'Est : Lungandu et Mpashi, émissaire de la tshibashi, source d'approvisionnement en eau potable de la ville, (station de soutirage de la Regideso)

Ces rivières et lacs sont généralement poissonneux et certaines flores telles que les algues (*Ledermannia latemissima*, appelées communément *nzaulaen* langue locale) qui y poussent constituent des aliments riches en protéines. Toutes ces potentialités sont insuffisamment exploitées à cause des traditions et coutumes endogènes caractérisées par les deux bassins crainte de se noyer.

Sur des sols sablo-argileux, sablonneux et ferralitiques qui sont par endroit aptes à l'agriculture tropicale, pousse une végétation diversifiée qui est caractérisée du Nord au Sud par :

- La forêt dense et humide (forêt équatoriale), qui couvre le Nord de la Province. Les essences les plus répandues sont les essences à encens et d'intérêts ébénestériques (*Canarium sahweinfur*, *Autranella congolensis*, *Entadrofragma congolensis*, *Albizia gumifera*, *Piptadenia africana* et *Guarea thompsonii*)
- La forêt dense humide semi-décidue (subéquatoriale) qui alterne avec la zone de savane.

⁷ Rapport annuel du service météorologique de Kananga, Exercice 2016

2.2 MATÉRIELS ET MÉTHODES

Pour arriver à cette fin, nous procéderons de la manière suivante :

1. La recherche documentaire : peu d'études se sont penchées sur le mode de traitement des déchets dans la ville de Kananga et son hinterland, ce qui constitue une sincère difficulté à surmonter ;
2. La ronde auprès des services publics à l'instar des services environnementaux, sanitaires ; de la mairie, du marché, des établissements publics note une mauvaise gestion des déchets de toute sorte;
3. La décente sur terrain : Notre étude, de type descriptif, basée sur les observations directe de terrain en vue de se rendre compte de la réalité des faits, faire l'état des lieux des automobiles commises à ce service et l'identification des ressources humaines affectées à cette activité ; l'inventaire des immondices et ordures mises en tas en attente d'évacuation par jour, ainsi que leur mode de gestion et/ou de traitement des déchets dans le centre d'enfouissement.

3 RÉSULTATS

Tableau I. Estimation des quantités des déchets évacués /Jour

Commune	Quantités /en kg	Fréquences
Kananga	600	2
Ndesha	600	2
Katoka	600	2
Lukonka	600	2
Nganza	300	1
TOTAL :	2700	9

Source : lukandila K.J. 2015

Tableau II. Quantités des ordures traitées dans la ville de Kananga

COMMUNE	POIDS	D'ORDURES	TRAITES EN Kg	ORDURES
	Dégradable	%	Non dégradable	%
KANANGA	250	17	350	28,4
KATOKA	320	21,7	280	22,7
NDESHA	300	20,4	300	20,4
LUKONKA	400	27,2	200	16,2
NGANZA	200	16,2	100	8,1
TOTAL :	1470	-	1230	-

SOURCES : lukandila K.J. 2015

4 DISCUSSIONS

Dans le tableau. I, il ressort que les déchets produits sont évacués dans toutes les communes mais la production de ceux-ci est différente selon la population productrice.

A cet effet, les trois premières communes (Kananga, Ndesha, Lukonga) produisent beaucoup d'ordures par rapport à la commune de Nganza.

Ces déchets d'éboués sont ceux récoltés et acheminés dans les dépotoirs or ces derniers sont insignifiants ou insuffisants à ceux non évacué.

Ainsi les automobiles commises à cette fin ne fréquentent que deux tours sans toutes fois évacués la quantité totale produite.

En ce qui concerne les quantités des déchets évacués sur l'ensemble de la ville Kananga, Ndesha, katoka, lukonga ont présenté 600 kg par chacune par contre la commune de Nganza a présenté 300kg.

Il convient de retenir que pour les quatre premières communes on présente 600kg supérieur à 300kg à Nganza parce que la population de cette ville et ses activités commerciales sont concentrées dans celles-ci.

En rapport avec les nombres de fréquences, l'automobile fait deux tours par jour dans chaque commune. Ces tours ou fréquences sont insuffisants car les travailleurs n'arrivent pas à tous vider dans les dépotoirs. Ceci est dû du fait que l'insuffisance de travailleurs et automobiles commis à ce service

Il sied de rappeler que l'évacuation des ordures disponibles à travers les communes de la ville ne se fait pas sans contraintes, elle est butée entre autre :

- L'insuffisance du personnel de ramassage et à son statut : ces sont des agents temporaires et non des agents sous statut ;
- L'insuffisance des véhicules : la Mairie ne dispose plus que deux du reste de petite capacité déjà amorti et qui sont conditionnés dans leurs mouvements, à la disponibilité de la source d'énergie (gasoil) et cette évacuation ne se fait pas chaque jour de la semaine mais est irrégulière 2 à 3 jours par semaines.

Dans le tableau. II, il est à noter qu'après récolte des ordures, elles sont amenées vers le centre de traitements. Dans celui-ci, elles sont triées en deux catégories notamment les déchets qui se décomposent ; dégradable et ceux qui ne se décomposent pas vite ou lentement (non dégradable).

Ainsi pour les déchets dégradables, la commune de Lukonga présente 400kg, soit 27,2% suivi par la commune de Katoka avec 320kg soit 21,7% ; Ndesha avec 300kg, soit 20,4% ; Kananga 250kg, soit 17% est Nganza présente 200kg soit 16,2% de l'ensemble de ces produits. En ce qui concerne les produits non biodégradables ; la commune de Kananga tient en tête avec 280kg soit 19% ; Lukonga 200kg soit 16,2% et Nganza 100kg ; soit 8,1% de l'ensemble de ses produits.

Ce triage des ordures avait comme l'objectif la réutilisation dans les différents domaines entre autres dans l'agriculture (domaine agricoles) et dans la commercialisation telle que les produits d'emballage.

La disparition entre les biodégradables et non biodégradables est fonction des activités dominantes dans une commune à une autre c'est à dire dans les communes où l'agriculture est prioritaire, un grand pourcentage de la population a comme activité l'agriculture, les déchets biodégradables dominent ceux non biodégradables.

Par contre, dans les pays où les activités économiques sont prioritaires, les biodégradables offrent un pourcentage médiocre par rapport aux non biodégradables.

4.1 IMPACT DU TRAITEMENT DES ORDURES SUR L'ENVIRONNEMENT

a. Impact positif sur l'homme

Dans le monde les ordures sont transformées en biens utilisables par l'homme ; tel est le cas du compost pour la fertilité du sol et aussi pour les biens purement économiques.

b. Impact sur l'environnement

• Impact positif sur le milieu

Le traitement des ordures assainit le milieu et le rend beau pour la vie de l'homme. Ainsi certaines maladies sont éliminées ou réduites de par leurs effets néfastes sur l'environnement.

En outre, la fertilisation des sols, la diminution de la puante et écoulement nuisibles sont des atouts obtenus dans le compte final pour l'homme.

• Impact négatif sur le milieu

La chaleur issue de l'incinération détruit la pédofaune et la pédoflore qui contribuent à l'entretien de la fertilité du sol.

Le sol de la région où l'on procède à l'incinération fréquente des ordures des masses des déchets arrive à changer de structure et à devenir infertile immédiatement après cette action.

Le compost est avec aisance pour les cas des déchets biodégradables tels que les familles les plantes qui sont facilement décomposées par les micro-organismes.

Par contre ceux difficilement dégradables par les micro-organismes tels que les sources des bois produits dans les menuiseries peuvent rendre le sol infertile car leur décomposition est lente.

4.2 PROBLÈMES DE POLLUTION ENVIRONNEMENTALE LIES À LA PRODUCTION DES DÉCHETS DANS LA VILLE DE KANANGA

• Pollution atmosphérique

La pollution de l'air sur la ville se fait de différentes manières par l'élimination de déchets qui a pour conséquence la pollution atmosphérique, de l'eau et du sol. L'air que nous respirons est pollué par le travail de l'homme, qui produit des déchets. On utilise la méthode d'incinération qui produit une quantité de fumée, cette dernière provoque la pollution de l'air dans l'atmosphère suite à la présence du CO₂. Celui-ci peut causer des nombreuses maladies respiratoires à l'homme (la pneumonie, la toux, les maladies cardiaques etc) quant au compostage, après l'enfouissement, il faut noter que lors du débouchage de ce trous à ordures par exemple les ordures dégagent les odeurs nauséabondes. L'air pollué diminue l'espérance de vie des hommes, cause de troubles cardiaques, respiratoire récurrents. De plus il favorise des maladies respiratoires comme l'asthme.

Autres causes de pollution de l'air est l'utilisation quotidienne des déchets ménagers, tels que le produit d'entretien, les piles usées, la vaporisation des produits toxiques des nettoyages, déchets liquides. La brûlure des déchets médicaux dans les hôpitaux de la place cause des nombreux problèmes respiratoires et maux d'yeux des différentes formes.

• Pollution de l'eau

La ville de Kananga est construite sur le plateau du Kasaï ; une coupe topographique dégage de colline suivante Kamilabi, Ndesha, Kananga, Kamayi, Nganza et camp Bobozo ; grâce à sa topographie moutonnée, les vallées sont occupées par des sources qui alimentent la ville en eau de consommation, la plupart des déchets sont des déchets /rejets humains et ménagers qui sont jetés dans les rues en vue de lutter contre le ravinement fini par être entraîné pour aller contaminer les sources aménagées en eau potable. On remarque aussi des toilettes qui sont construites au dessus de nappes phréatiques, pendant la saison de pluie subissent des infiltrations et contaminent les nappes phréatiques. Donc, les déchets font partie de rejets humains qui causent la pollution d'eau douce, en conséquence au moins 2% des personnes sont mortes et d'autres souffrent de maladies de fièvre typhoïdes, maladies hydriques et d'autres maladies diarrhéiques. En même temps chaque année plus de 600 000 tonnes des déchets sont rejetés dans les océans et /ou fleuves et rivières. La société Bralima joue un rôle très important dans la pollution du sol et des eaux de sources du quartier camp Mulumba car toutes les eaux usées et les résidus des déchets industriels sont évacués sauvagement vers les vallées et contaminent toujours les puits d'eau et causent de nombreux problèmes environnementaux et de la santé. Comme nous le savons tous, la plus part des décharges se trouvent à l'air libre surtout au niveau du marché et de grands centres où il y a une grande agglomération et trafic, ce qui n'est pas bien car il devient très dangereux pour la vie de la communauté, les déchets biodégradables se mélangent avec l'eau suite à la pression climatique se transformant et deviennent très dangereux, car avec de l'eau une partie s'infiltre pour atteindre les aquifères.

• Pollution de sol

Aujourd'hui les gens se réunissent pour parler des questions de réchauffement climatique oubliant le problème de dégradation de sol qui joue un rôle important dans le maintien de l'équilibre environnemental. La pollution de sol se fait de plusieurs manières dont la plupart d'entre elle est déjà parlée ci-haut dont les méthodes d'enfouissement des déchets notamment dans la commune de Nganza, Lukonka, et Kananga où le sol environnant est déjà affecté par cette méthode entraînant la stérilité du sol et la promotion de la culture maraîchère.

4.3 CAUSE DE LA DÉGRADATION DE L'ENVIRONNEMENT A KANANGA

- Absence d'une politique adéquate en la matière par les gouvernements ;
- L'exode rural ;
- la situation socio-économique précaire de la population ;
- L'absence d'urbanisation dans le quartier populaire (kamayi, camp Mulumba, katoka II, III...) ;
- Manque de conscience individuelle et collective en matière d'assainissement des gestions des déchets ;
- Manque des initiatives à l'égard des autorités locales

4.4 PROPOSITION ET PERSPECTIVE D'AVENIR

Le problème de traitement des déchets soulevé ci-haut pose aujourd'hui de sérieuses inquiétudes, car nous constatons que les déchets augmentent du jour le jour et la manière de le recycler ou de le stocker est inadéquate conformément aux normes environnementales, ce qui constitue un danger permanent pour la vie de population locale, nous devons aujourd'hui commencer à concevoir un mécanisme uniforme pouvant permettre de gérer de façon prompt et rationnelle, selon les procédés environnementaux, les déchets produits par la population en prenant cette dernière comme actrice principale de la protection de son milieu de vie. Donc:

- Mettre en place des mesures pérennantes de sensibilisation de la masse populaire sur la loi portant protection de l'environnement (Civisme, environnemental, système radio phonique, etc).
- Créer des installations modernes d'incinération qui pratiquent moins le décharge comme par exemple l'incinération qui consiste à brûler les déchets dans un grand four à l'aide de mazout ou de gaz, ce processus de filtration permet de dégager la plupart des métaux lourds ou autres polluants. Cette méthode est pratiquée dans plusieurs pays mais ne s'étend pas encore partout car l'installation coûte cher ;
- Créer un outil juridique portant remplacement des emballages non dégradables par ceux dégradables ;
- Créer une brigade d'assainissement qui pourrait faire le suivi de gestion des déchets dans toutes les avenues et ruelles de la ville

5 CONCLUSION

Notre étude portant sur la problématique de la collecte et de gestion des déchets dans la ville de Kananga, impact sur la sécurité environnementale a été menée suivant une méthodologie documentaire en nous servant de la monographie de la province faisant état des lieux, des observations sur la ville et par des descentes sur terrain.

Trois points ont fait la charpente de cette rédaction à savoir les généralités sur la gestion des déchets, la description du milieu, matériel et méthode ainsi que la présentation des résultats et leur discussion. De cette analyse, nous avons noté que :

- L'insuffisance du personnel de ramassage et à son statut : ces sont des agents temporaires et non des agents sous statut ;
- L'insuffisance des véhicules : la Mairie ne dispose que deux du reste de petite capacité déjà amorti et qui sont conditionnés dans leurs mouvements, à la disponibilité de la source d'énergie (gasoil) et cette évacuation ne se fait pas chaque jour de la semaine mais est irrégulière 2 à 3 jours par semaines ;
- Le traitement des déchets à Kananga se fait par enfouissement.

La gestion des déchets dans la ville de Kananga pose des sérieux problèmes et dont les conséquences fâcheuses sont multiples dans la société et affecte dangereusement l'environnement, notre patrimoine vital. Nous constatons qu'à ce point l'augmentation des déchets générés par les ménages nécessite un recyclage afin de réguler les quantités énormes qui constituent un danger pour l'environnement et qui déprécie la qualité de vie de la population.

Des mesures urgentes s'imposent pour éviter aujourd'hui ce qui sera inévitable dans les générations futures si l'on ne prend pas garde. Prévenir vaut mieux que guérir. Ce vieil adage conserve encore sa vérité. Rénchéri cette belle phrase célèbre qui stipule que l'importance n'est pas de guérir la maladie mais de chercher d'abord les causes.

Le problème de salubrité publique est un problème purement d'hommes et non de moyen ni de régime politique dans ce sens que si le gouvernement était animé de bonne foi ; ayant le sens civique ; travaillant dans la transparence ; dans le respect de l'ordre et compétence jamais cette vie d'insalubrité due au manquement de sens patriotique et fraternel ne peut pas être ressentie ni vécue.

Les sondages effectués dans différents centres de santé et hôpitaux prouvent que 80 % des cas des malades tels que fièvres typhoïdes ; paludisme ; parasitoses intestinales... sont dues par les eaux sales.

Nous encourageons la participation de certaines organisations des communications dans la gestion des ordures sur la ville qui ont placé des poubelles sur l'auteur principal de la ville et dans le centre ville de Macar et boulevard Lumumba, quant au reste de la ville chacun gère les ordures ménagères de sa façon, d'autres évacuent sauvagement sur les avenues.

Nous devons mettre en pratique les solutions proposées dans les suggestions et la pure solution ne peut provenir que dans l'éducation de la population ou naître et grandir, être étudiée, s'épanouir et vieillir les futurs dirigeants qui sans une bonne éducation tout ira de ruine en ruine de mal en pis.

REFERENCES

- [1] Anonyme, communications sur la gouvernance minière, pétrolière et foncière, 2013 ;
- [2] André ASCHIERI, 1999, la problématique des risques sanitaires liés à l'environnement ;
- [3] BASTIE, J. DEZERT B, l'espace urbain, Masson, Paris, 1980 ;
- [4] BIANCHI, R., pour une maîtrise de l'environnement urbain, éd. chemiron, Paris, 1974 ;
- [5] BORRELIER, P.H., programme de recherche et de développement sur les déchets, Ademe, 1994 ;
- [6] BOUDEVILLE, J.R., l'espace et les pôles de croissance, PUF., Paris, 1976 ;
- [7] GOARNISSON, J.-BLANC, C. Guide médical africain, St Paul, 1992 ;
- [8] KABUYA KABEYA, H., Education relative à l'environnement ;
- [9] LE ROY, Y.J., les déchets et leur traitement, PUF, PARIS, 1994 ;
- [10] LUKANDILA K.J., étude de problèmes des déchets dans la ville de Kananga, mémoire ISP/ Kananga, 2015
- [11] MOESCHLER, 1988, identification des déchets et de polluants physiques, chimiques, biologiques (de l'air, de l'eau et du sol) ;
- [12] OMS, 2007, prévenir la maladie par un environnement sain ;
- [13] . PICHAT, P., La gestion des déchets, dominos, Flammarion, Paris, 1995 ;
- [14] Sergio oliete Josa, 2002, Assainissement de l'écosystème urbain en zone tropicale humide, le cas de la ville de Yaoundé au Cameroun ;
- [15] TIDIANE DIAKITE : l'Afrique malade d'elle-même, Paris 1986, P₃₆ ;
- [16] www.wikipedia.fr, 2016, changement climatique consulte, le 26 mars 2016 à 10h30

Use of starter cultures of lactic acid bacteria, yeasts, bacilli and moulds in the fermentation of cassava dough for *attieke* (an ivoirien fermented food) preparation

Koffi Maïzan Jean-Paul Bouatenin^{1,2}, N'dede Theodore Djeni¹, Kohi Alfred Kouame¹, Youan Charles Tra Bi¹, Eby Herve Menan², and Koffi Marcellin Dje¹

¹Faculty of Food Sciences and Technology, University of Nangui Abrogoua, Abidjan, Côte d'Ivoire

²Centre de Diagnostic et de Recherche sur le Sida et les Maladies Opportunistes, BP V 3 Abidjan, Côte d'Ivoire

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: Starter cultures of lactic acid bacteria (*Lactobacillus plantarum* and *Leuconostoc mesenteroides*), Bacilli (*Bacillus amyloliquefaciens* and *Bacillus subtilis*), yeasts (*Candida tropicalis*) and moulds (*Rhizopus oryzae*), isolated from traditional cassava ferments used for the preparation of the three main attieke types (*Adjoukrou*, *Alladjan* and *Ebrie*) were tested singly or in combination in cassava fermentation for their contribution to acid production, protein enrichment, detoxification and softening. All tested species and traditional cassava ferments showed an ability to ferment cassava dough by generating significant changes of at least one of the tested parameters. But mixed starter cultures were more efficient than the single cultures developed and their corresponding cassava traditional inocula. The three mixed starter cultures set displayed good acidification (until 7 times more), improved protein content of cassava dough and better softening and rapid and intense elimination of cyanogenic glucosides (more than 50% in only 6 h). Thus, it appears that the controlled mixed starter cultures were showed to have the most interesting technology profiles for any application at small or large scale.

KEYWORDS: Acidifying power, cassava dough fermentation, detoxication, starter cultures, softening.

1 INTRODUCTION

In Cote d'Ivoire, the most popular processing method of cassava (*Manihot esculenta* Crantz), however, especially for varieties high in cyanogenic glucosides, is fermentation. And, the most popular food derived from fermented cassava is *attieke*, a steamed granular cassava meal ready-to-eat, couscous-like product, with slightly sour taste and whitish colour [1]. Cassava fermentation during *attieke* production requires the use of a traditional starter whose preparation method varies according to ethnic groups [2]. This starter, usually prepared by cooking and fermenting whole-peeled cassava roots for 72 h, constitutes the main source of microorganisms active in the dough fermentation. Fermentation relies on the autochthonous microbial populations to start the process. Spontaneous fermentations like back slopping typically result from the competitive activities of a variety of autochthonous and contaminating microorganisms. Those best adapted to the conditions during the fermentation process will eventually dominate. However, initiation of a spontaneous or back slopping process takes a relatively long time, with a high risk for failure. Failure of fermentation processes can result in spoilage and/or the survival of pathogens, thereby creating unexpected health risks in food products [3], [4]. Thus, from both a hygiene and safety point of view, the use of starter cultures is recommended, as it would lead to a rapid acidification of the product and thus inhibit the growth of spoilage and pathogenic bacteria [4], and to a product with consistent quality.

Indeed, according [5] and [6], the use of starter cultures would be an appropriate approach for the control and optimisation of the fermentation process in order to alleviate the problems of variations in organoleptic quality and microbiological stability observed in African indigenous fermented foods, and thus would contribute to reduce processing time [7]. The development of starter cultures is one of the prerequisites for the establishment of small-scale industrial production of fermented foods in Africa [5]. The primary consideration before introducing starter cultures for traditional

small-scale fermentations should be whether these would significantly contribute to an improvement of processing conditions and product quality with respect to: rapid or accelerated acidification, an improved and more predictable fermentation process, desirable sensory attributes, improved safety and reduction of hygienic risks [8]. Therefore, a thorough understanding of the fermentation process is required. The knowledge gained with controlled starter culture may also benefit those operating at a very small scale and practising backslipping.

No starter cultures are commercially available yet for the small-scale processing of traditional African foods [8], and particularly for attieke, despite the notoriety e that the product has won in the last decade throughout the West African region and some european countries. Moreover, many studies have been achieved with principal objectives to contribute to the improvement of the product quality through the control of the fermentation process [9], [10], [11]. Most of these studies reported that lactic acid bacteria, yeasts, bacilli and moulds are the predominant microorganisms found in *attieke* fermentation. Furthermore, in our recent studies, the potentialities of each one of these microorganisms in vitro has been well established and those functionally most effective for cassava fermentation during *attieke* preparation were identified [12], [13], [14]. Therefore, this study aimed to select different species of LAB, yeasts, bacilli and moulds as appropriate starters cultures for the 3 main *attieke* types of Côte d'Ivoire, with respect to their contribution to acidification, detoxication, protein enrichment and dough texture during cassava fermentation in *attieke* preparation.

2 MATERIALS AND METHODS

2.1 CASSAVA ROOTS AND STRAINS USED

2.1.1 CASSAVA ROOTS

Mature cassava roots of IAC variety were obtained from a farm of University Nangui Abrogoua at Abidjan (Ex-University of Abobo-Adjame).

2.1.2 STRAINS USED

strains used in this study were isolated and pre-selected from three different types of ready to use cassava traditional inocula, with regard to ethnical groups (*Ebrie*, *Adjoukrou* and *Alladjan*) which produce them, and taken in small-scale *attieke* production in the three main processing zones (Abidjan, Dabou and Jacqueville) in Côte d'Ivoire (Table 1). These strains were previously characterized and tested in vitro for their technological properties, interesting for fermentation [11], [12], [13], [14].

Table 1. Starters cultures tested in this study. Strains have been preselected with regards to their origin and their enzymatic activities in our previous studies

Origin of starter culture	Codes	Species
<i>Adjoukrou</i>	LABX2	<i>Leuconostoc mesenteroides ssp mesenteroides</i>
	BX5	<i>Bacillus amyloliquefaciens</i>
	LVX14	<i>Candida tropicalis</i>
	MX4	<i>Rhizopus oryzae</i>
	SMX	Mixed culture of LABX2- BX5- LVX14- MX4
<i>Alladjan</i>	LABY9	<i>Lactobacillus plantarum</i>
	BY4	<i>Bacillus amyloliquefaciens</i>
	LVY3	<i>Candida tropicalis</i>
	MY2	<i>Aspergillus oryzae</i>
	SMY	Mixed culture of LABY9- BY4- LVY3- MY2
<i>Ebrie</i>	LABZ46	<i>Lactobacillus plantarum</i>
	BZ15	<i>Bacillus subtilis</i>
	LVZ18	<i>Candida tropicalis</i>
	MZ4	<i>Rhizopus oryzae</i>
	SMZ	Mixed culture of LABZ46 -BZ15 -LVZ18- MZ4

2.2 PREPARATION, INOCULATION AND FERMENTATION OF CASSAVA DOUGH

2.2.1 PREPARATION OF STARTER CULTURES

The cultures of LAB, Bacilli., yeasts and moulds isolated from traditional cassava inocula as described above were used. The cultures had been stored at -80°C in sterile cryotubes containing appropriate broth medium with 20% (v/v) glycerol until needed. LAB were cultivated by streaking on MRS agar (Conda, Spain) and incubated anaerobically at 30°C for 24 h. Bacilli were cultivated by streaking on Plate Count Agar containing 2% of soluble starch and incubated at 30°C for 24 h. Yeasts and moulds were cultivated by streaking on Sabouraud chloramphenicol agar and incubated at 30°C for 72 h. After incubation, a colony was picked from each pure culture plate, grown successively in appropriate broth before centrifugation at 7500 g for 15 min. The pellet was washed in peptone physiological salt solution, centrifuged again, redistributed in peptone physiological salt solution and the diluted to yield an optical density equivalent between 5 and 7 Mac Farland (McF), equivalent to 10^6 cells/mL.

2.2.2 PREPARATION OF CASSAVA

Cassava roots were firstly washed in a mixture of 1% mercuric chloride in 70% alcohol, peeled with flame sterilized knives and grated on an autoclave-sterilized hand grater. The sterile resulting cassava dough was then divided into 7 parts of 250 g each.

2.2.3 FERMENTATION

In controlled fermentations, four (4) of the 7 parts of 250 g cassava dough were inoculated each with 100 mL of LAB, Bacilli, yeasts or moulds suspension. The fifth part was inoculated with 100 mL of a mix of the different single suspensions while the sixth part was inoculated with 10% (w/w) of traditional cassava inoculum as practiced on *attieke* production sites. The seventh part, without any inoculum was used as control. Inoculated samples were thoroughly homogenated and incubated at 35 °C and fermentations were monitored over time for 24 h. Sample of fermenting doughs were aseptically taken for different analyses at the beginning, and after 6, 12, 18 and 24 h. For microbial softening activities, tests were done with sterile cassava pulp cut into rings of 4 cm long and 10 cm of diameter and inoculated as described above.

2.3 BIOCHEMICAL ANALYZES

2.3.1 DETERMINATION OF PH AND TOTAL TITRABLE ACIDITY

Thirty (30) g of fermenting cassava dough sample were blended with 70 mL of sterile distilled water and filtered through a whatman filter paper No. 1. The pH was determined on 30 mL of the filtered solution using a pH meter (P 107, CONSORT, Bioblock Scientitific). Total titratable acidity (TTA) was determined by titrating 30 mL of the filtered solution against 0.1 M NaOH using phenolphthalein as indicator. TTA was calculated as percentage of lactic acid as described by [15].

2.3.2 DETERMINATION OF PROTEINS CONTENT

Crude protein content was determined from dosage of total nitrogen by Kjeldahl method according [16]. One gram of sample was mineralized at 400 °C for 2 h in concentrated sulfuric acid (20 mL) in the presence of a catalyst (1 g Selenite of sodium + 1 g copper sulfate + 20 g of potassium sulphate). Ten milliliters of mineral solution added to 10 mL sodium hydroxide solution (40%) were distilled and the distillate collected in 20 mL of boric acid was titrated with sulfuric acid (0.1N) in the presence of a mixed coloured indicator (methyl red and bromocresol green). With this method, all nitrogen compounds were assayed. The conversion of nitrogen to proteins was carried out by a conversion factor of total nitrogen in proteins which was $100/16 = 6.25$.

2.3.3 DETERMINATION OF HYDROCYANIC ACID CONTENT

The hydrocyanic acid content of fermenting dough samples was determined following by the method of alkalinity titration [17]. Twenty seven (27) g of samples were soaked in a mixture of water (200 mL) and orthophosphoric acid (10 mL) for 18 h. The mixture was then distilled by internment in water vapor and the distillate was collected in a solution of NaOH (5%). After diluting 100 ml of the distillate to 2/5, the solution was titrated with silver nitrate solution (0.02N) in the presence

of 8 ml potassium iodide. Cyanogenic ions in aqueous solution complexed silver ions. AgNO₃ molecule reacted with two molecules of HCN, representing 54 g of HCN for an AgNO₃ solution of concentration 1N. For a solution of 1 mL of concentration 0.02N AgNO₃ will require $(54 \text{ g} \times 0.02 / 1)$ 1.08 g of HCN.

2.3.4 SOFTENING MEASUREMENT

The penetrometry index was used as an indicator of cassava softening during fermentation. A portable penetrometer (model10-SUR;PNR, Berlin) was used on five randomly cut sections according to a published procedure [18] with five repetitions for each root section. Softening of cassava was measured on an interval of 12 h of fermentation during 108 h.

2.4 EXPRESSION AND STATISTICAL ANALYSIS OF DATA

Excepted for softening activity, data were expressed as a change in a particular activity during time. For example, the acidification activity measured as pH changes was calculated as ΔpH ($\Delta\text{pH} = \text{pH}_{\text{at time}} - \text{pH}_{\text{zero time}}$) between zero time and 12 h and between 12 h and 24 h. The data obtained were subjected to analysis of variance (SAS/Stat, 1996) and mean differences determined by Duncan's multiple range test ($P < 0.05$). Performance of each starter culture tested was illustrated by principal component analysis (PCA). The results of the PCA were represented by one plot, combining tested parameters and starter cultures.

3 RESULTS AND DISCUSSION

3.1 RESULTS

3.1.1 ACIDIFICATION RATE OF CASSAVA DOUGH

The acidification rate of cassava dough by the various starter cultures tested in this study was presented in Table 2. This acidification rate, expressed as change in pH and total titratable acidity was the most important the first 12 h of fermentation for both doughs inoculated with mixed stater cultures and cassava traditional inocula, and also for some single cultures of LAB; and this whatever the origin of isolates. Indeed, mixte cultures SMX, SMY and SMZ rapidly decreased the pH of doughs after 12 h by 2.27, 2.16 and 2.7 units respectively, with an equivalent of TTA of 1.7, 1.54 and 2.4%. Traditional inocula showed similar pH decrease, but with lower acid production. Among single starter cultures, only LABZ46 from Ebrie origin showed ability to decrease pH similar to the mixed cultures (Table 2).

3.1.2 PROTEIN ENRICHMENT

As observed for acidification rates, the enrichment of cassava dough in proteins during fermentation significantly varied from one starter culture to the other (Table 2). SMX showed the better protein enrichment capacity with a value of 7.15 mg/100 g only after 12 h of fermentation, followed by SMZ (5.75 mg/100 g) and the traditional inocula FTX, FTY and FTZ with respectively 5.7, 5.31 and 5.09 mg of proteins produced by 100 g of dough. In the second part of fermentation, protein enrichment was the highest for the different moulds single cultures MX4 (6.82 mg/100 g), MY2 (4.2 mg /100 g) and MZ4 (4.36 mg/100g).

3.1.3 DETOXICATION OF CASSAVA DOUGH

The initial HCN content in cassava dough was 155 mg/100 g. Detoxication of this dough was observed during fermentation, with a highest activity during the first 12 h. whatever the origin, controlled mixed cultures (SMX, SMY and SMZ) had the highest detoxication powers, by reducing cyanide by more than 82%. Traditional inocula and some single cultures, particularly those of LAB (LABX2, LABY9 and LABZ46) showed similar detoxication activities to those of controlled mixed cultures, but at a lesser extent. The other single cultures detoxication powers were significantly low (Table 2).

Table 2. Biochemical parameters (expressed as a variation between 0 / 12h and 12 / 24 h of fermentation) analyzed during fermentation of cassava doughs inoculated with various controlled starter cultures and traditional cassava ferments

Inocula	Biochemical parameters							
	Δ pH		Δ TA (%)		Δ Protein (mg/100g)		Δ HCN (mg/100g)	
	Δ (0h/12h)	Δ (12h/24h)	Δ (0h /12 h)	Δ (12h/24h)	Δ (0h/12h)	Δ (12h/24h)	Δ (0h/12h)	Δ (12h/24h)
Control	0,04±0,001	0,15±0,002	0,0005±0,00	0,0004±0,00	0,05±0,001	0,1±0,0005	2,5±0,02	3±0,4
LABX2	1,34±0,01	0,96±0,01	0,02±0,006	0,027±0,009	0,89±0,07	0,81±0,07	90±7,01	24,6±3,7
BX5	0,94±0,05	0,72±0,07	0,064±0,01	0,065±0,006	0,7±0,2	0,95±0,2	82,56±6	12,4±7,01
MX4	0,5±0,01	0,56±0,001	0,01±0,009	0,045±0,002	2,34±0,84	6,82±0,84	55±4,9	20±2,8
LVX14	0,69±0,02	0,09±0,06	0,063±0,08	0,033±0,006	1,3±0,7	2±0,09	68±9,7	10±1,9
SMX	2,27±0,53	0,45±0,01	1,7±0,01	0,29±0,001	7,15±0,21	2,49±1	104,9±7,13	28,9±7,7
FTX	2,06±0,05	0,58±0,03	0,84±0,05	0,56±0,005	5,7±0,81	0,4±0,1	95,7±11,01	30,3±8,7
LABY9	1,27±0,09	1,07±0,1	0,24±0,01	0,36±0,01	3,91±0,83	0,7±0,2	106,41±9,9	9,6±4,9
BY4	0,78±0,1	0,22±0,01	0,16±0,05	0,045±0,00	0,3±0,01	1±0,005	56±13,7	33±7,2
MY2	0,52±0,03	0,48±0,07	0,025±0,002	0,2±0,005	2±0,88	4,2±1,5	23±4	15±8,1
LVY3	0,67±0,09	0,4±0,01	0,029±0,01	0,01±0,00	3,91±0,5	0,55±0,005	32±0,01	19±1,11
SMY	2,16±0,01	0,25±0,06	1,54±0,2	0,3±0,001	3,61±1,01	2,85±0,91	120,75±8,9	7,15±1,09
FTY	2,3±0,06	0,07±0,03	0,79±0,05	0,64±0,07	5,31±0,64	0,26±0,08	114±778	10,5±0,01
LABZ46	2,72±0,1	0,07±0,02	0,46±0,07	0,42±0,002	0,25±0,007	0,49±0,02	90±0,9	20±5,6
BZ15	1,07±0,01	0,32±0,01	0,08±0,001	0,075±0,011	0,55±0,06	0,55±0,47	55±3,77	14±4,9
MZ4	0,7±0,005	0,6±0,09	0,015±0,01	0,034±0,001	0,94±0,5	4,36±1,14	11±0,31	34±6,08
LVZ18	0,81±0,007	0,42±0,08	0,06±0,007	0,023±0,00	0,99±0,007	2,96±0,11	40±5,8	20±8,8
SMZ	2,7±0,01	0,44±0,01	2,4±0,2	0,42±0,006	5,75±1,06	1,11±0,005	113,8±10,3	6,2±1,01
FTZ	2,07±0,009	0,62±0,04	0,86±0,03	1,08±0,03	5,09±0,9	0,2±0,003	107,21±9,2	22,8±0,98

FTX, FTY and FTZ = cassava traditional inocula respectively from *Adjoukrou*, *Alladjan* and *Ebrie* origins

3.1.4 SOFTENING OF CASSAVA

The penetrometry index of cassava pulp at the beginning of fermentation was $16.5 \pm 0.7 \text{ Kg/cm}^2$. Cassava pulp were fairly affected by the different inocula during the first 60 hours of fermentation, particularly by strains of traditional inocula and controlled mixed cultures which penetrometry index ranged from $16.5 \pm 0.7 \text{ Kg/cm}^2$ at $13 \pm 0.5 \text{ Kg/cm}^2$. However, exception was made by single cultures BZ15 and MX4 which penetrometry index a value of $11 \pm 1.4 \text{ Kg/cm}^2$ differed significantly ($P < 0.05$) than the other strains for the same fermentation period (Fig. 1). But after this period, softening became more intense particularly with mixed culture which reached values ranging between 1.75 ± 0.3 and $7 \pm 0.3 \text{ Kg/cm}^2$. Only single culture MX4 reached value ($2.5 \pm 0.7 \text{ Kg/cm}^2$) near to this of the starter culture (SMX) with the best penetrometry index value. Softening activities from the other starter cultures, particularly the yeasts remained very low with values between 16.5 ± 0.7 and $13.5 \pm 0.5 \text{ Kg/cm}^2$ at the end of fermentation (Fig.1).

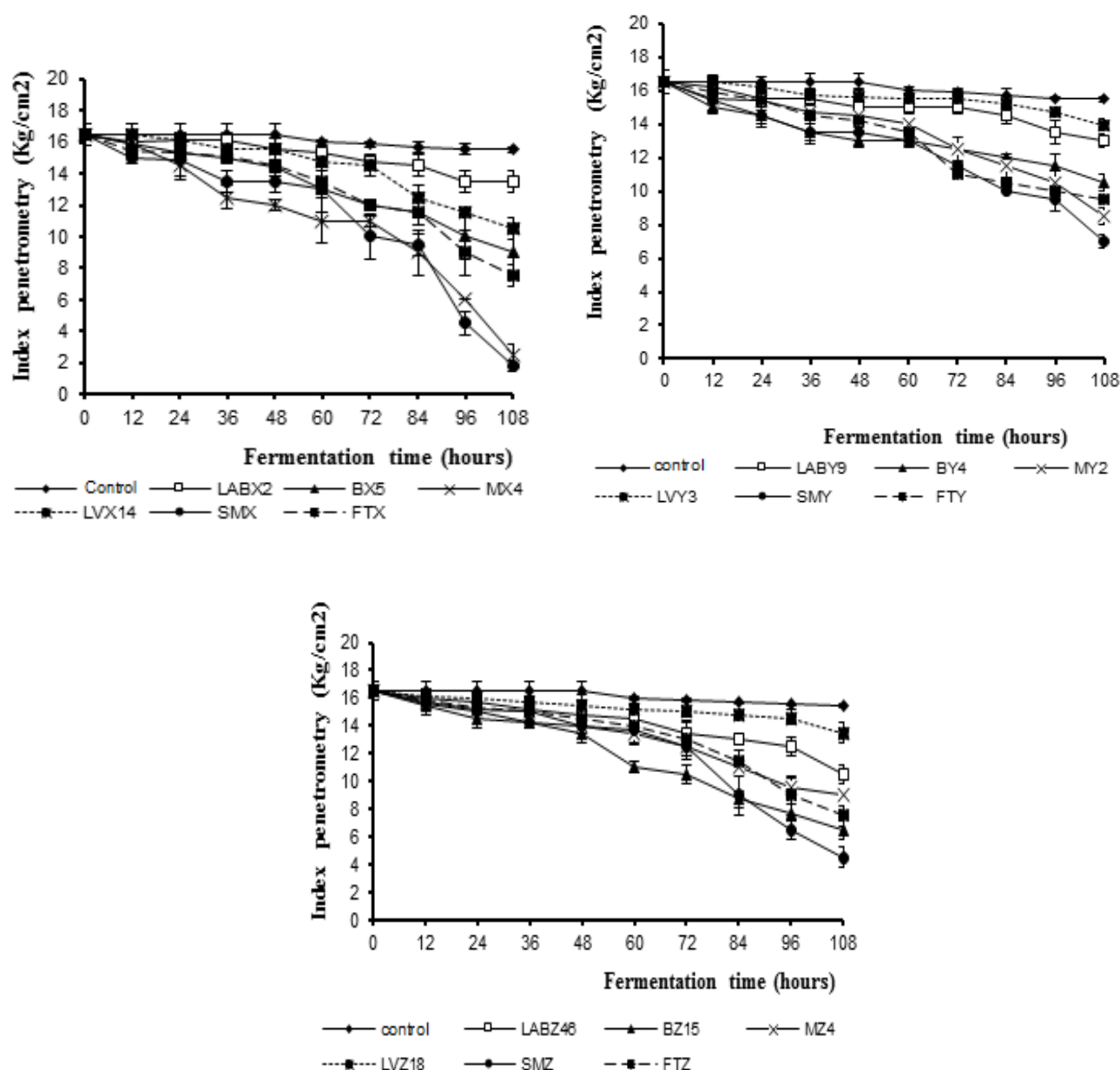


Fig. 1. Softening activity (expressed by penetrometry Index) during fermentation of cassava inoculated with various controlled starter cultures and traditional cassava ferments

3.1.5 SELECTION OF STARTER CULTURES BY PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS (PCA)

The Principal Component Analysis (PCA), made from results obtained for the variables "acidifying power" "protein enrichment", "detoxification" and "softening" at the different periods of cassava dough fermentation allowed to classify the 15 controlled starter cultures and the 3 traditional inocula on the basis of their technological potential, knowing that in most cases there is no correlation between these activities.

The first two principal component explained 76.94% of the variation in the data, with the first component (F1) accounting for more than 55% of the variation and the second component (PC2) accounting for 21.04% of the variation. The contribution of the combined data to the principal component is illustrated in Fig. 2. When inocula were plotted on the space created by the two dimensions, they were distinctly divided along both axes, described by the variables "acidity produced", "protein

enrichment", "detoxification" and "softening". The proximity of the vector extremity, representing a variable with the circle of correlation gave information on the quality of representation of this variable, showing that these variables (interest activities) were well represented in the factorial plan (not showed). However, we clearly observed the low correlation between these variables due to the angle formed between vectors of each variable globally considered regardless of fermentation time. Contrarily, data obtained per fermentation time for each variable appeared to be strongly correlated between them, regarding their low angle (near 0 °). This seemed rational, since it was the same metabolic activity of interest analyzed along fermentation.

The distribution of strains in the factorial plan according to axes F1 and F2 allowed to distinguish then into different groups, especially the axis F2, separating the single starter cultures to the mixed ones (controlled and traditional inocula). Indeed, mixed starter cultures SMY, SMZ, and traditional inocula (FTX, FTY and FTZ) formed a distinct group in the positive direction of axis F1. They generally possessed higher acidification, detoxifying and protein enrichment levels. Within this group, the proximity of traditional inocula from each other showed that they had almost similar activities, but equally distinct, or even lower than those of controlled mixed starters, relating to the position deviation between both types of inocula. Another group was formed, opposing the first one in the positive part of axis F2, composed by mixed starter SMX and single starter MX4 which demonstrated significant softening activity and best protein enrichment after 24 h of culture. Next to each of these two groups, different types of single starter cultures were positioned. On the one hand, LAB single cultures which are closer to the group of inocula with high acidifying and detoxification activities, probably possessed intermediary activities; and on the other hand, Bacilli and moulds single cultures showed intermediary activities as mainly concern the softening activity. Therefore, PCA method offers an enough powerful discriminatory analysis to sort or elect the most effective starter.

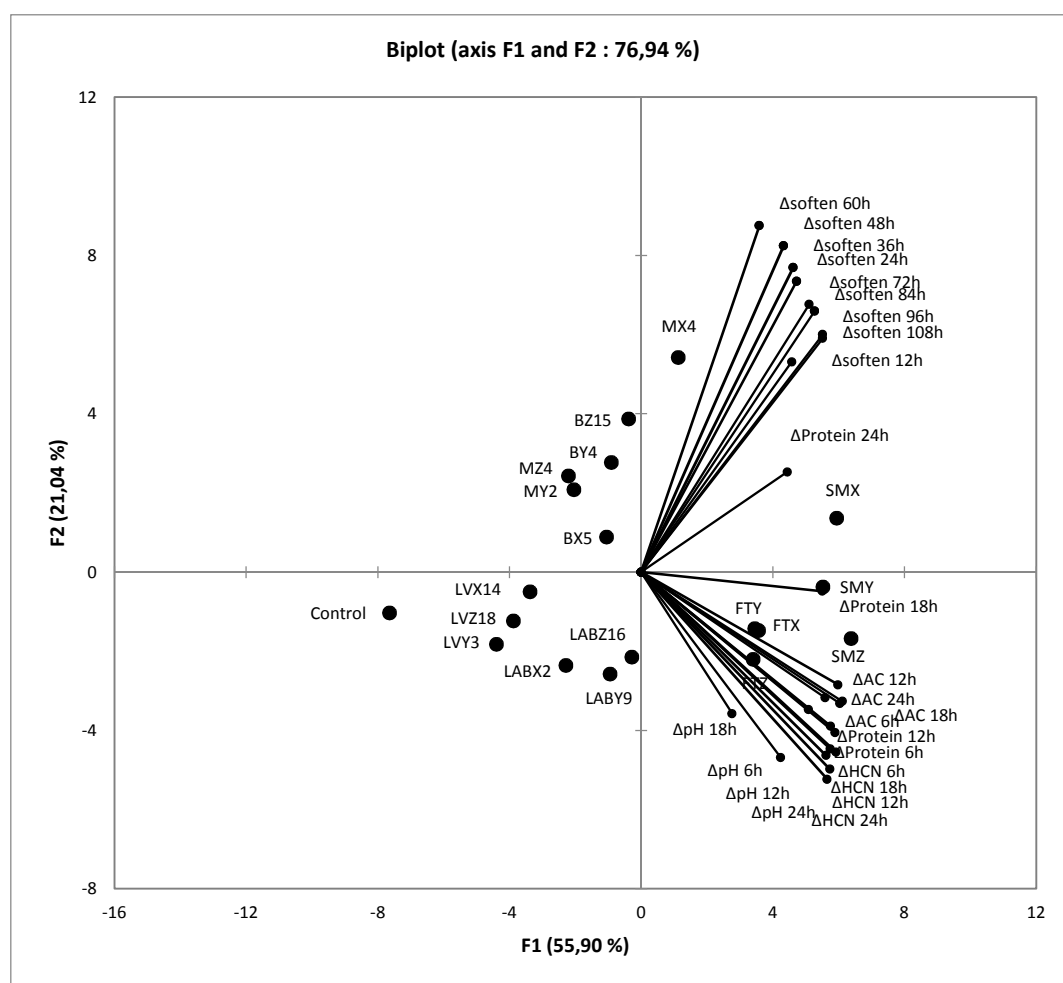


Fig. 2. Principal Component Analysis of technological profiles of various controlled starter cultures and traditional cassava ferments from the three main attieke production ethnic groups, tested during fermentation of cassava.

3.2 DISCUSSION

Our previous studies allowed us to preselect LAB, Bacilli, yeasts and moulds strains according to their acidifying power, their potential to excrete α amylases, pectinases and β -glucosidase, interesting properties for the bioconversion of cassava, in synthetic media (in vitro tests). The present study assessed the capacities of the 15 preselected strains to create significant changes in a complex medium which is cassava dough.

Strains of *Bacillus* species (*Bacillus amyloliquefaciens* BX5, *Bacillus amyloliquefaciens* BY4 et *Bacillus subtilis* BZ15) et *Lactobacillus plantarum* LABY9, preselected for their cassava broth acidifying abilities, were not yet able to display significative acidifying power in real medium of cassava dough when inoculated in single culture. Only *Leuconostoc mesenteroides* spp *mesenteroides* LABX2 et *Lactobacillus plantarum* LABZ46 showed important acidifying power when cultivated in single cultures on cassava dough. But, after only 12 h of fermentation, the acidity produced by mixed culture from *Adjoukrou* origine (SMX) was 3.7 time higher than those of *Leuconostoc mesenteroides* spp *mesenteroides* LABX2 displaying significant acid production and 1.3 time this of the traditional inocula from the same origin. In the same way, for starter cultures from *Alladjan* origin, which for most of them did showed interesting acid production in cassava dough, controlled mixed starter culture showed an acid production 7 times higher particularly against its corresponding best acidifier *Lactobacillus plantarum* LABY9. Rapid acidification during dough fermentation as performed by controlled mixed starter cultures is a technological characteristic that is of paramount importance as reported by [19]; notably, in the preservation and microbial safety of fermented foods, thus promoting the microbial stability of the final products of fermentation. Our results could not be explained based on an additive effect of activities from microorganisms constituting the mixed starter cultures, because selected Bacilli, yeasts and moulds strains showed very fair acidifying power in cassava dough when inoculated as single cultures. It would thus be a potentiating effect. It means that, in a mixed starter culture, the acidifying power of lactic acid bacteria strain (*Leuconostoc mesenteroides* spp *mesenteroides/dextranicum* ou *Lactobacillus plantarum*) was increased by the activity of the other microorganisms and / or vice versa. Lactic acid bacteria (LAB) and other microorganisms have been reported to be present in most of the African indigenous fermented foods [5], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26]. Stable co-metabolism between LAB and yeasts is common in many foods, enabling the utilization of substances that are otherwise non fermentable (for example starch) and thus increasing the microbial adaptability to complex food ecosystems [27], [28], [29]. Thus, it has been suggested that the proliferation of yeasts in foods is favoured by the acidic environment created by LAB while the growth of bacteria is stimulated by the presence of yeasts, which may provide growth factors, such as, vitamins and soluble nitrogen compounds [20]. Moreover, This potentiation may depend on lactic acid bacteria proportion. In fact, in the traditional inocula, where variations of acidity were lower compared to those in mixed starter cultures, lactic acid bacteria proportions were estimated at 23.7% of cocci and 18.7% of bacilli according to Djeni [30]. However mixed cultures in this study consisted each either of 25% of *Leuconostoc mesenteroides* spp *mesenteroides* or 25% of *L. plantarum*. Also, α -amylase excreted by preselected *Candida tropicalis* and moulds strains may indirectly contribute to the potentiation of acidifying power of lactic bacteria. Indeed, α amylases excreted would provide necessary amounts of reducing sugars for LAB strains through a direct metabolism convert glucose into lactic acid [31]. Conversely metabolites from LAB (*Leuconostoc mesenteroides* or *L. plantarum*) may contribute to improving the acidifying power of other mixed cultures component strains.

Moreover, cassava roots are low in proteins (0.54%) [32]. Roots used in this study have a protein content of 2.05 mg/100g (0.02%), poorer than those used by the mentioned authors in their studies. Protein contents in fermented cassava doughs after 24 h by controlled mixed starters cultures and mould single cultures were relatively low (0.097% to 0.11%), but were about 4 times higher than the initial rate. The results showed that the improvement of protein levels by mixed starter *Adjoukrou*, was mainly due to the activity of *Rhizopus oryzae* MX4. In fact, [32] reported that the presence of proteins during fermentation depends on a good enzymatic activity of the selected strains. However, in doughs inoculated with *Alladjan* or *Ebrie* controlled mixed cultures, protein contents seemed to be related to an additive effect of *Candida tropicalis* and *Rhizopus Oryzae* MX4 or *Mucor* sp. MY1 activities; that is to say the amount of protein produced by each pure culture of the controlled mixed starter, reflected the amount of protein observed in the doughs inoculated with the mixed starters.

A reduction in the cyanogenic potential of cassava occurred during every unit operation in the processing of cassava into *akyeke* (cassava fermented food from Ghana), and this resulted in near detoxification of the product. The greatest loss in the cyanogenic potential occurred during grating and fermentation [33]. In our study, the reduction in hydrogen cyanide (HCN) content of cassava dough by mixed starter cultures was essentially the affair of lactic acid bacteria strains. Indeed, no significative difference was observed in the HCN content of doughs inoculated with controlled mixte starters, cassava traditional inocula and single cultures of LAB during the fermentation. This demonstrates that LAB are a vital link in β -glucosidase production, thus responsible for the elimination of cyanogenic glycosides [34]. The same could be said regarding

the detoxication activities that it did not occur additive or potentiating effect in doughs inoculated with mixed starter cultures. The detoxication activity of a mixed starter was essentially that of the lactic acid bacterium species present in the culture medium. This detoxication was achieved by half with controlled mixed cultures and their corresponding cassava traditional inocula after only 6 h of fermentation, while single LAB monocultures performed the same result after 12 hours. [33] reported four species of LAB (*L. brevis*, *L. mesenteroides*, *L. salivarius* and *L. fermentum*) to be capable of breaking down cyanogenic glucosides and contributed to the detoxification of cassava during the 5 days of *akyeké* fermentation by 56.1% and 62.1% of the total cyanide content, respectively in field and laboratory samples.

Moreover, no softening was obtained in sterile fermentation. According to [35], pectinolytic enzymes of microbial origin are clearly indispensable for the softening to be completed in cassava rettings. Depolymerizing enzymes were not detected in fresh roots, but significant activities were detected after 17 h of fermentation, when the microbial populations were fully established [36]. The results of the present work showed the involvement of moulds and *Bacillus* species in the textural modification of cassava tissue during fermentation. And this is in agreement with the findings of [37] and [38]. If no study reports the contribution of moulds in cassava fermentation, *Bacillus* species, particularly *B. subtilis* was the dominant species identified by [38] as being responsible for textural breakdown of cassava tissue during *agbelima* cassava dough fermentation. [37]. also reported *Bacillus* spp. as one of the isolates from heap, fermenting cassava roots which was able to cause a softening of cassava tissue. Therefore, the important softening activities observed in cassava doughs inoculated with controlled mixed cultures would undoubtedly be the potentiation of moulds and *Bacillus* strains activities.

4 CONCLUSION

The bioconversion of cassava dough through the study of acid production, detoxication, protein enrichment and softening clearly indicates that mixed starter cultures from *Adjoukrou Alladjan* and *Ebrie* origins established for controlled fermentation during the preparation of the three main *attieke* types in Côte d'Ivoire were more efficient than the single culture developed and their corresponding cassava traditional inocula. These three mixed starter cultures displayed good acidification, improved protein content of cassava dough and better softening and elimination of cyanogenic glucosides. Thus, it appears that the controlled mixed starter cultures SMX, SMY and SMZ were showed to have the most interesting technology profiles for any application at small or large scale.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors gratefully acknowledge *attieke* producers which had freely accepted to participate

REFERENCES

- [1] N. T. Djeni, K. F. N'guessan, D. M. Toka, K. A. Kouame, K.M Dje, "Quality of attieke a fermented cassava product from the three main processing zones in Côte d'Ivoire," *Food Research International*, vol 44, pp. 410-416, 2011.
- [2] N. A. Kouadio, K. Mosso, K. Kouakou, S. F. Angbo, "Etude comparative des méthodes traditionnelles de la préparation de l'attieke dans le Sud de la Cote d'Ivoire," *Cahiers de la recherche scientifique et technique*, vol 108, pp. 703-706, 1991.
- [3] A. I. Sanni, A. A Onilude, F. A. Oguntoyinbo, "Optimization of process conditions for owoh, a fermented cotton seed condiment," *Advances in Food Science*, vol 20, pp. 163-167, 1998.
- [4] W. H. Holzapfel, "Appropriate starter culture technologies for small-scale fermentation in developing countries," *Int. J. Food Microbiol*, vol 75, pp. 197-212, 2002.
- [5] A. I. Sanni, "The need for process optimization of African fermented foods and beverages," *Int. J. Food Microbiol*, vol 18, pp. 85-95, 1993.
- [6] V. M. Kimaryo, G.A. Massawe, N.A. Olasupo, W.H. Holzapfel, "The use of a starter culture in the fermentation of cassava for the production of "kivunde", a traditional Tanzanian food product," *Int. J. Food Microbiol*, vol 56, pp. 179-190, 2000.
- [7] C. O. Ofuya, C. Nnajofofor, "Development and evaluation of a starter culture for the industrial production of gari, *Journal of Applied Bacteriology*," vol 66, pp. 37-42, 1989.
- [8] W. Holzapfel, "Use of starter cultures in fermentation on a household scale," *Food Control*, vol 8, pp. 241-258, 1997.
- [9] J. B Assanvo, G.N Agbo, Y. N Behi, P. Coulin, Z. Farah, "Microflora of traditional starter made from cassava for „attiéké" production in Dabou (Côte d'Ivoire)," *Food Control*, vol 17, pp. 37-41, 2006.
- [10] P. Coulin, Z. Farah, J. Assanvo, H. Spillman, Z. Puhon, "Characterisation of the microflora of attieke, a fermented cassava product during traditional smallscale production," *International Journal of Food Microbiology*, vol 106, pp. 131-136, 2006.

- [11] N. T. Djeni, K. M. J-P. Bouatenin, N. M. C. Assohoun, D. M. Toka, E. H. Menan,, X. Dousset, K. M . Dje, "Biochemical and microbial characterization of cassava inocula from three main attiéke production zones in Côte d'Ivoire," *Food Control*, vol 50, pp. 133-140, 2015.
- [12] K. M. J-P. Bouatenin, N. T. Djeni, S. Aka, K. Brou, K. M. Dje, "The Contribution of Microorganisms to the Fermentation of Cassava Dough during Attiéké Processing in Côte d'Ivoire," *Food*, vol 6, pp. 54-68, 2012.
- [13] K. M. J-P. Bouatenin, N. T. Djeni, T. Ouassa, E. H Menan, K. M. Dje, "Characterization and enzyme Activities of Microraganismes from traditional cassava starter used for the production of Adjoukrou Attiekie (côte d'ivoire)," *Journal of Food Technologie*, vol 11 pp. 4-13, 2013.
- [14] K. M. J-P. Bouatenin, N. T. Djéni, A. C. Kakou, E. H Menan, K. M. Dje, " Optimisation de la production de l' α -amylase par les microorganismes isolés des Ferments traditionnels de manioc provenant de trois zones de production de l'attiéké en Côte d'Ivoire," *European Scientific Journal*, vol 12, pp. 259-272, 2016.
- [15] Amoa-Awua, W. K. A., Jakobsen, M., The role of microorganisms in the fermentation of Agbelima Cassava Dough. In M. Halm & M. Jakobsen (Eds.), Traditional fermented processing in Africa, *The third Biennal Seminar on African Fermented Food*, (Ghana, FRI, DANIDA, KVL), PP. 1-7, 1996.
- [16] AOAC Official Methods of Analysis 16th Edition, Association of Official Analytical Chemists, Ar- lington, pp. 1-2, 1998.
- [17] Holleman, L. W. J., Aten, A., Traitement du manioc et produits à base de manioc dans les industries rurales, Collection FAO, *cahier n° 54*, p. 116, 1956.
- [18] F. Ampe, A. Brauman, S. Trèche, A. Agossou, "The fermentation of cassava : optimisation by the experimental research methodology," *Journal of the science of Food and Agriculture*, vol 65, pp. 355-361, 1994.
- [19] A. Corsetti, L. Settanni, "Lactobacilli in sourdough fermentation a review," *Food Research International*, vol 40, pp. 539-558, 2007.
- [20] M. J. R. Nout, "Ecology of accelerated natural lactic fermentation of sorghum-based infant food formulas," *Int. J. Food Microbiol*, vol 12, pp. 217-224, 1991.
- [21] M. Halm, A. Lillie, A.K. Sørensen, M. Jakobsen, "Microbiological and aromatic characteristics of fermented maize doughs for kenkey production in Ghana," *Int. J. Food Microbiol*, vol 19, pp. 135-143, 1993.
- [22] D. J. Hounhouigan, M. J. R. Nout, C. M. Nago, J. H. Houben, F. M. Rombouts, "Microbiological changes in mawe during natural fermentation," *World J. Microbiol. Biotechnol*, vol 10, pp. 410-413, 1993.
- [23] K. H. Steinkraus, Handbook of Indigenous Fermented Foods, 2nd ed, (Marcel Dekker, New York), 1996.
- [24] N. A Olasupo, D. K Olukoya, S. A Odunfa, "Identification of Lactobacillus species associated with selected African fermented foods," *Zeitsch. Naturforsch*, vol 52, pp. 105-108, 1997.
- [25] C. M. Nago, D. J. Hounhouigan, N. Akissoe, E. Zanou, C. Mestres, "Characterization of the Beninese traditional ogi, a fermented maize slurry: physiological and microbiological aspects," *Int. J. Food Sci. Technol*, vol 33 pp. 307-315, 1998.
- [26] N. F Kunene, I. Geornaras, A. von Holy, J. W. Hastings, "Characterization and determination of origin of lactic acid bacteria from a sorghum-based fermented food by analysis of soluble proteins and amplified fragment length polymorphism fingerprinting," *Appl. Environ. Microbiol* vol 66, pp. 1084-1092, 2000.
- [27] M. Gobbetti, A. Corsetti, J. Rossi, "The sourdough microflora. Interactions between lactic acid bacteria and yeasts: metabolism of carbohydrates," *Appl. Microbiol. Biotechnol*, vol 41, pp. 456-460, 1994.
- [28] P. Stolz, R. F. Vogel, W. P. Hammes, "Utilization of electron acceptors by lactobacilli isolated from sourdough," *Z. Lebensm.-Unters.-Forsch*, vol 201, pp. 402- 410, 1995.
- [29] M. Gobbetti, A. Corsetti, "Lactobacillus sanfransisco a key sourdough lactic acid bacterium: a review," *Food Microbiol*, vol 14, pp. 175-187, 1997.
- [30] N. T. Djeni, Typologie de l'attiéké de trois zones de production de Côte d'Ivoire et analyse des propriétés des levains traditionnels utilisés pour sa préparation, Thèse unique de Doctorat, Université Abobo-Adjamé, 2009.
- [31] M. Kostinek, I. Specht, V. A. Edward, C. Pinto, M. Egounlety, C. Sossa, S. Mbugua, C. Dortu, P. Thonart, L. Taljaard, M. Mengu, C. M. A. P. Franz, W. H Holzapfel, "Characterisation and biochemical properties of predominant lactic acid bacteria from fermenting cassava for selection as starter cultures," *Int. J. Food Microbiol*, vol 114, pp. 342-351, 2007.
- [32] H. M. Rawel, J. Kroll, "Die Bedeutung von Cassava (*Manihot esculenta* Crantz) als Hauptnahrungsmittel in tropischen Ländern," *Deutsche Lebensmittel-Rundschau*, vol 99, pp. 102-110, 2003.
- [33] E. M. Obilie, K. Tano-Debraha, W. K. Amoa-Awua, "Souring and breakdown of cyanogenic glucosides during the processing of cassava into akyeke," *International Journal of Food Microbiology*, vol 93, pp. 115-121, 2004.
- [34] O. E. Mpong, H. Yan, G. Chism, R. T. Sayre, "Purification, characterization and localization of linamarase in cassava," *Plant Physiology*, vol 93, pp. 176-181, 1990.
- [35] F. Ampe, A. Brauman, "Origin of enzymes involved in detoxification and root softening during cassava retting," *World Journal of Microbiology & Biotechnology*, vol 11, pp. 178-182, 1995.

- [36] A. Brauman, S. Keleke, O. Mavoungou, F. Ampe, I. Miambe, Etude cinétique du rouissage traditionnel des racines de manioc en Afrique Centrale (Congo), In : Agbor Egbe (TJ, Brauman A, Griffon D, Trèche S, Transformation alimentaire du manioc, (Paris, ORSTOM), 1995.
- [37] S. A. J. A. Essers, C.M.J.A. Jurgens, M.J.R. Nout, "Contribution of selected fungi to the reduction of cyanogenic levels during solid-substrate fermentation of cassava," *Int. J. Food Microbiol*, vol 26, pp. 251-275, 1995.
- [38] W. K. A Amoa-Awua, M. Jakobsen, "The role of Bacillus species in the fermentation of cassava," *J. Appl. Bacteriol*, vol 79 pp. 250-256, 1995.

EVALUATION DU COUT DE PRODUCTION DES MINERAIS DE CUIVRE DE LA MINE A CIEL OUVERT DE SHABA EN VUE DE L'EXPLOITATION DE LA DEUXIEME PHASE

Jean Paul KAYEYE MAHAMBAA¹ and Albert KALAU²

¹Ingénieur Civil des Mines,
Assistant à l'ISTA Kolwezi,
Section Géologie et Mines,
RD Congo

²Licencie en Géologie,
Chef des travaux à l'ISTA Kolwezi,
Section Géologie et Mines,
RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the *Creative Commons Attribution License*, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The exploitation of the Shaba Open-pit mine, a Concession of ANVIL MINING CONGO at KAPULO will have to pass to its second phase of exploitation with 2 excavators Hitachi 870 plus one CAT 336 DL and 11 articulated trucks AD40F. The cost of exploitation of the first phase rising with 7.31 dollars per cubic meter with 2 excavators and 5 trucks in the form of the contract per hour of work, our study showed that with the addition of the fleet, the production cost becomes 4.31 dollars per meter and the production increases by 2.38 times, thus offering an advantage to the form of the contract per hour than the contract by bench cubic meter.

KEYWORDS: Evaluation, open-cast mine, Layer, mineralized Body, design, mining machines, cost of exploitation, running hours of mining equipment's.

RESUME: L'exploitation de la Mine à Ciel Ouvert de Shaba, un gisement de ANVIL MINING CONGO à KAPULO devra passer à sa deuxième phase de découverte avec 2 pelles Hitachi 870 ; une CAT 336 DL et 11 bennes articulées AD40F. Le coût d'exploitation de la première phase s'élevant à 7.31 dollars par mètre cube avec 2 pelles et 5 bennes dans la forme du contrat par heures de marche, notre étude a montré qu'avec l'ajout de la flotte, le coût de production devient 4.31 dollars par mètre la production augmente de 2.38 fois, offrant ainsi un avantage à la forme du contrat par heure qu'au contrat au mètre cube.

MOTS-CLEFS: Evaluation, mine à Ciel ouvert, Gisement, Corps minéralisé, design, engins miniers, cout d'exploitation, heures de marche des engins, taux d'utilisation.

1 INTRODUCTION

La Mine à Ciel Ouvert de Shaba, charnière du projet de ANVIL MINING CONGO à KAPULO planifiée en trois phases d'exploitation dont la première a commencée depuis Novembre 2014 et devant produire 2 millions de Tonnes avec un rapport de découverte moyen de 2.4 ; la deuxième phase devant intervenir dans le troisième trimestre de l'année 2015 pour une excavation globale de 18 millions de tonnes avec un rapport de découverte moyen de 8.6, enfin la troisième phase sera entamée au début de l'année 2017. Pour l'exploitation de ses Mines de Kapulo dont celle de Shaba, de Safari Nord et Safari Sud, la Société ANVIL Mining Congo (AMC en sigle), a engagé Mining Company Katanga (MCK en sigle) en sous-

traitance ; et la nature du contrat est basée sur les heures prestées et le coefficient de Mise à disposition « Availability » dont le minimum mensuel est fixé à 85 %. La flotte disponible est constituée de deux Excavateurs dont la HITACHI 870, la CAT 340, avec 5 bennes de type ADT 40 F, Deux bulldozer D8R, une Niveleuse et une benne arroseuse. Etant donné que la deuxième phase va nécessiter l'ajout de 6 bennes et d'une pelle Hitachi 870, il nous a semblé important de faire une étude afin d'évaluer le coût de production du mètre cube (minerai et stérile) compte tenu des enjeux du contrat actuel, et le comparer au coût que pourrait générer un autre type de contrat au mètre cube appelé BCM Contrat, et enfin dégager les avantages de l'un ou l'autre contrat

2 GENERALITES SUR LA MINE DE SHABA

2.1 LOCALISATION

La Mine de Shaba est située à Kapulo, un projet localisé dans le coin Sud- Est de la République Démocratique du Congo, dans le District du Haut Katanga, entre le Lac Moero et le Lac Tanganyika, approximativement à 15 kilomètres de la bordure Zambienne et à 50 kilomètres de Pweto ; Ce projet comporte trois gisements dont Shaba, Safari Nord et Safari sud, situés à environ 124 kilomètres au Nord Est de Dikulushi, un autre projet de Anvil Mining Congo, à proximité de Kilwa.

2.2 GÉOLOGIE ET STRATIGRAPHIE

Le Gisement de Shaba regorge une réserve de 3.6 millions de tonnes à 3.6 % de cuivre et 8.3 grammes par tonne d'Argent ; et la production annuelle escomptée est de 15 800 tonnes de cuivre et 78 000 onces d'argent (équivalent à 2 211 Kilogramme), pour une durée de vie de 7.5 ans.

Le Site de Kapulo en général comprend deux ore bodies dont Shaba et Safari qui sont séparés par une faille de 2 kilomètres de long ; le gisement de Shaba est filonien et a géométriquement 10 à 150 mètres d'épaisseur ; 200 mètres de long et plonge à plus de 370 mètres.

A la Surface, on retrouve une épaisse couche d'argile altérée contenant du cuivre carbonaté sous forme de Malachite et d'Azurite, et aussi des oxydés sous forme de Cuprite. De cette Zone oxydée le Gisement passe partiellement par une Zone mixte dont la minéralisation est dominée par l'association Cu-Fe, spécialement la bornite et la chalcopryrite ; ensuite vient la plus dominante Zone qui est complètement sulfurée et stratiforme associée à du Graywacke et du Bréccia Ciments avec des granites. La roche encaissante est constituée du Quartz et des Sandstones.

La géométrie et la stratigraphie des gisements de Kapulo a été fortement contrôlée par la Faille.

La Zone de Silicification $\pm$ Fe-oxide $\pm$ clay a une épaisseur de 10 à 150 m, soit 60 m en moyenne

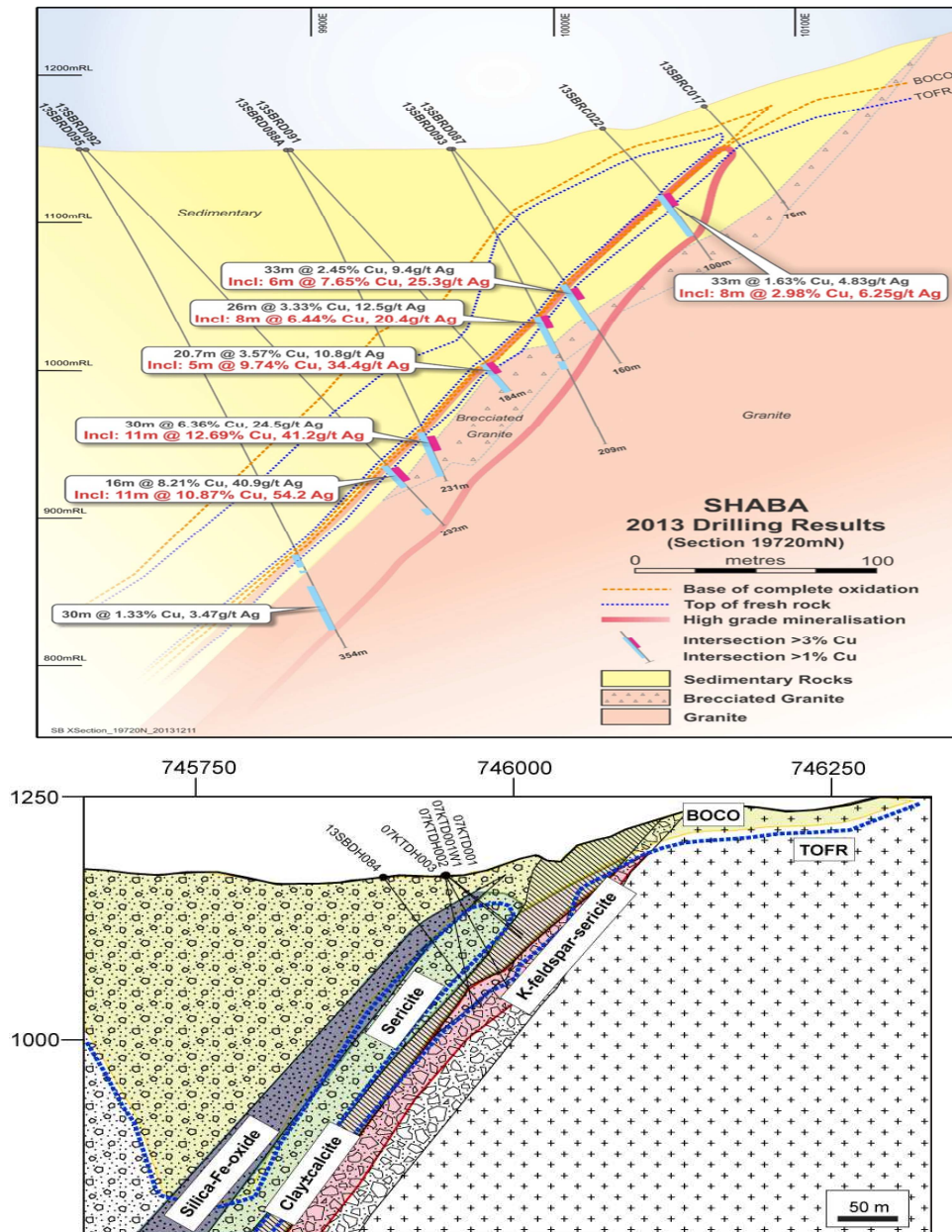
La zone de Sericite varie de 10 à 80 m, environ 40 m en moyenne

Ensuite le Clay $\pm$ Fe-oxide $\pm$ calcite dont la structure et l'altération sont contrôlées par le greywacke et la presence de breccia

La Zone de calcite a pour épaisseur 10 à 40 m; soit 25 m en moyenne

La Zone de K-feldspar $\pm$ sericite recouvre 10 to 65 m d'épaisseur, soit 30 m en moyenne

Figures 1 et 2 montrant la stratigraphie et la structure du Gisement de Shaba



3 EVALUATION DU COUT DE PRODUCTION

3.1 INTRODUCTION

Au cours de ce Chapitre, nous allons évaluer le coût en tenant uniquement compte des opérations d'excavation et de transport des produits (minerais et stériles), compte tenu du contrat qui lie MCK et ANVIL MINING Congo, sachant que les autres opérations comme forage et Minage reviennent à AMC.

Cette limitation est motivée par le fait que l'objectif de cet ouvrage est de déterminer le coût de production, c'est-à-dire Excavation et transport dans la forme du contrat actuel de MCK basée sur les heures machines afin de pouvoir le comparer au coût que reviendrait cette production dans la forme d'un contrat au mètre cube.

3.2 PRÉSENTATION SOMMAIRE DES CLAUSES DU CONTRAT

Le contrat par heures machines est défini en terme des cinq points ci-après :

- Ressource et mobilisation des équipements et consommables

- Frais de management qui sont fixes et mensuels, et comportent le Management, la supervision, les salaires des opérateurs et du staff, les équipements de bureau, les frais de transport, le carburant, la communication Mobile et Internet et les assurances. (Monthly Management Fee, MMF en Sigle)
- Les frais horaires par engin selon 85% de disponibilité. Ces frais concernent la pelle Hitachi ZX870, la pelle CAT 336DL, 5 camions bennes Volvo A40F ADT, deux Bulldozers CAT D8R, un Grader CAT 140K, une chargeuse CAT 980 WL, Une benne Arroseuse Bell B40D W/KADT, un service truck Volvo A40F ADT et un marteau hydraulique 336 DL ; ainsi, le nombre d'heures de travail est multiplié par les frais horaires fixes, et le déficit par rapport à 85% constitue un Back charge, c'est-à-dire ces frais sont retranchés sur la facture globale, on les nomme Monthly Hourly Hire , MHH en sigle
- Les frais fixes par engin sur un minimum de 250 heures : ces frais dépendent du point précédent en supposant que chaque engin doit faire plus de 250 heures par mois ; si il en faisait moins et que la machine est disponible, ces frais sont payés de droit considérant que celle-ci a été mise au chômage ; si elle en faisait plus, ces frais sont payés pour la mobilisation ; on les appellera Monthly equipment Fixed Fee , MEFF en sigle
- Les ' Rise and Fall' : Sont calculés après chaque 4 mois, et sont considérés comme frais d'amortissement des engins

3.3 CALCUL DU COÛT DE PRODUCTION DU MÈTRE CUBE

Dans ce paragraphe, nous allons représenter les coûts globaux et les productions depuis le mois de Janvier jusque Mai 2015 afin de trouver le coût de production moyen en Dollars par Tonne ou Dollars par mètre Cube

Tableau 02 : représentation des frais et des productions

Desc	MMF	MEFF	MHH	Fuel	RB	BC	Total
	\$	\$	\$	\$	\$	\$	\$
Janv.	221385	237147	223670	227510	-	-	909712
Fév.	223788	250391	219442	224859	-	10065	908416
Mar	223788	254751	248771	259346	4084	1475	989265
Avr.	223788	250003	244463	246066	4084	1386	967018
Mai	223788	249773	275035	269886	4084	1701	1020865

Légende :

MMF : Monthly Management Fee ou frais de management

MEFF: Monthly Equipment Fixed Fee ou frais par machine

MHH: Monthly Hourly Hire Ou frais relatifs aux heures machines

RB : Rock break ou Marteau

BC : Back Charge

Ainsi, nous pouvons sur base de ces coûts et des productions réalisées, calculer le coût au mètre cube comme suit :

Mois	Cout	Volume	Tonnes	CU	CU
	\$	Bcm		\$ /bcm	\$/t
Jan 15	909712	125036	300087	7.28	3.03
Fév. 15	908416	143307	343231	6.34	2.65
Mar 15	989265	134024	328904	7.38	3.01
Avr. 15	967018	135961	332391	7.11	2.91
Mai 15	1020865	142085	348108	7.18	2.93

De ce qui précède, nous trouvons que sur base du contrat par heures machines, le cout de production revient à 7.1\$/ bcm (7.1 dollars par mètre cube), soit 2.9 dollars par Tonne en incluant tous les travaux de développement et en considérant 1.6 dollar comme prix de Gasoil livré sur site en provenance de la Zambie.

3.4 CRITIQUE DES RÉSULTATS

On constate que les frais de management MMF et ceux fixes par machine prennent 48% du coût global alors que les frais liés aux heures machines ne valent que 25.1%, ceci traduit que même quand il y a chute de production, la facture doit être payée aussi longtemps que les machines sont disponibles sur site. On pourra aussi remarquer que ces frais sont élevés par rapport à la normalisation faite par l'IBN comme nous allons le démontrer au tableau 4

Le contrôle de la productivité par le contractant ne faisant pas objet du contrat, on observe dans les documents de statistique de Mawson West que :

- le Truck factor est en moyenne de 13 bcm par camion au lieu d'être de 17, bien que le standard de MCK soit de 14 bcm
- le temps de cycle des bennes pour la distance contractuelle de 1.5 Km qui devrait être de 14 minutes au maximum est en moyenne de 18 minutes, ce qui réduit d'office la productivité, d'où la production
- les travaux de développement faits par le bulldozer et la niveleuse ont difficile à être quantifiées tandis que les heures machines sont comptabilisées.
- Les frais de management ne devraient contenir que le Management, la supervision et le staff, tandis que les assurances et autres coûts devraient revenir à la charge du contractant

4 PROJECTION DU CONTRAT AU METRE CUBE

4.1 GÉNÉRALITÉS

Contrairement au contrat par heures machines, le contrat au mètre cube devrait concerner les points ci-après :

1. Différents ratios pour le minerai et les stériles en tenant compte des niveaux d'exploitation et des remblais de destination
2. Distance maximale de transport (2 kilomètres selon les standards de MCK et RULCO), et même 1.5 Kilomètre conformément au contrat MCK- AMC de Novembre 2014
3. La Distance supplémentaire au-delà de celle convenue sera taxée avec un autre ratio
4. Les autres travaux de Génie Civil seront taxés par heure ou selon des conventions de surface ou Volume ; il s'agira de :
 - Débroussaillage
 - Enlèvement des morts terrains ou du terrain de Couverture
 - Travaux d'exhaures et connexes
 - Construction des ridelles sur les pistes
 - Construction des routes ou pistes de roulage
 - Déplacement de remblais
 - Alimentation du concasseur par la chargeuse
 - Chargement des concentrés dans les camions

4.2 PRÉSENTATION DES COÛTS STANDARDS

Ci- dessous, les différents prix par rubrique dans différents modèles de contrat au mètre Cube

Monthly Management Fee			
Description	Scenario 1 (\$)	Scenario 2 (\$)	Scenario 3 (\$)
Management	39 774.17	45 645.42	27 151.67
Supervision	17 688.0	25 212	17 688
Service Staff	14 124	21 252	12 804
Employés	24 048.05	32 930.67	20 148.37
Site office supplies	9 833.09	13 273.08	8 624.15
Transport sur Site	18 554.82	18 554.82	14 842.19
Transport hors Site	39 347.34	60 778.09	39 347.34
Ground Control	1 075.07	2 150.14	1 075.07
Fuel / Service Truck	7 970.38	13 283.97	7 970.38
Exhaure	0	0	0
Eclairage de Nuit	9 810.25	17 167.93	7 357.69
Informatique- Communication	2 418.65	2 732.75	2 418.65
Impression bureautique	1 056.33	1 056.33	1 056.33
Atelier Mécanique	10 403.27	10 403.27	9395.21
Assurances	5 270.83	5 270.83	5 270.83
Autres Charges	6 504.3	9 074.61	5 272.73
Total Mensuel	207 878.55	278 785.91	180 422.61
2. aménagement du remblai stérile : 21 410 \$/ ha			

On constate que les frais de Management ne devraient concerner que les rubriques Management, Supervision et service staff et qu'il y a lieu de charger le contractant des autres frais restants ou de les réduire par négociation

4.3 PROJECTION DU COÛT D'EXPLOITATION

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le contrat au mètre cube devrait être spécifié par phase et par niveaux en tenant compte de la nature des produits excavés et transportés, et aussi de la distance du trajet.

Le tableau ci-dessous représente la projection des coûts moyens pour la suite des travaux :

PHASE	NIVEAUX	NATURE PRODUITS	COUT (\$/ bcm)
I	1210 à 1140 RL	Minerai	6.69
	1210 à 1140 RL	stériles	6. 15
II	1200 à 1060 RL	Minerai	6.94
	1290 à 1060 RL	stérile	6.33
III	1150 à 980 RL	Minerai	7.85
	1220 à 980 RL	Stérile	6.53
Morts terrains			6.95
Débroussaillage			9.272 \$ / ha
Alimentation Concasseur			1.07 \$ / Tonne

4.4 EVALUATION DU COUT AVEC AUGMENTATION DE LA FLOTTE

Dans ce paragraphe, nous allons calculer le coût que donne la flotte projetée pour la phase 2, mais en gardant la forme actuelle du contrat ; ceci nous permettra de voir lequel des deux contrats sera avantageux

Le tableau ci-après donne le cout par engin et le cout total réalisé au mois d'octobre :

Equipments	Hourly Rate	hrs	Hourly Hire \$	Equip Fixed Fee \$
EX 49	83,62	557,7	46 718	32 298,05
EX 54	62,58	526,6	33 017	17 503,06
ADT 252	33,57	444	14 939	19 146,60
ADT 253	33,57	493	16 584	20 209,91
ADT 254	33,57	545	18 329	20 209,91
ADT 255	33,57	511	17 188	20 209,91
ADT 256	33,57	123	4 163	5 473,44
DZ 35	69,32	502,1	34 875	20 003,94
DZ 25	69,32	416,7	28 955	19 113,65
GR 29	24,29	446,9	10 879	21 191,01
WK 114	17,62	115,2	2 047	11 497,02
ST 144		247,1	247	
WL 22	52,8	450,9	23 860	28 768,84
WK 20	48,99	26	1 323	6 006,28
Hydraulic Hammer			-	4 083,75
			-	
EX 55	83,62	552	46 242	32 298,05
ADT 242	33,57	539	18 128	20 209,91
ADT 246	33,57	489	16 449	20 209,91
ADT 247	33,57	541	18 195	20 209,91
ADT 251	33,57	543	18 262	20 209,91
ADT 257	33,57	481	16 181	20 209,91
ADT 258	33,57	564	18 967	20 209,91
			405 548,38	399 272,88

On remarque que sur la flotte il y a eu ajout d'une pelle (EX 55) de type Hytachi 870 et de 6 bennes ADT 40 F

Les frais de management pour ce même mois sont repris dans le tableau ci-après :

Monthly Management Fee	USD
Management	26 510,00
Supervisory	14 307,10
Operators and Mechanics	163 134,21
Service Staff	10 164,00
Site office supplies	5 218,04
Transportation On site	9 232,19
Transportation to-and-from site	15 903,59
Fuel/service truck	6 386,38
Computing and communication	2 418,65
Printing & stationery	1 056,33
Workshop minor plant-set & tools (weld, comp, forklift, etc.)	5 981,27
Insurances	5 270,83
Offsite Costs	6 504,30
TOTAL	272 087

4.5 REPRÉSENTATION DE LA PRODUCTION ET CALCUL DU COÛT PAR BCM (COÛT AU MÈTRE CUBE)

Production		Distance
		Km
Waste	639314	0,647
Ore	36819	1,5
Total Tonnes	676133	
Total BCMs	325064	
Fuel total (litres)	220422	
Cout total fuel (USD)	325675,20	
Cout total (USD)	1401701,923	
Cout total par metre cube (USD/BCM)	4,31	

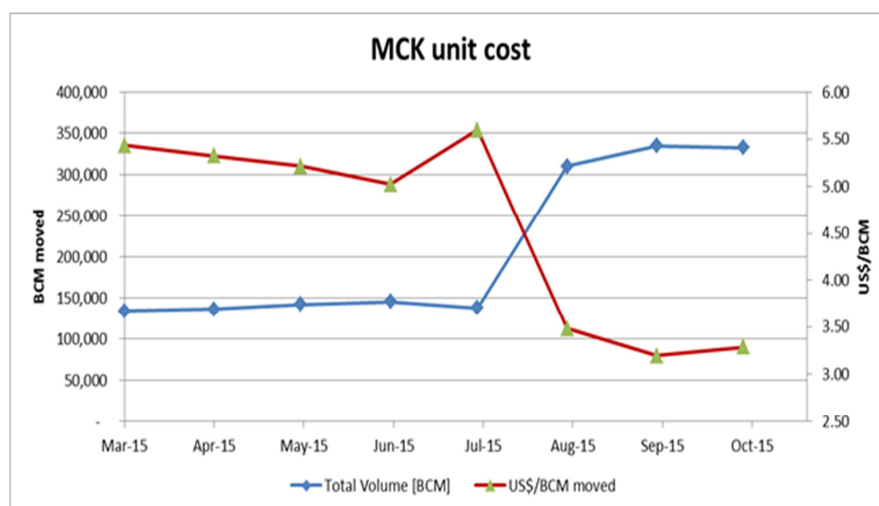
Constatation

Des chiffres ci-dessus représentés, on constate qu'avec l'ajout de la flotte comme prévu pour exploiter la phase deux, il ressort que :

La production moyenne passe de 136 082 mètres cube à 325 064 mètres cube, soit 2.38 fois plus

Le coût de production diminue de 7.1 à 4.31 dollars par mètre cube, soit 1.65 fois moins

Les courbes ci- après donnent l'allure de la variation des coûts de production de Mai à Octobre 2015



5 CONCLUSION

Pour une exploitation rentable de la deuxième phase de la mine à ciel ouvert de Shaba, et au regard des deux formes de contrat, il y a des avantages et inconvénients de part et d'autre.

Pour la forme de contrat par heures qui est la forme actuelle, l'avantage que l'on tire est que l'augmentation de la flotte de 5 à 11 bennes accroît la production de 2.38 fois et diminue le coût de 1.65 fois ; ce qui est avantageux pour la phase de découverte de la deuxième phase qui prévoit beaucoup de stériles ;

L'inconvénient de cette forme reste la lassitude et le manque d'efficacité du contractant dans ce sens qu'il a déjà rassuré son gain par le simple fait de maintenir ses engins disponibles.

Le contrat au mètre cube par contre motiverait le contractant à être efficace dans le sens que son gain sera proportionnel au volume excavé, par contre le coût sera constant au mètre cube ; bien que la production pourrait augmenter ; ceci pourrait être avantageux et égaler proportionnellement le coût du contrat par heures lorsque la flotte est maintenue à 11 bennes et que la production est maintenue au-delà de 528 000 mètres cubes par mois ; avec pour conséquence l'accélération de la découverte ; mais ceci exige la modification des Target

De ce qui précède, nous pensons que dans la phase actuelle où les Target de 2016 varient autour de 360 000 mètres cubes par mois, le contrat dans sa forme actuelle par heure de marche est avantageux quant au coût ; mais avec risque de non réalisation du Target ; ceci dit que le travail de supervision restera le cheval de bataille pour améliorer et rentabiliser la production.

REFERENCES

- [1] Wojciech Zukowski and Laura Klingberg: Geology, alteration and copper mineralisation at the Shaba and Safari deposits, Kapulo District, DRC Mawson West Ltd. Lubumbashi, 2014
- [2] Wojciech Zukowski : Annual Explo_Kapulo Mineralisation, Lubumbashi , 2012
- [3] Pierre Kamulete M. : Cours de Projets D'exploitation des Mines à Ciel Ouvert, Université de Lubumbashi, 2010
- [4] UN Curtin: Engineering Mine Planning Learning Guide University of Technology, Australia 2009.
- [5] JP Kayeye et JP MWAMBA : MCK KPIs template, Anvil Mining Congo, Kapulo Project, 2015.

Growth performances and serum biochemical response of broiler chickens fed on diet supplemented with *Tetrapleura tetraptera* fruit powder as substitute to antibiotic growth promoters

Kana Jean Raphaël, Mube Kuetché Hervé, Ngouana Tadjong Ruben, Komguep Ronald, Yangoue Antoine, Tsafong Francklin, and Teguia Alexis

University of Dschang, Faculty of Agronomy and Agricultural Sciences,
Department of Animal Productions,
Laboratory of Animal Production,
PO Box 70 Dschang, Cameroon

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: Due to the development of microbial resistance to antibiotics and their potential side effects in human, there is a growing interest in plant feed additives in livestock production. This study was designed to assess the effects of dietary inclusion of *Tetrapleura tetraptera* fruit powder on growth performances and serological profile of broiler chickens. A total of 192 day old Cobb 500 chicks were randomly assigned to 4 treatments of 48 chicks each. Negative control group (R0-) was fed basal diet without supplement, positive control group (R0⁺) was fed on control diet supplemented with 0.1% antibiotic, groups 3 and 4 were fed on control diet supplemented with 0.2% (0.2T) and 0.4% (0.4T) *T. tetraptera* fruit powder respectively. Throughout the study period, 0.2% *T. tetraptera* markedly ($P<0.05$) increased live body weight as compared to 0.4% and negative control diet. The lowest feed conversion ratio was recorded on chickens fed on antibiotic (2.02) and 0.2% *T. tetraptera* (2.03). Carcass yield significantly decreased ($P<0.05$) with 0.4% *T. tetraptera* fruit powder. The lowest cost of production was recorded with the lowest level (0.2%) of this phytobiotic. 5. Irrespective of the incorporation level, this phytobiotic decreased serum content of creatinine, alanine aminotransferase (ALAT) and aspartate aminotransferase (ASAT) and increased serum concentration of urea compared to the negative control diet. *T. tetraptera* powder at 0.2% could be used as feed additive to replace antibiotic growth promoter for a better growth performances and to produce antibiotics residues free chicken meat.

KEYWORDS: Antibiotic resistance, broiler chickens, feed additive, phytobiotic, *Tetrapleura tetraptera*.

1 INTRODUCTION

There is growing interest in herbal feed additive (phytobiotic) in livestock production due to development of microbial resistance to antibiotic feed additives [1]. Phytobiotic is any compound of vegetable origin which is incorporated in animal feed to improved growth performances through its anti-oxidative and antimicrobial action, palatability improvement and gut equilibrium maintenance [2], [3], [4], [5]. Under the term phytobiotic are gathered the herbs, spices as well as essential oils and extracts of plants [6]. Active properties of phytobiotics are composed of many molecules [7], [8] having different activities, including antibacterial properties [9], antioxidant activities [10], anti-inflammatory and immunomodulatory properties [8], [11].

Certain phytobiotics improve the activity of the digestive enzymes and the absorption of nutrients [12]. Kongmun *et al.* [13] reported that the use of garlic (*Allium sativum*) as feed additive, improved the digestibility of nutrients, growth and carcass characteristics of broiler. Uchechi *et al.* [14] reported that the fruit of *Tetrapleura tetraptera* known in Cameroun as "quatre cotés" possesses antibacterial compounds such as saponin, flavonoids, phenols, alkaloids, tannins. In addition, Jane *et al.* [15] reported that *T. tetraptera* fruit has antioxidant properties. Despite antibacterial, antioxidant and hepatoprotector

properties no study on its effects on animal production performances has been reported. The main objective of the present study is to evaluate the effects of dietary supplementation of *Tetrapleura tetraptera* fruit powder in order to mitigate the problems involved in antibiotic growth promoter in poultry industry.

2 MATERIALS AND METHODS

2.1 SITE OF STUDY

The study was conducted at the poultry unit of the Teaching and Research Farm of the University of Dschang, Cameroon. This farm is located at 5°26' North and 10°26' EST and at an altitude of 1420 m above sea level. Annual temperatures vary between 10°C and 25°C. Rainfall ranges from 1500 to 2000 mm per annum over a 9 months rainy season (March to November).

2.2 BIRDS, DIETARY TREATMENTS AND EXPERIMENTAL DESIGN

Tetrapleura tetraptera fruits were bought at the local market then ground in a Harmed mill, sieved and used as feed additives in broiler's feed. Antibiotics used (Doxycycline®) in positive control diet were bought from a local veterinary pharmacy. Three experimental diets were formulated from a negative control ratio (R0-) (Table 1) by incorporating 0.1% of antibiotic (R0+), 0.2% (0.2T) and 0.4% (0.4T) of *T. tetraptera* fruit powder.

Table 1: Proximate nutrients composition and price of experimental diets

Ingredients (%)	Starter	Finisher
Maize	59	60
Wheat grain	3	8
Soybean Meal 49	23	13
Coton meal	5	6
Fish meal	6	5.5
Borne meal	0.5	0.5
Osher shell meal	0.5	0.5
Palm oil	1	1.5
Premix 5%*	5	5
Total	100	100
Calculated proximate nutrients composition		
Metabolizable Energy (kcal/kg)	2961.71	3005.80
Crude Protein (%)	23.32	20.54
Energy/protein ratio	126.98	146.37
Lysine (%)	1.4	1.20
Methionine (%)	0.48	0.45
Calcium (%)	1.11	1.32
Phosphore (%)	0.54	0.58
Crude fibre (%)	4.76	4.91
Price (francs CFA/ kg)	311	283.75

Premix 5%: crude proteins=40%, Lys=3.3%, Meth=2.40%, Ca=8%, P=2.05%, metabolizable energy=2078kcal/kg

A total of 192 day old Cobb 500 strain broiler chicks were randomly assigned to four treatment diets including negative control diet in a completely randomized design with 48 birds per treatment. Each group was further sub divided into 4 replicates of 12 birds each (06 males and 06 females). Vaccination and other routine poultry management practices were maintained. Chicks were weighed at the beginning of the experiment and on a weekly basis thereafter. Feed and water were offered *ad libitum*.

2.3 GROWTH AND CARCASS TRAITS

Data on feed intake, body weight gain were collected and used to calculate feed conversion ratio and carcass characteristics parameters. At the end of the feeding trial (49 days) 10 birds (5 males and 5 females) from each treatment group were randomly selected, fasted for 24 hours and slaughtered for carcass evaluation. Blood from each slaughtered bird was collected for biochemical analysis.

2.4 SERUM BIOCHEMICAL ANALYSIS

From each slaughtered chicken, blood was collected in test tube and serum obtained after centrifugation was preserved at -20°C for the evaluation of biochemical parameters. Biochemical parameters consisted of total protein, albumin, globulin, aspartate aminotransferase (ASAT), alanine aminotransferase (ALAT), total cholesterol, HDL-cholesterol, LDL-cholesterol, triglyceride, urea and creatinin using colorimetric method as prescribed by the Chronolab® commercial kits (Barcelona, Spain).

2.5 COST OF PRODUCTION

The cost of a kg of feed was calculated based on the price of each ingredient as practiced in the local market. The cost of feed intake was obtained by multiplying the average feed intake by the price of a kg of the corresponding diet. The cost of production of a kilogram of live body weight was calculated by multiplying the cost of the kg of feed by the corresponding feed conversion ratio.

2.6 STATISTICAL ANALYSIS

The data were analyzed using Analysis of Variance of the Statistical Package for Social Science (SPSS 21.0) software. Duncan's multiple range tests was used for multiple comparisons. Probability values less than 0.05 were considered as significant [17].

3 RESULTS

3.1 PERFORMANCES AND CARCASS TRAITS

Table 2 summarizes the effects of *T. tetraptera* fruit powder on feed intake (FI), live body weight (BW), body weight gain (BWG) and the feed conversion ratio (FCR) of broiler chickens. All the studied parameters were significantly affected ($P < 0.05$) by the treatments. Throughout the production period (1 to 49 days), the lowest FI was recorded with the ration supplemented with *T. tetraptera* fruit powder as compared to negative and positive control diets. During brooding period (22 to 49 days), the lowest FI ($P > 0.05$) was recorded with ration supplemented with 0.2% of this phytobiotic.

Table 2: Effects of *T. tetraptera* on growth performances of broiler chickens

Study phases (days)	Rations					P
	RO-	RO+	0.2T	0.4T	SEM	
Feed intake (g)						
1 - 21	1003.29 ^{ab}	1024.38 ^a	992.96 ^b	965.542 ^c	25.26	0.001
22 - 49	4746.38 ^{ab}	4825.37 ^a	4483.54 ^c	4595.4 ^{bc}	182.59	0.002
1 - 49	5749.67 ^a	5849.74 ^a	5476.5 ^b	5560.94 ^b	196.13	0.001
Live body weight (g)						
1 - 21	763.917 ^a	774.604 ^a	717.104 ^b	618.979 ^c	66.09	0.000
1 - 49	2584 ^c	2929.83 ^a	2730.53 ^b	2069.74 ^d	431.16	0.000
Body weight gain (g)						
1 - 21	726.957 ^a	737.644 ^a	680.14 ^b	582.019 ^c	17.59	0.000
22 - 49	1820.08 ^c	2155.22 ^a	2013.42 ^b	1450.76 ^d	94.10	0.000
1 - 49	2547.04 ^c	2892.87 ^a	2693.57 ^b	2032.78 ^d	434.26	0.000
Feed conversion ratio						
1 - 21	1.38 ^c	1.39 ^c	1.46 ^b	1.65 ^a	0.12	0.000
22 - 49	2.62 ^b	2.24 ^c	2.23 ^c	3.11 ^a	0.40	0.000
1 - 49	2.26 ^b	2.02 ^c	2.03 ^c	2.74 ^a	0.31	0.000

a,b,c,d: Means with the same superscript on the same line are not significantly different ($P > 0.05$).

P= probability.

RO⁻ = control diet; RO⁺ = RO⁻ + 0.1% Doxycycline[®]; 0.2T= 0.2% of *T. tetraptera*; 0.4T= 0.4% of *T. tetraptera*

The highest BW and BWG were recorded with the antibiotic (RO⁺) irrespective of study phases. Chickens fed on diet supplemented with 0.2% phytobiotic during the growing phase (22-49 days) recorded higher BW and BWG as compared to negative control diet. Chickens fed on diets supplemented with 0.4% *T. tetraptera* recorded the lowest BWG as compared to the rest of experimental diets no matter the study phases.

During the brooding phase (1 to 21 days), 0.2 and 0.4% *T. tetraptera* induced a significant increase in FCR as compared to the negative (RO⁻) and positive (RO⁺) control diets (Table 3). During the growing phase (22 to 49 days) and throughout the production period (1 to 49 days), 0.2% *T. tetraptera* significantly ($P < 0.05$) decrease FCR as compared to 0.4% of *T. tetraptera* and the negative control diet (RO⁻). FCR increased with the increasing level of *T. tetraptera* whatever the phase of the study considered.

Table 3: Carcass characteristics of broilers fed on diets supplemented with *T. tetraptera* fruit powder

Carcass parameters (%BW)	Treatments				SEM	P
	RO ⁻	RO ⁺	0.2T	0.4T		
Carcass yield	74.29 ^b	76.34 ^a	74.32 ^b	69.97 ^c	2.82	0.000
Head	2.28 ^a	2.00 ^b	2.29 ^a	2.41 ^a	0.21	0.000
Leg	3.43 ^a	3.35 ^a	3.71 ^a	3.47 ^a	0.55	0.551
Liver	1.83 ^b	1.61 ^c	1.75 ^{bc}	1.98 ^a	0.23	0.008
Heart	0.45 ^a	0.46 ^a	0.52 ^a	0.50 ^a	0.48	0.322
Pancreas	0.16 ^c	0.19 ^{bc}	0.24 ^b	0.29 ^a	0.08	0.002
gizzard	1.57 ^{bc}	1.42 ^c	1.65 ^b	1.85 ^a	0.23	0.005
Abdominal fat	1.68 ^a	1.38 ^a	1.60 ^a	1.50 ^a	0.67	0.844

a,b: means along the same row with different superscripts are significantly different ($P < 0.05$).

RO⁻= negative control diet; RO⁺= positive control diet; 0.2T = 0.2% of *T. tetraptera*; 0.4T= 0.4% of *T. tetraptera*

The effect of *T. tetraptera* fruit powder on the carcass yield, carcass cuts and offal weight of the broiler are shown in Table 4. Apart from the relative weight of abdominal fat, heart and leg, all other carcass parameters studied ($P < 0.05$) were significantly affected by the antibiotic and *T. tetraptera* powder in the diet. The inclusion of 0.4% *T. tetraptera* fruit powder in the ration induced a significant reduction in carcass yield as compared to all other rations. The highest carcass yield was

recorded with antibiotic followed by 0.2% *T. tetrapleura* fruit powder. The relative weight of pancreas, gizzard and liver increased with increasing level of this phytobiotic in the ration.

Table 4: Effects of *T. tetrapleura* on production costs of broiler chickens

Study phases (days)	Treatments					
	R0-	R0+	0,2T	0,4T	SEM	P
Cost of feed intake (FCFA)						
1 - 21	312.02 ^b	395.41 ^a	310.80 ^b ^c	304.15 ^c	4.11	0.000
22 - 49	1346.79 ^b	1731.10 ^a	1290.14 ^c	1340.71 ^b	31.32	0.000
1 - 49	1658.81 ^b	2126.51 ^a	1600.93 ^b ^c	1644.85 ^{bc}	30.60	0.000
Cost of production of kg of live body weight (FCFA)						
1 - 21	429.44 ^c	536.36 ^a	457.11 ^b	522.87 ^a	12.45	0.000
22 - 49	743.17 ^c	803.65 ^b	640.89 ^d	907.15 ^a	27.23	0.000
1 - 49	652.50 ^c	735.23 ^b	594.41 ^d	798.51 ^a	16.22	0.000

a, b, c: means along the same row with different superscripts are significantly different ($P < 0.05$).

3.2 COST OF PRODUCTION

Whatever the phase of the study, the ration supplemented with antibiotic recorded the highest ($P < 0.05$) cost of the feed intake and production of a kg of live body weight. Supplementing the rations with *Tetrapleura tetrapleura* induced a significant ($P < 0.05$) decrease in the cost of feed intake. The same trend was observed with the cost of production of a kg of live body weight with significant ($P < 0.05$) decrease with 0.2% of this phytobiotic as compared to all other treatments in growing phase and all over the study period.

3.3 SERUM BIOCHEMICAL PARAMETERS

The supplementation of the ration with *T. tetrapleura* fruit powder and the antibiotic induced a significant reduction in the serum content of creatinine as compared to the negative control (Figure 1a). The serum content of creatinine tends to drop while the urea content tends to increase with increasing level of this phytobiotic in the ration. This phytobiotic does not have any significant effect ($P > 0.05$) on serum protein content which tends to decrease with its increasing level in the rations (Figure 1b).

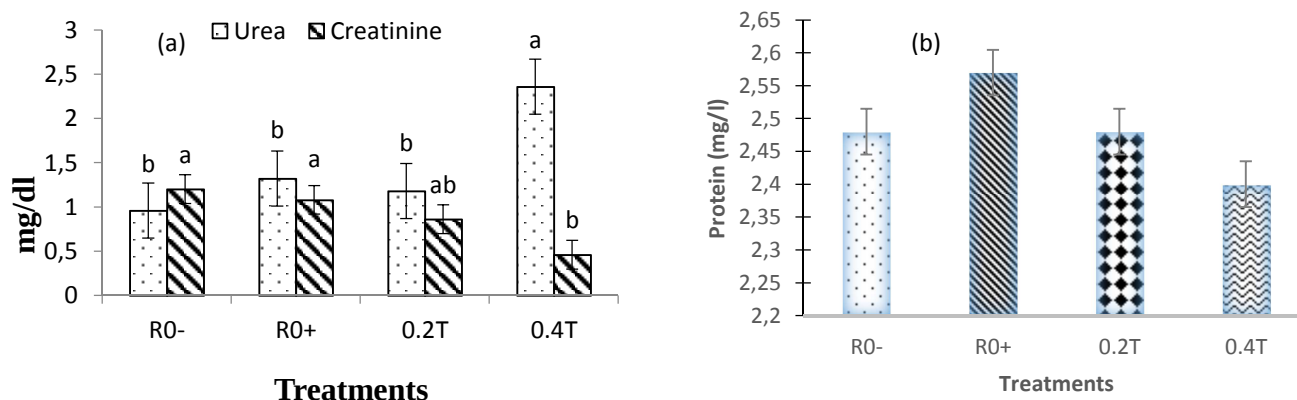


Figure 1: Variation of (a) urea and creatinine, and (b) protein content of broiler as influenced by incorporation rate of *Tetrapleura tetrapleura* in the diet

The effect of *T. tetrapleura* fruit powder on serum contents of ALAT and ASAT are shown in Figure 2a and 2b. Ration supplemented with antibiotic induced a significant ($P < 0.05$) increase in of ALAT content as compared to negative control and rations supplemented with phytobiotic. ALAT content tends to decrease with increasing level of this phytobiotic in the ration. The fruit powder of *T. tetrapleura* and antibiotic significantly decreased serum content of ASAT which also tends to decrease with increasing level of this phytobiotic in the ration.

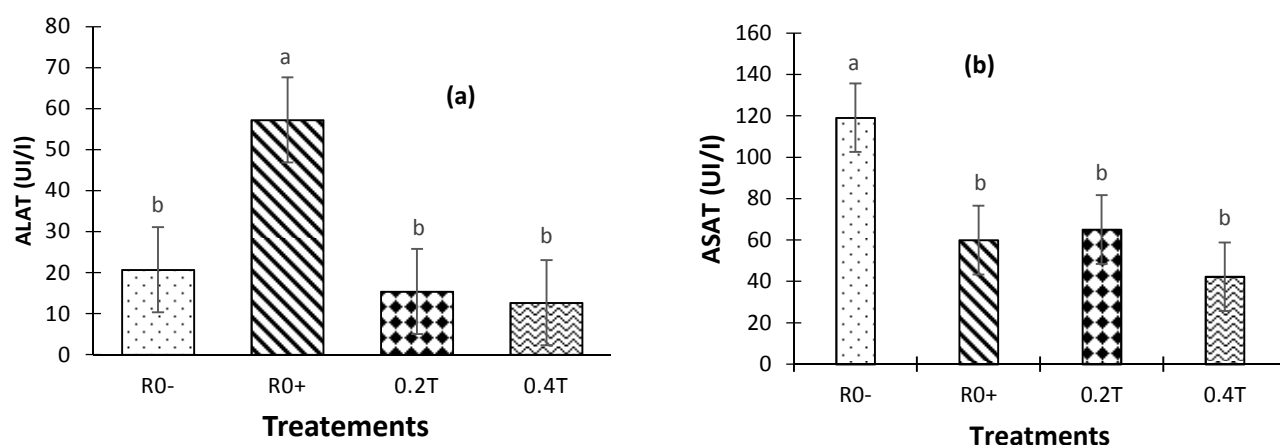


Figure 2: Serum concentration of (a) ALAT and (b) ASAT of broiler as affected by incorporation of *T. tetraptera* in the diet

4 DISCUSSION

This study revealed that 0.2 and 0.4% *T. tetraptera* fruit powder induced significant ($P < 0.05$) decreased in feed intake of about 4.8% and 3.3% respectively as compared to the negative control diet. These results are in close agreement with the findings of Nweze and Nawankwagu [18] which revealed that the inclusion of 4g/l of aqueous extract and 0.04% of fruit powder of this phytobiotic in water and food respectively induced a reduction of feed intake in broiler chickens. The decrease of the feed intake recorded in these studies could be due to its strong odor which might have negatively affected appetibility. The present result contradicted the findings of Ghalib [19] and Galib *et al.* [20] who respectively used anise (*Pimpinella anisum* L.) and pepper (*Capsicum annum*) as feed additives and recorded an increase in feed intake in broiler chickens. These authors explained this feed intake improvement by the appetite stimulative effect of the active ingredients such as the anethol and the borneol contained in anise and the capsaicine in pepper.

During the brooding phase (1-21 days) live body weight (BW) and body weight gain (BWG) tend to decreased with the increasing level of *T. tetraptera* in the ration. This reduction of growth is similar to the results reported by Al Homidan [21] in chicks from 1 to 4 weeks fed on diet supplemented by ginger powder at 60g/kg. Sarica *et al.* [22] also recorded a drop of broilers BW in the first 14 days when fed on diet supplemented by 1g of garlic powder per kg of feed. This may be caused by the antinutritional factor such as tannin, which is responsible for reducing body weight in young birds [23]. Young birds are more sensitive to antinutritional factors than older ones. Throughout the production period and during growing phase, birds fed on ration supplemented with 0.2% of *T. tetraptera* recorded higher BW and BWG compared to 0.4% of this phytobiotic and negative control diet. This improvement of the BW could be due to the antimicrobial and antioxidant activities of this spice. This result is similar to those of Onu [24] and Vivian *et al.* [25] who respectively reported that the powder of ginger and the aqueous extract of ginger significantly improved the growth performances of chickens.

Increasing level of this phytobiotic tends to decrease growth performances of chickens. This result is similar to results obtained by Cross *et al.* [26] and Odoemelam *et al.* [27] who respectively reported that the incorporation of the thyme (*Thymus vulgaris*) and *Ocimum gratissimum* L. essential oil in feed decreased broiler body weight. Odoemelam *et al.* [28] reported that the favorable attributes of spices can be masked when they are used in high proportion because of the marked antinutritional effects generally composed of tannins and saponins. These compounds can affect the use of the nutriment and depress growth [27]. Furthermore, Serrano *et al.* [29] work revealed that even if tannins and saponins inhibit bacteria growth they can also inhibit the enzymes in the digestive tract and reduce the availability of certain minerals and feed proteins for the host.

Diet supplemented with *T. tetraptera* recorded higher feed conversion ratio as compared to other diets during the brooding phase. This can be explained by the fact that feeding young birds with antimicrobial feed additives can disturb the installation of the digestive micro biota leading to a negative effect on the development of the digestive tract [30] and consequently on overall digestion of feed. During the growing phase and throughout the production period, FCR was very low with 0.2% of *T. Tetraptera* fruit powder as compared to negative control diet and ration supplemented with 0.4% of this

phytobiotic. This lower FCR is related to the higher weight gain values recorded in birds fed on 0.2% of this supplement. Windisch *et al.* [6] reported that phytobiotics increased stabilization of intestinal health, animals are less exposed to microbial toxins and other undesired microbial metabolites such as ammonia and biogenic amines. As a result, animals are relatively relieved from immune defense stress during critical situations and there is increase availability of essential nutrients for absorption, thereby helping the animals to grow better within the framework of their genetic potential. Similar results were obtained by Al-Kassie *et al.* [31] with *Capsicum annum* in broiler diet. The increase of broiler FCR on diet supplemented with the highest level (0.4%) of phytobiotic can be related to the large amount of antinutritional content and activity of the secondary metabolites that it contains. Basmacioglu *et al.* [32] reported that feed additives positive effect can be reversed when there are given in high quantities.

The production cost of live body weight was significantly ($P < 0.05$) low with rations supplemented with 0.2% *T. tetraptera*. These results contradict the findings of Nweze and Nawankwagu [17] who reported high production costs with diet supplemented with phytobiotic. The difference can be the consequence of the technological processes of extraction of the phytobiotic done by these authors whereas the phytobiotic used in the present study did not undergo any technological processing which is costly.

No significant difference was recorded between birds fed on 0.2% phytobiotic and negative control diet for carcass yield, head, legs, liver, heart and abdominal fat weight. These results are in closed agreement with those of Dieumou *et al.* [33] and Onu [24] who reported no significant effect on carcass yield and carcass cut when birds were fed on ginger essential oil. The rations supplemented by antibiotic and *T. tetraptera* fruit powder induced an increase in the relative weight of the pancreas as compared to the ration without feed additive. The increase in pancreas weight might suggest that this organ released great quantities of digestive enzymes with increasing level of the phytobiotic in the ration. Gizzard relative weight increased with the increasing level of *T. tetraptera* suggesting an increase in gizzard activity with this phytobiotic in the ration.

There was no significant effect of this phytobiotic on serum contents of transaminases (ALAT and ASAT) and creatinine of chickens fed on 0.2% of phytobiotic and negative control diet. This result suggests that 0.2% of this phytobiotic is not toxic to broiler. In addition, a reduction of the concentration of these indicators of toxicity could be related to the hepatoprotector activity of the *T. tetraptera*. These are in closed agreement with the results of Rehman *et al.* [34] who reported that the mixture of the aqueous extracts of medicinal plants (garlic, aloe vera, ginger) led to a reduction in ALAT and ASAT serum concentration in chickens. Urea concentration of birds fed on 0.2% *T. tetraptera* fruit powder was comparable with that of chickens fed on negative and positive control rations (R0- and R0+). This result is similar to the findings of Vivian *et al.* [25].

5 CONCLUSION

Adding 0.2% of *Tetrapleura tetraptera* fruit powder in broiler diet as feed additive improved growth performance stabilized blood components of broiler and reduced cost of production. Hence, *Tetrapleura tetraptera* fruit powder at 0.2% could be used as alternative to the antibiotics growth promoters in poultry production during growing phase.

REFERENCES

- [1] MUNEENDRA, K., VINOD, K., DEBASHIS, R., RAJU, K. and SHALINI, V. (2014). Application of Herbal Feed Additives in Animal Nutrition - A Review. *International Journal of Livestock Research*, 4 (9): 1-8. doi:10.5455/ijlr.20141205105218
- [2] JITHENDRAN, K.P. (1997). Clinical studies on coccidiosis in Angora rabbits. Blue Cross Book (Hoechst), 8: 37-39.
- [3] ATHANASIADOU, S., GITHIORI J. and KYRIAZAKIS, I. (2007). Medicinal plants for helminthes parasite control: facts and fiction. *Animal*, 1 (9): 1392–1400.
- [4] OKO, O.O.K. and AGIANG, E.A. (2009). Phytochemical evaluation of 3 extractants of *Aspilia africana* leaves. Proceeding of the International conference on Global food crisis, April 19 -24th, FUT, Owerri, Nigeria, Pp 87-90.
- [5] GAKUNGA, J.N., MIRIANGA, B., MUWONGE, H., SEMBAJWE, L.F. and KATEREGGA, J. (2013). Antidiarrheal activity of ethanolic fruit extract of *Psidium guayava* (Guava) in castor oil induced diarrhea in albino rats. *National Journal of Physiology and Pharmacology*, 3(2): 191-197.
- [6] WINDISCH, W. M., SCHEDULE, K., PLITZNER, C. and KROISMAYR, A. (2008). Use of phytogenic products as feed additives for swine and poultry. *Journal of Animal Science*, 86: 140–148.
- [7] BAKKALI F., AVERBECK, S., AVERBECK, D. and IDAOMAR M. (2008). Biological effects of essential oils. *A Review of Food and Chemical Toxicology*, 46: 446-475.
- [8] WINK, M. (2008). Evolutionary advantage and molecular modes of action of multi-component mixtures in phytomedicine. *Current Drug Metabolism*, 9: 996-1009.

- [9] VUKIĆ-VRANJEŠ, M., TOLIMIR, N., VUKMIROVIĆ, Đ., ČOLOVIĆ, R., STANAČEV, V., IKONIĆ, P. and PAVKOV S. (2013). Effect of phytogenic additives on performance, morphology and caecal microflora of broiler chickens. *Biotechnology in Animal Husbandry*, 29 (2): 311-319.
- [10] RAHIM, A., MIRZA, A. and DANESHYAR, M. (2011). Growth performance and some carcass characteristics in broiler chickens supplemented with Thymus extract (*Thymus vulgaris*) in drinking water. *Journal of American Science*, 7(11): 400-405.
- [11] ROMIER, B., SCHNEIDER, Y.J., LARONDELLE, Y. and DURING, A. (2009). Dietary polyphenols can modulate the intestinal inflammatory responses. *Nutrition Reviews*, 67: 363-378.
- [12] LI, S.Y., RU, Y.J., LIU, M., XU, B., PEALRON, A. and SHI, X.G. (2012). The effect of essential oils on Performance, immunity and gut microbial population in weaner pigs. *Livestock. Science*, 145: 119–123.
- [13] KONGMUN, P., WANAPAT, M., PAKDEE, P., NAVANUKRAW, C. and YU, Z. (2011). Manipulation of rumen fermentation and ecology of swamp buffalo by coconut oil and garlic powder supplementation. *Livestock Science*, 135: 84-92.
- [14] UCHECHI, N., EKWENYE, CHIGOZIE, F. and OKORIE, (2010). Antibacterial activity of *Tetrapleura tetraptera* taub. extracts. *International Journal of Pharmacology and Biological Sciences*, 1(4): 734-741.
- [15] JANE, T.N., MATTHIAS, O.A. and IKECHUKWU, F.U. (2014). Antioxidant and Hepatoprotective Activity of Fruit Extracts of *Tetrapleura tetraptera* (Schum and Thonn) Taubert. *Jordan Journal of Biological Sciences*, 7(4): 251 – 255.
- [16] STEEL, R.G.D. and TORRIE, J.H. (1980). Principles and Procedures Statistic. A biometrical approach. 2nd (ed.) MC Grow hill Books. Co.inc/New York U.S.A.
- [17] NWEZE, B.O. and NAWANKWAGU, A.E. (2011). Effects of Tetrapleura under different feeding regimes on growth performance and gut microbes of broiler chicken. Proceedings of 35th Conference of Nigeria Society of Animal Productions. 14-17 March, University of Ibadan, Nigeria, 299.
- [18] GHALIB AM AL-KASSIE, (2008). The Effect of Anise and Rosemary on Broiler Performance. *International Journal of Poultry Science*, 7 (3): 243-245.
- [19] GALIB, A.M., AL-KASSIE, MAMDOOH, A.M., AL-NASRAWI and SABA, J.A. (2011). The effects of using hot red pepper as a diet supplement on some performance traits in broiler. *Pakistan Journal of Nutrition*, 10 (9): 842-845.
- [20] AL-HOMIDAN, A. (2005). Efficacy of using different sources and levels of *Allium cepa*, *Allium sativum* and *Zingiber officinale* on broiler chicks performance. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 12: 96-102.
- [21] SARICA, S., CIFTCI, A., DEMIR, E., KILINC, K. and YILDIRIM, Y. (2005). Use of an antibiotic growth promoter and two herbal natural feed additives with and without exogenous enzymes in wheat based broiler diets. *South African Journal of Animal Science*, 35: 61-72.
- [22] SHARIFI, S. D., KHORSANDI, S. H., KHADEM, A. A., SALEHI, A. and MOSLEHI, H. (2013). The effect of four medicinal plants on the performance, blood biochemical traits and ileal microflora of broiler chicks. *Veterinarski Arhiv*, 83 (1), 69-80,
- [23] ONU, P.N. (2010). Evaluation of two herbal spices as feed additives for finisher broilers. *Biotechnology in Animal Husbandry*, 26 (5-6): 383-392.
- [24] VIVIAN, U., OLEFORUH-OKOLEH, HARRIET, M., NDOFOR-FOLENG, SOLOMON, O., OLORUNLEKE, and JOESPH, O.U. (2015). Evaluation of Growth Performance, Haematological and Serum Biochemical Response of Broiler Chickens to Aqueous Extract of Ginger and Garlic. *Journal of Agricultural Science*, 7 (4): 167-173.
- [25] CROSS, D.E., MCDEVITT, R.M., HILLMAN, K. and ACAMOVIC, T., (2007). The effect of herbs and their associated essential oils on performance, dietary digestibility and gut microflora in chickens from 7 to 28 days of age. *British Poultry Science*, 48: 496-506.
- [26] ODOEMELAM, V.U., NWAOGU, K.O., UKACHUKWU, S.N., ESONU, B.O., OKOLI, I.C., ETUK, E.B., NDELEKWUTE, E.K., ETUK, I.F., OGBUEWU, I.P. and KADURUMBA, O.E. (2012). Performance of Broiler Chickens Fed *Ocimum gratissimum* L. Supplemented Diets. Proceeding of the 6th Annual Conference of Nigeria Society for Indigenous Knowledge and Development. (NSIKAD). June 5th -7th MOUA, Umudike. Pp. 15-16.
- [27] ODOEMELAM, V.U., NWAOGU, K.O., UKACHUKWU, S.N., ESONU, B.O., OKOLI, I.C., ETUK, E.B., NDELEKWUTE, E.K., ETUK, I.F., ALADI, N.O. and OGBUEWU, I.P. (2013). Carcass and Organoleptic assessment of Broiler feed *Ocimum gratissimum* Supplemented diets. *Proceedings of the 38th Conferences of Nigeria Society of Animal Production. 17-20th March, 2013, Rivers State University of Sciences and Technology, Port Harcourt. Pp. 767-770.*
- [28] SERRANO, J., PUUPPONEN-PIMIA, R., DAUER, A., AURA, A.M. and SAURA-CALIXTO, F. (2009). Tannins: Current knowledge of food sources, intake, bioavailability and biological effects. *Molecular Nutrition and Food Research*, 53: S310-S329.
- [29] GUARDIA, S. (2011). Effets de phytobiotiques sur les performances de croissance et l'équilibre du microbiote digestif du poulet de chair. Thèse de doctorat de l'Université François Rabelais, Tours, France, 472p.
- [30] AL-KASSIE, G.A.M., AL-NASRAWI, M. A.M and AJEENA, S.J. (2011). The Effects of Using Hot Red Pepper as a Diet Supplement on Some Performance Traits in Broiler. *Pakistan Journal of Nutrition*, 10 (9): 842-845

- [31] BASMACIOGLU MALAYOGLU, H., BAYSAL, S., MISIRLIOGLU, Z., POLAT, M., YILMAZ, H. and TURAN, N. (2010). Effects of Oregano Essential Oil with or without Feed Enzymes on Growth Performance, Digestive Enzyme, Nutrient Digestibility, Lipid Metabolism and Immune Response of Broilers fed on wheat soybean meal diets. *British Poultry Science*, 1: 67-80.
- [32] DIEUMOU, F.E., TEGUIA, A., KUIATE, J.R., TAMOKOU, J.D., FONGE, N.B. and DONGMO, M.C. (2009). Effects of ginger (*Zingiber officinale*) and garlic (*Allium sativum*) essential oils on growth performance and gut microbial population of broiler chickens. *Livestock research for rural development* 21(8) Volume21, Article #131. Retrieved November 19, 2016, from <http://www.lrrd.org/lrrd21/8/dieu21131.htm>
- [33] REHMAN, S., DURRANI, F.R., CHAND, N., KHAN, R.U. and FAWAD, U.R. (2011). Comparative efficacy of different schedules of administration of medicinal plants infusion on hematology and serum biochemistry of broiler chicks. *Research Opinions in Animal and Veterinary Sciences*, 1: 8-14.

Le programme formaliste de David Hilbert

LULA BABOLE A.-Roger¹⁻²

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The research shows clearly that the HILBERT's program look at to obtain the formalisms of the formal theories. This program stamp a fertile optimism of symbolic which allowed to create the logics and mathematics formalisms, and there formal and automatable manipulation. So the formalism is the image of thinking; in this sense the forms become the work matter.

KEYWORDS: Fondationnal research, formalism, finitism, metamathématique, coherence, existence, decidability, epsilon.

RÉSUMÉ: L'étude montre clairement que le programme de HILBERT cherche à obtenir les formalismes des théories formelles. Ce programme marque un optimisme fécond du symbolique permettant de créer les formalismes logiques et mathématiques ainsi que leur manipulation formelle et automatisable. Donc, les formalismes sont des images des pensées ; en ce sens les formes deviennent la matière du travail.

MOTS-CLEFS: recherche fondationnelle, formalisme, finitisme, metamathématique, cohérence, existence, décidabilité, epsilon.

INTRODUCTION

L'idée fondamentale du formalisme de HILBERT consiste à réduire la déduction à un procédé mécanique et aveugle faisant abstraction du sens. La théorie des preuves à la HILBERT devait permettre de récupérer une théorie douteuse, celle de CANTOR afin d'expliquer toutes sortes de choses fort : les nombres, les fonctions, etc. En clair, elle impliquait une croyance en la perfection d'une axiomatique universelle pour toutes les mathématiques.

UNE MISE AU POINT SUR LE PROGRAMME DE HILBERT

Le programme formaliste de HILBERT est à appréhender dans le contexte des recherches fondationnelles. Il se situe dans une longue tradition commençant par l'arithmétisation de l'analyse mathématique, en éliminant petit à petit, par exemple, les grandeurs infinies dans les définitions de limites. Ce programme réussit enfin à construire toute la mathématique de l'époque, sur une théorie des nombres naturels et des ensembles des nombres naturels, réduisant au fond le problème de la consistance de la mathématique à celle de la théorie, comme l'*arithmétique de PEANO* de second ordre.

Progressant davantage dans la tradition des recherches fondationnelles, HILBERT n'a pas tenu à l'évidence la possibilité de réduire la théorie des nombres naturels. En clair, il convient de réduire la notion de nombre à celle d'ensemble telle que proposée par le logicisme de FREGE et de RUSSELL. Pour HILBERT, cela paraîtrait un pas allant dans une mauvaise direction. Autrement dit, cela serait un essai de réduction de quelque chose de relativement simple, à quelque chose ayant une idée moins claire. Tel est, par exemple, le cas des antinomies de la théorie des ensembles. Il faut en plus se dire que la théorie des nombres naturels contient encore un appel à l'infini ; en particulier en utilisant la loi du tiers exclu, et cela lorsqu'on quantifie

sur tous les nombres naturels. Le programme formaliste de HILBERT se préoccupait de justifier pareil type de raisonnement dans une perspective restreignant la mathématique finitaire, qui s'intéresse aux configurations finies et aux opérations constructives sur elle, est acceptée comme théorie formelle vraie. Pour HILBERT, il y avait lieu de montrer par raisonnement finitaire que l'utilisation de la mathématique transfinie établissant les résultats qui se traduisent déjà dans la mathématique finitaire, donne des résultats corrects d'un point de vue finitaire. Donc, la théorie de la démonstration se présente comme un outil pour le programme hilbertien.

Etant donné qu'on ne trouve pas de modèle finitaire de l'arithmétique de PEANO, il faudrait, d'un point de vue finitaire, pouvoir prouver la vérité de toutes les formules ayant un contenu finitaire et étant prouvables dans la version formalisée de l'arithmétique de PEANO. Une telle démarche nous invite fondamentalement à démontrer la consistance du système formel, qui résulte de la détermination prise par HILBERT à construire des formules à contenu finitaire.

En cela, le formalisme hilbertien ne justifie pas que la mathématique est un simple jeu ayant des formules sans contenu.

Des questions concernant le programme formaliste hilbertien sur la vérité et la fausseté, se situent dans la partie du système formel correspondant à la mathématique finitaire. D'un point de vue formaliste, on ne retient que les formules qui n'expriment pas de propositions finitaires. Pour HILBERT, ces formules sont ajoutées comme éléments *idéaux* permettant une manipulation plus aisée et dont le contenu réel s'exprime dans sa partie finitaire ou partie *réelle* d'après HILBERT.

Par rapport à l'intuitionnisme mathématique, il faut remarquer que HILBERT a adopté à certains égards une position philosophique plus radicale. Evidemment, cette radicalité montre d'une part que la mathématique finitaire restreint l'approche de la mathématique classique. Cette restriction dépasse largement la restriction que l'intuitionnisme mathématique a proposée. D'autre part, pour HILBERT, il y aurait lieu de conserver, comme éléments idéaux, des parties de la mathématique classique (loi du tiers exclu ou principe de la preuve indirecte) qui, dans leurs formes non restreintes, sont rejetées par les intuitionnistes. HILBERT s'opposait donc à l'idée de revoir la mathématique dans un développement constructif aussi loin que possible.

Quant à la logique interne, il sied de noter que ce n'est pas une logique ordinaire ni une logique formelle jouant tout rôle, c'est-à-dire ce qui prouve les théorèmes dans une théorie mathématique donnée, est seulement auxiliaire. Mais la logique interne, souvent identifiée à la métamathématique interne, devrait être considérée comme une « intramathématique » dans le sens que la consistance interne des axiomes est plus importante que la déduction des théorèmes particuliers [1].

D'après Y. GAUTHIER, la théorie de la démonstration est perçue comme la théorie des systèmes formels ; c'est donc la véritable incarnation du formalisme. De ce point de vue, la logique interne est l'opposé du formalisme. Le programme formaliste de HILBERT a pu se formuler dans les termes suivants : la logique interne finitaire vise à réduire la logique formelle infinitaire de la même manière qu'une théorie mathématique finitaire (par exemple l'arithmétique) réduit les problèmes infinis de la théorie des formes ou de la théorie des invariants à un calcul fini [1].

Du point de vue philosophique, le programme formaliste hilbertien est défaillant ; en ce sens que la marque de ce formalisme laisse certaines formules sans interprétation, comme éléments idéaux. D'après PRAWITZ, il est clair qu'en pratique, c'est-à-dire dans les tentatives d'exécution dudit programme, HILBERT lui-même et la plupart de ses successeurs, ont essayé de donner à chaque formule démontrable, une interprétation constructive pouvant dépendre de la démonstration ; mais ces interprétations ont toujours semblé plus *ad hoc* que les interprétations intuitionnistes correspondantes.

LE DEUXIÈME PROBLÈME DE HILBERT

La quête hilbertienne des fondements des mathématiques débute dans les années 1898-1899 en revisitant systématiquement la géométrie euclidienne¹. En ce moment, il fallait à la fois étudier les relations de dépendance à établir

¹ La géométrie euclidienne sert de modèle de rigueur pour les mathématiques par la clarté de ses conclusions et la sévérité de ses méthodes d'approche. La géométrie euclidienne de R^n est l'étude des propriétés métriques des figures de R^n (mesure d'un angle, longueur, aire). Elle vérifie le 5^e postulat d'Euclide : Par chaque point x non situé sur une droite d passe une et seule droite parallèle à d dans le plan formé par d et x . La découverte par LOBATCHEVSKI (1829) et BOLYAI (1831) des géométries ne satisfaisant plus ce 5^e postulat fut une révolution dans la géométrie.

entre les axiomes et analyser les conséquences de l'abandon ou de la modification d'un ou de plusieurs de ces axiomes pour examiner les géométries pouvant en découler.

1 LA SYSTÉMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans le cadre des fondements des mathématiques, on retient précisément le point relatif à la modification des axiomes : comment s'assurer que l'ensemble d'axiomes résultant de ces modifications est non contradictoire, et qui définit ainsi une géométrie. Donc, il faut trouver une structure mathématique (pré existante) qui rend les axiomes vrais.

D'où, la preuve de l'« existence » des géométries non euclidiennes pour interpréter les notions de point et de droite, de manière non conventionnelle dans les structures qui ne concernent pas le plan euclidien.²

Les géométries non euclidiennes sont sorties en modifiant le cinquième postulat d'EUCLIDE [2]. Par la géométrie riemannienne, le postulat subit la modification suivante : Pour tout point, P, extérieur à une droite, passe une et une seule droite parallèle à d. Dans la géométrie sphérique, le cinquième postulat contraint la modification suivante : au lieu qu'il y ait une et une seule droite passant par P et parallèle à cette droite, il n'y a aucune ; ceci représente un modèle très simple : la géométrie sphérique. On pose S la surface d'une certaine sphère et les points de la géométrie sont interprétés comme les points, de la sphère et les droites, les géodésiques de la sphère. Dans ce sens, on peut prouver que les axiomes de la géométrie sphérique sont vrais. Donc, on y montre que : 1) l'ensemble des axiomes de la géométrie sphérique est non contradictoire, et 2) le postulat des parallèles n'est pas dépendant des autres axiomes.

Les résultats mathématiques 1) et 2) dépendent de l'existence préalable de la sphère, ce n'est pas une hypothèse. Il se dégage que la sphère se définit en fonction des nombres réels et le nombre réel est un ensemble de rationnels ; et le nombre rationnel est défini par une relation d'équivalence sur les entiers. D'où, le support final du modèle est l'arithmétique ayant la quantification de premier et de deuxième ordre.

Pour assurer l'existence de la géométrie sphérique (et bien d'autres modèles d'ailleurs), il faut donc seulement prouver que l'arithmétique (du premier et du deuxième ordre) est dénuée de contradictions.

Un exemple en est la géométrie hyperbolique ; le plan hyperbolique peut se définir comme suit : les points sont les points intérieurs d'un disque plein de centre O et bordé par un cercle ; les droites sont les droites passant par O et les cercles orthogonaux au cercle. Rajoutant au plan réel usuel un point à l'infini, dans chaque direction, on obtient un espace appelé le plan projectif réel : deux droites distinctes ont toujours un point en commun. Plus généralement, une géométrie plane projective consiste en la donné de 2 ensembles P et Q et d'un sous-ensemble T de $P \times Q$. Les éléments de P sont appelés points, les éléments de Q droites. Le point x est dit assujetti aux trois conditions suivantes : 1) Par 2 points différents passe une et une seule droite ; 2) Toute droite a au moins 3 points ; 3) Deux droites distinctes se coupent en un seul point.

²En géométrie, c'était en vain qu'on cherchait depuis les grecs de dériver le 5^{ème} postulat (axiome) d'EUCLIDE, dit « postulat des parallèles », des autres axiomes. Pour cela, il y avait souvent des tentatives de prouver ce postulat à partir des autres, ce fait l'aurait transformé en un simple théorème. Mais on assistait au 19^{ème} siècle à une révolution dans la géométrie s'exprimant en termes de crise du fondement des mathématiques créant ainsi les géométries non euclidiennes. En 1820, GAUSS, parrain de la révolution en géométrie, a développé le plus profondément la théorie des surfaces en introduisant notamment la courbure totale d'une surface en un point. Devant cette question pressante sur le 5^{ème} postulat, GAUSS dit alors que : « Pour la théorie des parallèles, nous ne sommes pas plus avancés qu'EUCLIDE, c'est une honte pour les mathématiques ». LOBATCHEVSKI (1829) et BOLYAI (1859) inventaient de nouvelles géométries avec des axiomes différents et incompatibles entre eux. Dans la géométrie de RIEMANN, par exemple, le plan devient la surface d'une sphère, les points sur le plan deviennent les points sur cette surface et les droites des grands cercles.

Deux segments si on les prolonge se rencontrent. Pour l'opinion courante en pensai que les axiomes de la géométrie pouvaient s'établir par l'apparente évidence qui les caractérisait et elle perdait donc tout fondement les justifiant théoriquement. On déduisait de cela que les « assertions » (axiomes) étant vraies dans notre espace elles étaient donc consistantes. Dans la vérification de la véracité du 5^{ème} postulat on trouve dans n'importe quel espace la relation

$$\int k(s) ds = \alpha + \beta + \delta - \pi \text{ où } k \text{ est la courbure}$$

- La géométrie sphérique $k(s) > 0$
- La géométrie hyperbolique : $k(s) < 0$
- La géométrie plane : $k(s) = 0$

Notons que les mathématiciens ont utilisé la topologie pour faire la géométrie et cela en décrivant les espaces plus compliqués. Ainsi, on a la géométrie sur les variétés ; les variétés topologiques et les variétés différentielles constituent la géométrie différentielle.

D'une manière concrète, une preuve de cohérence relative est une preuve ressemblant au modèle de la géométrie sphérique. Elle ne nous est d'aucun secours, puisqu'une telle preuve dépendait au fond de l'arithmétique, afin de construire un modèle de l'arithmétique. Pour assurer la consistance de l'arithmétique, il faut disposer d'une preuve absolue de non contradiction. HILBERT avait donc recours à une telle preuve pour consolider les fondements des mathématiques. En 1900, le problème de grouper la cohérence des axiomes de l'arithmétique, se plaçait en deuxième position. En principe, HILBERT posait la résolubilité de tout problème mathématique, lequel problème est susceptible d'une solution définitive [3].

La géométrie absolue est le fragment de la géométrie élémentaire qui est amputée de l'axiome dit des parallèles. En fait, suite à cette amputation, la géométrie absolue est syntaxiquement incomplète. Ce qui veut donc dire que la proposition relative aux parallèles, devient *indécidable* et elle emmène, à sa suite, les propositions ne pouvant pas se passer d'elles pour recevoir une démonstration.

Evidemment, en partant de la géométrie absolue, comme étant un fragment de la géométrie élémentaire, il y a lieu d'affirmer que la géométrie absolue constitue le socle potentiellement commun à deux géométries distinctes, l'une, euclidienne, qui accepte l'axiome des parallèles et l'autre, hyperbolique, qui le rejette. Mais, à l'inverse, on peut considérer ces deux géométries comme étant des extensions distinctes de la géométrie absolue. En géométrie plane hyperbolique, on pose que, par un point, P, extérieur à une droite, d, passe une infinité de parallèles à cette droite. La géométrie elliptique, par contre, adopte une troisième version de l'axiome des parallèles, à savoir : Par un point, P, extérieur à une droite, d, ne passe aucune parallèle à celle-ci. D'un point de vue critique et rigoureux, on peut dire que la géométrie elliptique n'est pas une extension de la géométrie absolue.

La raison fondamentale est que certains axiomes ne sont pas communs aux deux autres systèmes géométriques. En clair, en géométrie elliptique, on démontre que la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droites. D'où, il est exclu de penser à une extension de la géométrie absolue. En présence de matière, la géométrie d'Euclide ne convient pas et on la remplace d'ordinaire par une variante de type elliptique.

2 LA GÉOMÉTRIE ÉTENDUE DE HILBERT

Pour HILBERT, la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit comme suit :

« Nous pensons trois sortes de choses ; nous nommons les choses du système des **points** ; nous les désignons par des lettres majuscules A, B, C,..., nous nommons **droites** les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a,b,c,..., nous appelons **plans** les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs α, β, γ » [4].

Ainsi, renchérit-il, « entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie [4].

Du point de vue du raisonnement, c'est le postulat des parallèles qui assure la distinction entre la sphère et le plan et cela sous réserve que le plan soit euclidien.

EUCLIDE affirme que « Par un point non situé sur une droite, on peut mener une droite parallèle et une seule à cette droite ». Mais, pour BKOUCHE, le problème résidait moins dans la vérité du postulat des parallèles que dans celle de la preuve à apporter d'une proposition vraie et non évidente; vraie au vu de ses résultats, car c'est le postulat des parallèles qui fonde la méthode des aires et la théorie des propositions géométriques; vraie aussi parce que ce postulat est lié à l'existence de cette figure première de la géométrie élémentaire qu'est le rectangle [5].

La géométrie élémentaire de TARSKI constitue un fragment d'une géométrie étendue exprimée dans le langage le plus puissant de la théorie des ensembles. Le prix occasionné par le pouvoir étendu est la perte de décidabilité. Pour ce faire, il faut donc envisager une métrique adaptée pour la traduction analytique de la géométrie étendue. Quant au modèle euclidien, on a la métrique :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tandis que, pour le modèle hyperbolique, la métrique est

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Ici, on retient que toute « droite » du modèle hyperbolique respecte l'axiome exigeant le prolongement indéfini dans ses deux directions.

Ainsi, le « segment de droite » joignant deux points, (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , se définit comme étant le plus court chemin entre ces points. La métrique étant adaptée, on peut minimiser l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{y} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^2 f(y, y', x) dx$$

On passe en effet par la résolution de l'équation d'EULER associée pour résoudre ce genre de problème.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \rightarrow (x - x_c)^2 + y^2 = R^2,$$

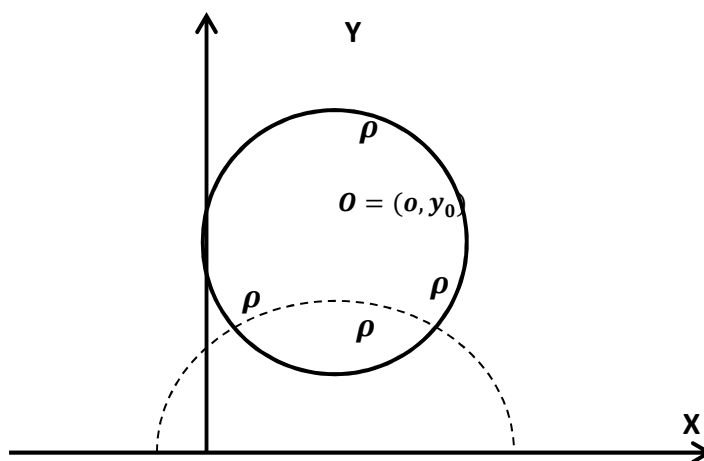
qui représente un arc de demi-cercle centré sur la frontière et qui passe par les deux points.

L'abscisse du centre et le rayon sont indiqués respectivement par

$$x_c = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

$$R = \frac{1}{2|x_1 - x_2|} \sqrt{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2][(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2]}$$

Il se dégage que les « cercles » ont l'aspect d'un cercle euclidien, mais au fond, ils sont décentrés pour se conformer à la métrique particulière à cette géométrie.



Notons que le « cercle » « centré » sur 0 et de rayon ρ a pour équation,

$x^2 + y^2 - 2yy_0 \operatorname{ch} \rho + y_0^2 = 0$. Donc, il est possible de vérifier que dans la métrique imposée, on retrouve que chaque « rayon » qui émane de 0 à une longueur constante, ρ . Par calcul sur les deux « rayons » rectilignes, on obtient :

$$\int_{y_0}^{y_0 e^\rho} \frac{dy}{y} = \int_{y_0 e^{-\rho}}^{y_0} \frac{dy}{y} = \rho,$$

et la longueur de la circonférence est :

$$2 \int_{y_0 e^{-\rho}}^{y_0 e^\rho} \frac{dy}{y} \sqrt{1 + (dx/dy)^2} = 2\pi \sinh(\rho);$$

et ce, en la convertissant dans la version euclidienne.

La surface du cercle est finalement donnée par l'intégrale :

$$\iint \frac{ds dy}{y^2} = 2\pi (\operatorname{ch} \rho - 1).$$

Remarquons tout de suite que la métrique associée au modèle hyperbolique à un cercle ouvert, exige logiquement une métrique un peu différente valant :

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Mais, en changeant simplement de variable, on se place dans un modèle du demi-plan de POINCARÉ, ce qui montre, de toute violence, que ce sont des interprétations isomorphes.

3 RAPPORT ENTRE CONSISTANCE ET EXISTENCE

Sur le deuxième problème, HILBERT s'évertue à trouver une preuve de la consistance (de la non – contradiction) des axiomes de l'arithmétique.

Selon lui, les axiomes portent sur l'arithmétique des nombres réels. Il s'agit des axiomes de corps, les axiomes d'ordre, l'axiome d'ARCHIMÈDE et un axiome assez étrange exigeant l'élargissement du domaine.

A partir des années 1920, on avait perçu ce problème en l'appliquant d'abord à l'arithmétique des entiers naturels et aux axiomes de PEANO. Ce problème, une fois résolu, pour cette arithmétique là, on passerait aux nombres réels et à l'analyse.

Le problème de la consistance de l'arithmétique est posé prioritairement. On dirait qu'en prouvant la consistance de l'arithmétique, on franchirait un pas décisif dans la preuve de toutes les mathématiques.

Pour HILBERT, affirmer que les mathématiques sont vraies, est équivalent à prouver leur consistance. D'où, il faut seulement prouver la consistance des mathématiques pour pouvoir affirmer l'existence des objets auxquelles elles font allusion. Autrement dit, *consistance* signifie *existence*. Une telle idée est parfois enseignée par POINCARÉ.

HILBERT n'est pas de ceux-là qui soutiennent une preuve de consistance *relative*, qui s'obtient en interprétant, dans une autre théorie mathématique, la consistance en rapport avec notre croyance. Mais pour ce qui regarde particulièrement l'arithmétique, qui est à la base même, il faut trouver une preuve *directe*.

On sait que pour prouver que toutes les formules, parmi les théorèmes de l'arithmétique, ont une certaine propriété, on doit préciser que les axiomes la possèdent et que les règles de déduction, par lesquelles les théorèmes s'obtiennent à partir des axiomes, préservent à cet effet, cette propriété [6].

Pour une preuve de la consistance, la formule n'est pas de la forme $1 = 0$. Si l'on prouvait une contradiction, alors toutes les formules seraient des théorèmes. Dans ce cas, on aurait $1 = 0$ aussi. Au cas où $1 = 0$ était un théorème, alors on montrerait une contradiction, car $1 \neq 0$. Cela signifie qu'on aurait *non* $1 = 0$, est aussi un théorème.

Evidemment, ce procédé exige que l'arithmétique soit formalisée. En d'autres termes, l'arithmétique doit se présenter comme un système formel. Pour cela, son langage doit être un ensemble décidable de formules, et ses théorèmes doivent être choisis parmi les formules qui présentent des ensembles décidables d'axiomes et de règles de déduction.

Etant donné les formules, les axiomes et les règles de déduction constituent des ensembles décidables, on peut aussi dire que l'ensemble des preuves est, dans ce cas, décidable lui également. Dans un système formel quelconque, par contre, l'ensemble des théorèmes n'est pas nécessairement décidable. Du fait qu'un théorème est le dernier membre d'une suite de formules qui, au fond, est une formule pour laquelle on exhibe une preuve.

L'arithmétique de PEANO de premier ordre ou l'arithmétique de PEANO tout court, est le système formel le plus important lié à l'arithmétique.

Les points de vue de HILBERT sur les fondements des mathématiques avaient été marqués par l'assaut intuitionniste de L.BROUWER. En clair, HILBERT avait formulé son programme de recherche formaliste en parant à cet assaut. De là, il y eut eu avènement d'une nouvelle théorie mathématique appelée *théorie des preuves* ou encore *métamathématique*.

4 LE FINITISME HILBERTIEN

Le programme de KRONECKER d'une arithmétique générale a inspiré le programme finitiste de HILBERT. Il y a lieu de souligner que la pratique mathématique de KRONECKER a joué une influence déterminante sur l'option fondationnelle de HILBERT.

En fait, la métamathématique ou la théorie hilbertienne des systèmes formels est essentiellement d'origine arithmétique [7]. Autant le dire, la logique interne du discours mathématique est en effet l'arithmétique ; cela signifie qu'elle est assujettie aux modes d'inférence propres à l'arithmétique. Il est à noter que partant de KRONECKER, le constructivisme arithmétique a influencé un bon nombre des mathématiciens (BOREL, POINCARÉ et BROUWER) ainsi que le prolongement de l'arithmétique

générale en algèbre abstraite chez STEINITZ. GAUTHIER estime que la logique doit assurer le passage de l'arithmétique finie à l'arithmétique transfinie (et l'analyse) et la fonction du choix de la logique de HILBERT est mise au point aux fins de construire le fossé entre les deux arithmétiques.

Pour ce faire, les objets concrets qui sont destinés à remplacer les entiers dans la métamathématique de HILBERT sont simplement des symboles ; le système combinatoire fini qu'ils génèrent est l'homologue formel de l'arithmétique. A ce propos, il affirme qu'« au commencement est le symbole » Telle est la devise philosophique de HILBERT en 1922.

HILBERT qualifie de *finitiste* la partie des mathématiques dans laquelle on ne trouve que des propositions ne parlant pas de l'infini et cela s'explique intuitivement. Sur l'élimination de l'infini, notons que KARL WEIERSTRASS a éliminé les infiniment petits et les infiniment grands de l'analyse. De même, le programme de recherche formaliste de HILBERT se donnait pour but d'éliminer l'infini mathématique. D'une manière concrète, HILBERT se proposait de l'éliminer, en opérant, le reste de l'infini sur des suites infinies, ou en quantifiant sur tous les entiers naturels.

Il nous faut préciser qu'« éliminer l'infini, c'est une *fiction utile* ». On doit accepter son usage mais on interdit de prouver qu'il ne faut pas le figurer. La perception sur l'élimination de l'infini ne consiste pas à rejeter les méthodes des mathématiques classiques qui paraissent le présupposer mais le justifier adéquatement.

Dans la perspective hilbertienne, la philosophie des mathématiques est une conciliation entre l'intuitionnisme et l'instrumentalisme (ou le formalisme). L'étude des fondements des mathématiques le conduit à diviser les mathématiques en deux groupes. Il s'agit notamment des mathématiques *réelles* procédant de notre intuition, et des mathématiques *idéelles* la dépassant.

En effet, la validité des mathématiques réelles n'est pas problématique, elle est donc immédiate par la nature même de notre faculté de représentation. Par contre, les mathématiques idéelles se rapportent aux objets qui vont au-delà des limites de notre intuition ; ce qui laisse comprendre que leur validité est loin d'être assurée.

Raison pour laquelle l'intuitionnisme de BROUWER interdit toute forme de méthode mathématique qui ne se rapporte pas à un objet d'intuition, quand bien même l'intuitionnisme proposé par HILBERT constitue un compromis. Cela signifie que les mathématiques idéelles peuvent être admises comme théorie mathématique, car elles n'introduisent pas de contradiction interne. Donc, elles sont intrinsèquement cohérentes.

HILBERT précise que le problème des objets réels et des objets idéaux en mathématiques est introduit par l'entremise de l'infini³. A ce propos, NEIL KENNEDY souligne que l'entreprise finitiste de HILBERT se construit sur base d'une théorie de l'esprit rappelant l'architecture de la raison de KANT. Citons-le : « KANT a déjà enseigné (...) que les mathématiques ont à leur disposition un contenu assuré indépendamment de toute logique et, par conséquent, qu'elles ne peuvent jamais être fondées par l'entremise de la logique seule (...). Plutôt, comme condition pour l'utilisation des inférences logiques et l'exécution des opérations logiques, quelque chose doit déjà être donnée à notre faculté de représentation, des objets extralogiques concrets qui sont présents intuitivement comme une expérience immédiate précédant toute forme de pensée [8] ».

Il renchérit en disant que « si une inférence logique est pour être fiable, il doit être possible d'analyser exhaustivement ces objets dans toutes leurs parties, et le fait qu'ils se produisent, qu'ils diffèrent l'un de l'autre, et qu'ils se suivent l'un l'autre, ou qu'ils soient concaténés, est immédiatement donné intuitivement, de la même manière que les objets, comme quelque chose qui ne peut être réduit à autre chose et qui ne nécessite aucune réduction (...) ». En mathématiques, en particulier, ce que nous considérons sont les signes concrets eux-mêmes dont la forme, selon la conception que nous avons adoptée, est immédiatement claire et reconnaissable [8].

Evidemment, il convient de noter que la philosophie hilbertienne des mathématiques est construite sur l'idée d'un contenu intuitif (*inhaltlich*) donnant à l'entendement des objets et des lois *a priori*. Toutefois, il est à remarquer que le contenu intuitif n'est pas suffisant à explorer toutes les mathématiques, mais il concerne seulement une portion limitée, c'est-à-dire l'arithmétique finitiste ou « contentuelle ». En effet, on construit les propriétés finitistes à partir d'observations ou de saisies immédiates d'un nombre. Pour HILBERT donc, le nombre est de façon informelle une suite quelconque de « 1 ». Cela est un code dans sa terminologie qui exprime un terme dans la suite

³ Comme nous l'avons dit, les mathématiques font appel à deux sortes d'infini : l'infini actuel et l'infini potentiel.

1,11,111,1111,11111,...

Ces termes abrégés traduisent et s'emploient couramment, par exemple : « 2 » pour « 11 », « 3 » pour « 111 », « 4 » pour « 1111 ».

De cette perception intuitive (*a priori*), il en résulte qu'on peut définir les prédicats et les opérations fondamentales sur lesquelles est fondée l'arithmétique. On définit, par exemple, le prédicat d'égalité comme l'identité entre deux suites, le prédicat $a < b$ est le fait que le nombre b est un segment initial propre du nombre a .

En clair, la loi de la trichotomie est donc valide :

- une et une seule des trois possibilités est toujours le cas,
- l'addition de deux nombres a et b est la concaténation de la suite de « 1 » de a et de celle de b .

Par conséquent, il y a lieu d'affirmer que $2+3=3+2$; en ce sens, le fait d'ajouter trois fois un « 1 » au nombre 2 indique le même nombre que le nombre 3 augmenté de deux « 1 ». D'une manière générale, l'utilisation de l'induction intuitive permet de prouver que l'addition est commutative, $n + m = m + n$, et associative, $(l + m) + n = l + (m + n)$.

L'arithmétique finitiste procède directement de notre intuition et de la construction des nombres. C'est une arithmétique irréductible qui ne nécessite de toute manière aucune réduction. Elle est donc limitée. Aussi remarquons – nous qu'il manque à cette arithmétique d'importants contingents de la mathématique : tout ce qui est relatif à l'infini actuel. HILBERT indique que parmi les concepts cardinaux touchant à l'infini, il y a les notions de quantification existentielle et universelle ainsi que la loi du tiers exclu ; parmi les objets infinis en mathématiques, il y a les ensembles de tous ordres et en particulier tous les systèmes de nombres (actualisés).

Les raisonnements sur les preuves mathématiques constituent une métamathématique. En effet, la métamathématique, précise CASSOU NOGUES, doit fournir une justification théorique à la mathématique. Cela veut dire qu'il faut établir, à l'aide de raisonnements finitistes qui, possédant une évidence propre, ne doivent pas être justifiés, que les raisonnements mathématiques s'effectuent sans contradiction.

Au fond, pour le programme formaliste, l'infini est quelque chose de purement apparent utilisé en mathématiques sans ne lui reconnaître aucune réalité.

Dans son article de 1926 "Sur l'infini", HILBERT pose comme un dilemme, qui reste à démontrer, la résolubilité finitiste des problèmes arithmétiques, c'est-à-dire une formule "tout entier vérifie P ", P étant une propriété arithmétique, peut être ou démontrée ou réfutée par la donnée d'un contre-exemple. Du point de vue technique, il est question, à ce stade, de l'élimination de la fonction ε .

HILBERT établit « une distinction entre une mathématique finitiste dont les raisonnements possèdent une évidence propre mais sont soumis à des restrictions, et une mathématique formelle, qui consiste en manipulations symboliques selon des règles convenues » [3]. La question est de démontrer la consistance des théories formelles.

Du point de vue finitiste, HILBERT et BERNAYS définissent clairement les quantificateurs comme suit :

« *Un jugement universel* sur les codes (les nombres) ne peut être interprété de façon finitiste que dans un sens hypothétique, c'est-à-dire, comme un énoncé sur n'importe quel code donné ; un tel jugement exprime une loi qui doit se vérifier dans chaque cas isolé qui se présente.

Un théorème d'existence sur des codes, donc un théorème de la forme « il existe un code n ayant la propriété $A(n)$ », se conçoit de manière finitiste comme un jugement partiel (...) qui se compose soit de la donnée directe d'un code ayant la propriété $A(n)$, soit de la donnée d'un procédé pour la production d'un tel code [...] » [9].

On identifie la notion de vérité à un calcul ou à une vérification. Autrement dit, la proposition : p est vrai $\leftrightarrow p$ est vérifiée. Mais, du fait que l'intellect finitiste ne peut exécuter qu'un nombre fini d'opérations dans une vérification, il ne peut donc pas vérifier un énoncé du genre : « $A(n)$ est vrai pour tout n ». Il en résulte qu'on ne peut pas affirmer sa vérité. Quant au sort du tiers exclu, il est intimement relié à celui des propositions universelles et existentielles. Si « être vrai » c'est « être vérifié », on ne peut plus admettre pour vraie une loi qui s'énoncerait comme :

Pour tout nombre n , $A(n)$ ou $\neg A(n)$ est vérifié.

Puisque cela laisserait entendre que l'intellect mathématique a profondément examiné un ensemble infini des propositions, à savoir $A(0), A(1), A(2), \dots$ et $\neg A(0), \neg A(1), \neg A(2), \dots$ Cet état des choses contraint HILBERT et BERNAYS à s'adhérer aux conclusions de BROUWER sur la validité du principe du tiers exclu à telle enseigne qu'ils affirment que "du

point de vue finitiste, cette non – validité existe en fait, dans la mesure où on ne réussit pas à y trouver, pour le jugement existentiel aussi bien que pour l'universel, une négation du contenu [*inhalt*] finitiste satisfaisant au principe du tiers exclu" [9].

En fait, pour Y. GAUTHIER, « le finitisme hilbertien évacue les objets idéaux, tandis que l'intuitionnisme récuse le tiers exclu, les méthodes de preuve indirecte et les totalités infinies » [14].

Au fond, il nous revient d'affirmer ce qui suit :

L'infini se déguise [13]

Que veut dire par exemple

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 \dots ?$$

Plus on ajoute de termes plus la somme s'approche de 2. Donc cette somme qui est étendue à l'infini des termes vaut exactement ! Et que vaut par exemple la série :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ?$$

Si on écrit :

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

Il est évident que la somme est nulle. En écrivant cette série comme suit :

$$1 - (1-1) - (1-1) - \dots$$

On se rend compte que la somme est 1. Donc $1 = 0$! Dans ce cas, toutes les mathématiques s'effondrent, détruites par cette contradiction.

On tente de résoudre ces difficultés de détail ou ces problèmes philosophiques en remplaçant les affirmations en rapport avec les sommes infinies par d'autres qui sont plus compliquées mais qui ne concernent que des sommes finies. En termes clairs, au lieu de dire que la somme infinie : $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ est égale à a , on va plutôt dire que la différence entre la somme finie $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ et le nombre a est supérieur à un certain entier N dépendant de ε . Si, en effet, il y a une quantité a qui remplit la condition que la série est dite convergente et que la somme possède un sens.

5 HILBERT ET LES COURANTS DE PENSÉE MATHÉMATIQUE

Pour HILBERT, la vérité en mathématiques est la même chose que la consistance (ou la cohérence). En rapport avec la philosophie des mathématiques [15], le programme de recherche de HILBERT amène DOSEN à poser deux questions centrales sur l'interprétation du langage mathématique ; le langage mathématique décrit quelque chose :

La première question se formule comme : « Est – ce que le langage mathématique se rapporte à une réalité extérieure à lui, est – ce qu'il décrit quelque chose ? ».

Répondre par "non", on est en présence du *formalisme pur*. En effet, un formaliste pur ne voit dans les mathématiques qu'un langage, que l'on manie selon les règles de syntaxe (Haskell CURRY et le cercle devienne).

Il en résulte que POINCARÉ, BOURBAKI et HILBERT lui – même sont réputés formalistes à un certain point. Pour un formaliste pur, il ne faut pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies, mais si elles sont *utiles* ou *belles*.

Répondre par "oui", la question se reformule comme suit : "est – ce que ces choses décrites par le langage mathématique sont indépendantes de l'homme ?".

Répondre par "non" à la question principale : les choses décrites par le langage mathématique ont été créées par l'homme, que ce sont donc les constructions de l'intelligence humaine.

Puisqu'on trouve normal de supposer que l'homme ne peut pas créer des choses infinies. Pour cela, on conçoit que l'infini mathématique peut être seulement potentiel. En effet, cette doctrine est appelée *constructivisme*. Ainsi se réclament de cette pensée les intuitionnistes à la suite de BROUWER, mais aussi des écoles ayant voulu limiter les moyens mathématiques classiques.

DOSEN précise, à ce sujet, ce qui suit : "les mathématiques classiques – qui se servent librement du principe logique du tiers exclu et parlent de l'infini comme s'il était actuel, et non seulement potentiel, ne sont devenues prépondérantes que

vers la fin du 19^{ème} siècle, par les soins de HILBERT entre autres". Des positions constructivistes sont soutenues par POINCARÉ aussi. Pour un constructivisme, il ne faut pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies, mais si elles sont *prouvables*.

Répondre par "oui", c'est-à-dire les choses qui sont décrites par le langage mathématique n'ont pas été créées par l'homme ; ce n'est donc pas une réalité construite par l'intelligence humaine, mais une réalité qui se met seulement à appréhender, en le faisant passablement bien et si on considère davantage que l'infini mathématique est actuel, alors, dans ce cas, on a le *platonisme* appelé parfois le *réalisme*. Ainsi, le défenseur le plus connu de cette pensée est GÖDEL.⁴ Ici, on ne trouve pas une école du genre de constructivisme et d'intuitionnisme. Car la plupart de logiciens, tout comme la grande majorité des mathématiciens, sont des platonistes.

Comme nous l'avons souligné, le logicisme est cette doctrine qui affirme que les mathématiques se réduisent à la logique et qui ne s'inscrit pas dans la compréhension de cette classification. L'histoire de la logique mathématique nous apprend que les logiciens FREGE et RUSSELL étaient des platonistes. Ce n'est pas étonnant d'imaginer un logicisme formaliste qui affirmerait que la logique est de la *syntaxe pure*.

De tous ces points de vue, il faut dire que le formalisme de HILBERT se situe dans l'approximité entre le formalisme pur et le constructivisme, et cela en se mettant d'accord avec le platonisme et en acceptant les méthodes abordées en mathématiques classiques.

6 LE CALCUL EPSILON

L'Epsilon constitue un thème central dans le programme fondationnel de HILBERT. Les quantificateurs contentuels ne s'accommodent pas à toute la généralité que possèdent les quantificateurs de la théorie mathématique ordinaire. C'est ce qui explique qu'on ne peut pas déduire à partir des définitions respectives que $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ devrait être valide ou que $\exists(x)\neg A(x)$ pourrait découler de $\neg \forall x A(x)$.

Somme toute, l'arithmétique contentuelle n'assume pas la version transfinie du principe du tiers exclu. De là, il en résulte que les quantificateurs existentiel et universel pris dans leurs significations respectives, créent des éléments idéels, et la métamathématique aura à prouver pareilles conditions qui ne conduisent à aucune contradiction.

D'une manière concrète, HILBERT étend le calcul des prédicats au calcul Epsilon. Pour lui, l'introduction du symbole ε était motivée par le désir d'assurer le passage de l'arithmétique finitaire aux éléments idéaux à l'aide de la logique, alors que l'élimination du même symbole ε reprenait la méthode Kroneckerienne de l'élimination des "indéterminés".

Le concept d'association des indéterminés permet l'extension du domaine de l'arithmétique qui conserve les déterminations conceptuelles de l'arithmétique. Pourtant, l'extension conservatrice permet à HILBERT d'introduire le symbole ε .

Donc, il a ajouté une expression au calcul des prédicats aux fins d'unifier le traitement des axiomes qui portent sur les quantificateurs universels et existentiels. Il s'agit là des axiomes transfinis. L'axiome premier du symbole ε est la formule

$$A(x) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x)).$$

Où $\varepsilon_x A(x)$ est à interpréter comme étant une fonction logique de choix transfinie associant un objet à chaque prédicat (ou un nombre à chaque fonction). L'opération ε est une généralisation de l'opérateur de description définie de RUSSELL et WHITEHEAD et que HILBERT définit comme suit :

$$(E_x)(A(x) \wedge (y)(A(y) \rightarrow x = y)) \rightarrow A(\varepsilon_x A(x)),$$

où $A(x)$ est l'unique élément qui satisfait $A(x)$, évidemment s'il existe. Pour RUSSELL, l'opérateur se réduit aux quantificateurs existentiel et universel

⁴GÖDEL précise son idée en ces termes : « la position platoniste est la seule qui soit tenable. Par là j'entends la position selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible qui existe indépendamment aussi bien des actes que des dispositions de l'esprit humain et qui est seulement perçue et probablement perçue de façon très incomplète par l'esprit humain ».

$(\forall x)A(x) \equiv A(\varepsilon_x \neg A(x))$, tandis que HILBERT fait juste le contraire ε , c'est-à-dire il réduit les quantificateurs à des expressions qui contiennent le symbole ε . Ainsi, le quantificateur existentiel se définit par :

$$(\exists x)A(x) \equiv A(\varepsilon_x A(x))$$

Quant à eux :

l'axiome aristotélien par :

$$(\forall x)A(x) \rightarrow A(x)$$

et le principe du tiers exclu par :

$$\neg(Ax)A(x) \rightarrow (\exists x)$$

qui constituent le cadre axiomatique pour le symbole ε .

La fonction de choix étant transfinie, la finitude de la procédure de choix, d'après HILBERT, était assurée par son itération finie ; ce qui permet de garantir le passage consistant de l'arithmétique à l'analyse et à la logique qui est un moyen auxiliaire ou un détour au moyen d'éléments idéaux. Mais un chemin de retour est l'arithmétisation de la logique qui montre l'arithmétisation ou la formalisation finitaire des systèmes formels. Pour Y.GAUTHIER, ceci constitue tout le programme métamathématique de la théorie des preuves [7].

Les éléments idéels servent à faciliter la preuve de théorèmes de la mathématique finitiste réelle. HILBERT estime en effet qu'ils devraient être éliminables de la preuve d'un théorème ne faisant pas intervenir le symbole ε dans ses hypothèses ou sa conclusion. D'où, on obtient le premier théorème epsilon, il s'énonce comme suit [10] :

(ε_1) Si F et $A_1, \dots, A_n$ sont des formules ne contenant pas le symbole ε et si F est déductible de $A_1, \dots, A_n$ dans le calcul epsilon, alors il existe une preuve de F à partir de $A_1, \dots, A_n$ dans le calcul des prédicats sans quantificateurs (sans symboles).

On peut en effet clarifier ici une preuve de la consistance pour une théorie arithmétique dont les axiomes ne comprennent pas de variables liées. Elle se définit par les axiomes suivants :

- $(=1)x = x$
- $(=2)x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$
- $(<1)\neg x < x$
- $(<2)(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
- $(<3)x < x'$
- $(P_1)x' \neq 0$
- $(P_2)x' = y' \rightarrow x = y$

Soit (S) , ce système d'axiomes. Le métathéorème est formulé comme suit : une formule numérique déductible des axiomes de (S) dans le calcul epsilon est forcément vraie.

Pour HILBERT et BERNAYS [10], la démonstration de ce métathéorème résulte du premier théorème epsilon et de deux remarques métathéoriques, à savoir :

- 1) Une démonstration d'une formule numérique, c'est-à-dire une formule ne contenant ni variable libre ni variable liée, n'utilisant que le calcul des prédicats sans quantificateurs, et qui peut se transformer en une démonstration ne contenant aucune variable libre, et où, chacune des formules initiales est soit une substitution des axiomes de la théorie arithmétique (S) , soit une instance numérique d'une anthologie du calcul propositionnel.
- 2) Toute formule numérique qui s'obtient par substitution d'une tautologie est vraie ; de même toute formule numérique, qui résulte des axiomes de la théorie arithmétique (S) , et si A et $A \rightarrow B$ sont vraies alors B l'est aussi.

Le procédé de la démonstration de la consistance se fait comme suit : si F est une formule numérique déduite dans le calcul ε à partir des axiomes arithmétique, (ε_1) affirme qu'il existe une démonstration de F dans le calcul des prédicats et cela sans quantificateurs.

En effet, HILBERT et BERNAYS soulignent que la première remarque de la démonstration indique que la démonstration peut se transformer davantage en une démonstration ne contenant que des formules numériques et possédant comme formules initiales, des instances numériques d'axiomes ou de tautologies en rapport avec les propositions.

Par la seconde remarque, ils estiment que toutes les formules initiales de la démonstration vraies, et toutes les conséquences découlant des formules qui s'obtiennent par *modus ponens* le sont aussi. Pourtant les formules de la démonstration sont en effet toutes numériques. Il en résulte que la seule règle applicable dans celle – ci est le *modus ponens*. Et dès lors on peut d'affirmer que toutes les formules de la démonstration sont vraies et, en particulier, la formule F l'est également.

Mais il est à remarquer que la théorie arithmétique définie par les axiomes $=_1, =_2, <_1, <_2, <_3, P_1$ et P_2 n'a pas de principe d'induction ; c'est donc un fragment très faible de l'arithmétique ordinaire.

Pour Y.GAUTHIER, il faut deux théorèmes sur l'élimination des "formules critiques" pour l'introduction du symbole ε .

Elles ont la forme

$$A(t) \rightarrow A(\varepsilon_r A(r))$$

Pour un terme t et un terme ε_r . Pourtant, la procédure de résolution symbolique reprend exactement la décomposition des polynômes ; car les termes ε sont disposés suivant leur degré et leur rang. Les polynômes sont aussi ordonnés de cette même manière. D'où, on a la réduction à une forme disjonctive de termes sans symbole ε en tant qu'un polynôme linéaire par la substitution d'un terme t au terme ε_r [11].

Le second théorème ε , écrit GAUTHIER, applique la même méthode aux formules existentielles et à l'axiome d'égalité pour les formules $\varepsilon(x)$. Il s'agit ici du schéma d'induction créant ainsi des difficultés supplémentaires et exigeant alors une nouvelle formule critique.

$$A(t) \rightarrow \varepsilon_r A(r) \neq t$$

C'est au moyen de chiffres que s'effectuera la substitution et ce pour les termes ε . Dans ce cas, une forme du principe de descente infinie tiendra lieu de substitut à l'induction complète. Et GAUTHIER d'écrire : « Pour tout prédicat numérique P qui correspond à un nombre au moins, il existe un tel nombre auquel correspond le prédicat qui ne correspond pas au prédécesseur (différent de 0) de ce nombre » [11].

Au fond, c'est une conséquence du principe du plus petit nombre avec la fonction récursive μ .

$$A(x) \rightarrow (\mu_x A(x))$$

Remarquons cependant que la procédure générale équivaut à la décomposition polynomiale en facteurs irréductibles. Cela signifie que ces facteurs ne peuvent pas se réduire à l'algorithme euclidien du plus grand diviseur commun qui est généralisé par la descente infinie pour les polynômes de degré n .

De toute façon, indique GAUTHIER, la démonstration de la consistance ne conduira qu'à trouver les formules réduites irréductibles [12].

En effet, il se passe que pour les théories logiques ouvertes, c'est-à-dire les théories logiques sans quantificateurs, le théorème de HILBERT – ACKERMANN suffit amplement. Mais, pour l'arithmétique, on a dû recourir à la preuve de GENTZEN ou celle de GÖDEL ou encore celle de ACKERMANN, utilisant la méthode d'élimination du symbole ε .

Il est opportun de souligner que la position finitiste est l'héritière du constructivisme arithmétique ou l'arithmétique générale de KRONECKER. Sur ce, pour GAUTHIER "l'introduction du symbole ε et de la logique formelle qu'on élimine ensuite pour revenir à la logique interne de l'arithmétique signifie à la fin que l'arithmétique finie est auto – consistante par *construction* en vertu de la finitude du procédé de décomposition polynomiale et de la méthode de descente finie" [12].

7 LE CONGRÈS DE BOLOGNE

En 1928, au congrès de Bologne, HILBERT s'interrogeait précisément sur trois questions essentielles, significatives du programme hilbertien et pouvant donc constituer sa philosophie formaliste. D'après cette philosophie, il faut analyser les mathématiques comme *une activité dépourvue de signification en elle – même, et réglée par des combinaisons de symboles* ; les mathématiques sont construites sur une axiomatique, c'est-à-dire, un système formel par les axiomes des règles de formation, des formules et des règles de déduction. Pour sa part, HILBERT estime pouvoir répondre positivement aux questions suivantes :

1° « Tout système formel peut – il être rendu syntaxiquement complet ? »

Cela signifie que toute formule peut y être démontrée ou réfutée, y-a-t-il lieu de prouver que tout énoncé peut être soit infirmé, soit uniforme ? un système est dit *syntaxiquement complet*, si toute proposition sensée, A, y est démontable ou réfutable. Autrement dit, quelque que soit A , il existe une proposition qui n'est ni démontrable ni réfutable dans ce système formel.

Donc, cette proposition est un *indécidable* du système formel. C'est pour dire que, syntaxiquement, l'incomplétude est en effet dépourvue d'originalité. HILBERT était convaincu de cela. La géométrie euclidienne, privée de l'axiome des parallèles, est ordinairement incomplète. Cela veut dire que sa démonstration est limitée à une trentaine des propositions, mais il faudrait seulement rétablir l'axiome manquant pour avoir un système formel qui redevient syntaxiquement complet.

On sait également que le système de la théorie des groupes est syntaxiquement incomplet. Cela signifie par exemple que la proposition, $aob = boa$, n'y est ni démontrable ni réfutable sur la base des axiomes admis. Donc, la proposition $aob = boa$, et sa négation, sont des indécidables de la théorie des groupes. Supposons qu'on ajoute l'axiome, $aob = boa$, à la théorie des groupes, on aura l'extension de la théorie des groupes commutatifs.

Le nouveau système ainsi créé contiendra encore des propositions indécidables du genre $a = b$. D'où, ce nouveau système reste et restera syntaxiquement incomplet. Cependant, il est complétable et cela de plusieurs manières distinctes.

Pour cela, il faut seulement de lui adjoindre l'axiome, $a=b$, pour qu'il devienne le système syntaxiquement complet du groupe à un seul élément.

Répondre affirmativement à cette question revient à énoncer que l'incomplétude syntaxique de tout système formel n'est jamais que provisoire et que ce n'est qu'une question de temps pour que quelqu'un trouve un jeu d'axiomes capables de compléter l'ensemble. Répondre négativement revient au contraire à estimer que pour certains systèmes formels, la procédure de complétion ne s'arrête jamais. Autrement dit, on a beau ajouter des axiomes, il subsiste toujours des propositions indécidables, c'est-à-dire des propositions impossibles à démontrer ou à réfuter.

D'une manière générale, la réponse est *négative*. Pour GÖDEL, tout système formel, en particulier ZF, contenant l'arithmétique de ROBINSON est impossible à compléter ; on dit donc qu'il est *essentiellement syntaxiquement incomplet*.

2° « Peut – on acquérir la certitude qu'un système est consistant (cohérent ou non contradictoire) ? »

Autrement dit, peut – on prouver qu'il est possible d'arriver, par une suite d'étapes obtenues à partir des axiomes, d'après les règles de déduction, à un énoncé contradictoire ? où à celui du genre $1+2=3$? où encore est – il exclu que le système d'axiomes puisse permettre de déduire des propositions contradictoires ?

Un système formel est dit *consistant* (cohérent ou non contradictoire) si, à un aucun moment, il ne démontre une proposition et sa contraire. En somme, il est inconsistant (incohérent ou contradictoire) dans le cas contraire. Il n'y a aucune limite à l'inconsistance d'un système à tel point qu'on peut y prouver tout et n'importe quoi. En clair, il y a lieu de se convenir qu'un système inconsistant est à rejeter ; tel est le bien fondé de la question posée.

Pour HILBERT donc, il devait être possible de démontrer l'inconsistance (la cohérence ou la non contradiction) ou l'inconsistance (l'incohérence ou la contradiction) de n'importe quel système formel, en particulier ZF. Mais il n'avait pas de raison de soutenir de tels propos. Par ailleurs, GÖDEL a donc démontré que tout système formel, en particulier ZF contenant suffisamment d'arithmétique de ROBINSON ne peut pas démontrer sa propre consistance.

Au fond, la question de consistance ou non d'un système formel intervient au moment où le système d'axiomes ne peut plus se décrire sous la forme d'un modèle fini. Donc, la question devient capitale au moment où l'ensemble des axiomes ne se rapporte plus à un secteur d'objets familiers et bien définis. Ceci nous amène à dire que, les paradoxes apparus dans la théorie des ensembles, indiquent clairement que l'apparente évidence des notions élémentaires ne garantit en rien la consistance du système formel qui est construit à partir d'elles.

3° « L'axiomatique formelle est – elle décidable ? »

En d'autres termes, existe – t – il une méthode effective pour décider si une formule quelconque est vraie ou fausse ?, c'est-à-dire une méthode effective qui permet de décider, sans avoir à établir la preuve, si un énoncé est vrai ? Du fait qu'on a une formule quelconque du calcul des prédicats, existe – t – il un procédé systématique, général, effectif (ou un algorithme) qui permet de déterminer si cette formule est démontrable ou réfutable.

En clair, il s'agit là de l'énoncé de l'*Entscheidungs Problem* ou *Problème de la décision*. D'où, par définition, un système formel est *décidable* s'il existe une *procédure effective* prenant en entrée n'importe quelle proposition sensée qui y est

formalisable et qui, après analyse, répond par "oui, cette proposition est démontrable" ou "non, cette proposition est réfutable" dans le cadre de ce système. Il se dégage que tout système formel syntaxiquement complet est décidable.

La procédure de décision correspondante est aussi connue sous le nom d'algorithme du BRITISH MUSEUM⁵. Par contre, dans le cas d'un système formel syntaxiquement incomplet, on n'a aucune garantie que la procédure de décision est effective. De plus, cette procédure est vouée à l'échec chaque fois qu'on va lui soumettre une proposition qui n'est ni démontrable ni réfutable. Donc l'échec va résulter devant un indécidable.

En plus, lorsque le système formel est syntaxiquement incomplet, deux cas sont donc en effet possibles : ou bien la procédure de décision fonctionne ou bien on est en présence d'une procédure de semi – décision. Le deuxième cas nous amène à penser que la procédure de décision dit oui chaque fois que la proposition soumise est un théorème, sinon elle parcourt interminablement la liste des preuves dans l'ignorance ; si l'absence d'arrêt de la procédure est due à la non théoremicité de la proposition considérée ou puisque la preuve ainsi fournie est plus longue que prévue. Quand bien même on peut augmenter le temps d'attente, cela ne va pas résoudre le dilemme quand on sait *a priori* que la preuve cherchée n'existe pas. Il est évident d'affirmer que la situation des théorèmes et des non – théorèmes dans ce contexte n'est pas symétrique.

Donc, les systèmes formels indécidables existent et, par conséquent, la réponse à donner à la question posée par HILBERT sur la décidabilité de tout système formel, est à nouveau négative. Il y a lieu de reconnaître que les choses sont plus simples dans la mesure où aucun système décidable n'est, en même temps essentiellement et syntaxiquement incomplet.

Au congrès de Bologne, l'espoir de HILBERT était de parvenir à donner des réponses positives dans tous les cas. Mais, au fond, les trois réponses fournies sont négatives. Force est de souligner que les réponses négatives aux questions HILBERT, en particulier l'incomplétude et l'indécidabilité des systèmes formels suffisamment avancés, montrent clairement que l'activité mathématique ne pourra jamais se passer du secours de l'instruction.

De toute façon, il faut avouer que le calcul propositionnel est un exemple de système mathématique qui montre que les objectifs de la théorie hilbertienne de la démonstration, sont pleinement atteints. Remarquons que son vocabulaire et son appareil formel ne sont pas suffisamment alimentés pour développer ne serait – ce que l'arithmétique élémentaire.

8 LA COHÉRENCE D'UNE THÉORIE MATHÉMATIQUE

8.1 PRÉLIMINAIRE

Sur la cohérence d'une théorie, il y a lieu de retenir que les énoncés sans quantificateurs correspondent aux énoncés « finitistes ». Ce qui amène à concevoir une arithmétique qui répond aux axiomes suivants :

$$Sx \neq 0$$

$$S(x) = S(y) \rightarrow x=y$$

qui ne sont pas des modèles finis. On pourrait dire que ces axiomes sont vérifiés pour $\mathbb{N}$. A priori la signification des quantificateurs pose problème ici, c'est-à-dire il n'est pas possible de calculer la valeur de vérité de $\forall x$ ou $\exists x A$. D'où, on a les axiomes suivants :

$$x=x$$

$$x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$$

$$x=y \rightarrow y=x$$

$$x=y \rightarrow S(x) = S(y)$$

⁵ La procédure de décision due à l'algorithme de BRITISH MUSEUM fonctionne comme suit : « on commence par énumérer toutes les preuves dans l'ordre canonique, ce qui ne pose pas de problème puisque l'ensemble des axiomes est récursivement énumérable. De fait, une preuve n'étant jamais qu'une succession ordonnée et finie d'invocations d'axiomes et de règles logiques, elles – mêmes en nombres finis, on peut, avec un peu de méthode, lister les preuves dans l'ordre des longueurs croissantes et à longueurs égales dans l'ordre lexicographique. En les passant en revue, on a, à un moment ou à un autre, la certitude de tomber sur une preuve de A ou de non – A puisque par hypothèse de la complétude syntaxique, une de ces preuves existe à coup sûr », voir. La tétralogie, le sixième problème de Hilbert.

$$Sx \neq 0$$

$$S(x) = S(y) \rightarrow x=y$$

Pour Hilbert [11] les termes sont 0, S(0), S(0)),...

Les axiomes ayant la forme $\alpha=\alpha$ sont des équations vraies. On pourrait percevoir les autres axiomes comme des règles d'inférences permettant de déduire d'autres équations à partir d'équations vraies. Donc, il ne sera jamais possible de ne déduire que des équations vraies. Partant de cette hypothèse, on pourrait montrer la cohérence d'une théorie n'ayant pas de modèle fini, à partir de raisonnement de type syntaxique. En effet, le raisonnement purement syntaxique doit être possible pour la théorie des nombres réels.

Autrement, il est possible de montrer que les notions de base de la théorie de CANTOR, en particulier les alephs, ont une existence cohérente telle que Hilbert a affirmé :

Existence = Cohérence.

Peut-on avoir des raisonnements indirects qui passeraient par lemmes utilisant des énoncés quantifiés compliqués ? Il se remarque que la signification des énoncés quantifiés n'est pas, a priori, si claire qu'il faut expliquer des règles précises de déduction.

8.2 PREMIÈRE PREUVE DE COHÉRENCE

Pour HERBRAND, la cohérence d'une extension de théorie des preuves, se démontre en ajoutant les axiomes d'induction :

$$\emptyset(\vec{x}, 0) \wedge (\forall x. \emptyset(\vec{x}, y) \rightarrow 0(\vec{x}, S(y))) \rightarrow \forall y. \emptyset(\vec{x}, y)$$

Il faut souligner que l'argument est d'une simplicité notable, en ce sens que l'on pourrait le comparer aux preuves établies par ACKERMANN et Von NEUMANN. En effet, il présente aussi bien une preuve de cohérence qu'une caractérisation complète de la théorie ou de la procédure de décision.

Pour une théorie élémentaire de cohérence, il est possible de calculer la valeur de vérité des énoncés quantifiés [11].

En clair, d'après COQUAND, cet argument tient à éliminer les quantificateurs en associant à chaque formule $\phi(x)$ sans quantificateurs de manière à obtenir :

— $\forall x. \phi(x) \leftrightarrow \phi(x)$ est démontables à partir des axiomes donnés⁶.

8.3 UNE PREMIÈRE PREUVE DE COHÉRENCE

La démarche de HILBERT illustre une preuve de cohérence pour un fragment de théorie arithmétique. C'est plus la méthode que le résultat qui intéresse sa démarche mathématique. En effet, la méthode hilbertienne comprend en germe plusieurs idées directives relatives à la théorie des preuves. Ce fragment de la théorie mathématique se rapporte aux objets composés des symboles primitifs suivants :

$1, =, (,), f, f', u, x$ et u , un terme de la théorie qui est une combinaison quelconque de ces sept symboles. A titre illustratif, on a des expressions $\langle\langle 11 \rangle\rangle$, $\langle\langle (11)(1)(1) \rangle\rangle$, $\langle\langle 1(=1)f' \rangle\rangle$ et $(1)(==)uf' \rangle\rangle$ qui sont des termes.

Nous avons deux catégories des termes- les entités et les non entités qui sont divisés par les axiomes de la théorie mathématique, et ces catégories sont donc utiles pour déterminer la valeur de vérité, le vrai et le faux.

La théorie mathématique comporte les axiomes ci-après :

1. $x=x$,
2. $(x=y \wedge F(x) \rightarrow F(y))$,
3. $f(ux)=u(f'(x))$,

⁶Ceci montre le résultat obtenu par TARSKI concernant l'élimination des quantificateurs sur la théorie des corps réels clos.

$$4. \quad f(ux)=f'(uy) \rightarrow ux=uy,$$

$$5. \quad \neg (f(ux)=u1),$$

et quelques rudiments du calcul des prédicats permettant d'opérer des déductions.

D'une manière intuitive, le symbole u signifie un ensemble infini, ux un élément de l'ensemble u , f est la fonction successeur et f' , sa fonction accompagnatrice. Notons que les axiomes 1 et 2 définissent une propriété familière de l'égalité ; l'axiome 3 affirme que tout élément ux a un successeur $f(ux)$; ce successeur est égal à un élément infini u , à savoir $f'(ux)$, l'axiome 4 affirme que, si deux éléments de u ont le même successeur, alors ces éléments sont égaux ; et le dernier axiome stipule que 1 n'est le successeur d'aucun élément ou il est le premier élément.

Il est à noter que les expressions issues de l'application des axiomes 1 à 4 aux termes de la théorie, constituent la catégorie des entités, et que celles issues de l'application de l'axiome 5 à des termes, constituent la catégorie des non entités. Il convient de préciser que les expressions, dans la catégorie des entités, sont des propositions vraies, celles dans la catégorie des non entités, sont des propositions fausses. Ainsi, il y a lieu de déduire que l'on ne peut pas prouver, à ce point, une inconsistance. Cela signifie donc qu'on ne peut pas démontrer qu'il n'y a pas d'expression logique qui soit à la fois une entité et une non entité.

L'homogénéité est une propriété invariante des entités. Elle est utilisée par la preuve de la consistance. Ainsi, une expression est dite homogène, si en faisant abstraction des parenthèses, on peut trouver un nombre égal de symbole de part et d'autre de l'égalité.

On voit, par exemple, que toutes les expressions décrivant des axiomes 1 et 2 sont de la forme $\infty=\infty$ où ∞ est un terme quelconque. Il en résulte que ces axiomes engendrent des expressions homogènes.

De même, les axiomes 3 et 4 engendrent des expressions homogènes. En effet, les expressions qui y figurent sont également homogènes. En clair, toutes les entités, c'est-à-dire des propositions vraies, sont homogènes.

Les expressions dans la catégorie des non- entités sont de la forme $f(ut) = u1$, où t est un terme quelconque. Si on y décèle une contradiction, cela veut dire qu'une expression de la forme $f(ut)=u1$ est donc une entité.

Pourtant, $f(ut)=u1$ n'est pas homogène. Par conséquent, l'expression en question ne peut pas être une entité. Donc, la théorie de la cohérence s'ensuit.

Chez HILBERT, et de l'avis de POINCARÉ, cette preuve est jugée comme une preuve emblématique de la théorie des preuves. Cela signifie que la théorie des preuves se décrit par une famille d'axiomes se rapportant aux objets symboliques. Et puis l'arithmétique élémentaire est utilisée en vue de prouver qu'aucune contradiction ne peut être en mesure de survenir dans la théorie. A cet effet, POINCARÉ déduit que l'arithmétique élémentaire est donc nécessaire, cela sans tenir compte des apparences pour arriver à donner une forme rigoureuse à l'argumentation.

Aussi trouve-t-il téméraire de penser qu'une preuve de cohérence de l'arithmétique, peut être établie suivant cette démarche, et pourtant elle pourrait dépendre très grandement de ce dont elle s'engage à prouver la consistance. Il s'agit ici des principes de l'arithmétique.

Donc, il estime qu'une telle entreprise serait circulaire et ne mentionne pas l'argumentaire soutenant que les théories pour lesquelles les dites preuves sont établies ne signifient rien. Mais, en réalité, elles sont essentiellement des combinaisons de symboles.

8.4 DEUXIÈME PREUVE DE COHÉRENCE

La méthode utilisée par TARSKI concernant l'élimination des quantificateurs sur la théorie des corps réels clos, ne fonctionne pas dès que l'on ajoute les opérations d'addition et de multiplication. Puisqu'elle pouvait donner lieu aussi à un procédé de décision. Sur ce, l'arithmétique de PRESBURGER ajoute seulement l'opération d'addition. On reconnaît le rôle important que joue la méthode d'élimination des quantifications en démonstration automatique [11]. Elle est extrêmement faisable, car elle opère par ajoute des symboles des fonctions ayant des axiomes qui spécifient attentivement ces fonctions. A titre d'exemple, notons :

$$x + 0 = x,$$

$$x + S(y) = S(x+y),$$

$$x \cdot 0 = 0,$$

$$x \cdot S(y) = x + x \cdot y$$

Remarquons que si $P(x)$ est sans quantificateur et t est un terme clos, alors on est devant une alternative, soit $P(t)$ soit $\neg P(t)$ est démontrable. Comme on le sait, intuitivement, les formules sans quantificateurs sont décidables [11].

Evidemment tous les termes clos sont égaux à des termes ayant la forme $0, S(0), S(S(0)), \dots$

Il est cependant possible d'ajouter des définitions ayant la forme

$$\emptyset(x) \rightarrow f(x) = 0,$$

$$(\neg \emptyset(x)) \rightarrow f(x) = S(0)$$

Et c'est pour avoir $\emptyset(x)$: formule sans quantificateurs. Une fois l'axiome d'induction enlevé, il est dérivable à partir de ces types de fonctions, pour les formules d'induction n'ayant donc pas de quantificateurs. [11]

9 LA MÉTAMATHÉMATIQUE : APPROCHE HILBERTIENNE

La métamathématique, en tant qu'une approche scientifique, utilise des méthodes fiables pour évaluer la fiabilité des théories mathématiques. Les méthodes fiables en question sont celles de l'arithmétique intuitive qui est une théorie qui nous est donnée *a priori*. L'évolution d'une théorie est une entreprise qui consiste à démontrer qu'elle est non contradictoire. Pour HILBERT, la philosophie mathématique ne se fonde pas sur des essences platoniciennes pour garantir la certitude d'une théorie, elle se contente plutôt de prouver la cohérence. Ainsi, pour HILBERT, du moment qu'un système formel ne mène à aucune contradiction, il est jugé admissible. Dans le sens hilbertien, fonder consiste donc à donner des preuves de consistance ; c'est là le mandat principal de la métamathématique.

Prenant le contre pied de BROUWER ou de KRONECKER, HILBERT ne considère pas la condition intuitionniste comme une finalité. Pour lui donc, le mathématicien ne doit pas s'aliéner les outils de base : le principe du tiers exclu, l'infini actuel et la théorie des ensembles transfinis. En effet, il estime que ces outils fondamentaux font la fertilité des mathématiques.

Evidemment, l'infini n'existe ni dans la réalité ni dans la psychologie du mathématicien. En toute éventualité, cet infini pourrait jouer un rôle dans notre manière de penser et d'être indispensable à la théorie mathématique.

A ce propos, des questions suivantes méritent d'être posées : comment introduire l'infini sans se commettre à l'infini ? Comment parler de l'infini si l'infini n'est pas un objet d'intuition valable ? Pour répondre à ces questions, il faut traiter l'infini comme une entité idéale, c'est-à-dire une entité n'ayant pas de contenu intuitif réel et qui est défini seulement par le rôle qu'elle joue à l'intérieur d'une théorie mathématique.

HILBERT développe, pour les entités idéelles, une sémantique qui comporte de ressemblances avec la notion de classe introduite par RUSSELL et WHITEHEAD et qui s'explique par l'entremise des symboles incomplets. La sémantique hilbertienne renonce à donner aux entités idéelles un contenu déterminé qui se contente seulement de préciser les axiomes qui les définissent [12].

Pour HILBERT, le nombre imaginaire c'est un objet de pensée fictif, et son utilisation se passe en le considérant comme un objet arithmétique ayant la propriété supplémentaire $i^2 = -1$.

Au fond, c'était de la même manière que la notion d'infini a été introduite dans la théorie des ensembles de ZERMELO-FRAENKEL. Ainsi, un ensemble infini est en fait un objet X dont l'usage est régi par les deux axiomes ; à savoir :

1° L'ensemble vide appartient à X , $\emptyset \in X$;

2° Si $x \in X$ alors le successeur de x appartient à X , $x \cup \{x\} \in X$.

En clair, l'ensemble infini aux axiomes 1 et 2 permet de définir l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ pris comme une totalité achevée dans cette théorie, c'est-à-dire :

$$\mathbb{N} = \cap \{E \mid \emptyset \in E \wedge \forall x (x \in E \rightarrow x \cup \{x\} \in E)\},$$

Il en résulte que l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble qui a la propriété « inductive », c'est-à-dire $\emptyset \in E$ et $\forall x (x \in E \rightarrow x \cup \{x\} \in E)$. Avec la méthode axiomatique, il est possible d'introduire plusieurs objets fictifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, le comportement de ∞ à l'endroit de ses comparses se présente comme suit, en posant :

$$(1) \quad n + \infty = \infty + n = \infty \text{ et } \infty + \infty = \infty;$$

$$(2) \quad 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0, \infty \cdot \infty = \infty \text{ et si } n \geq 1 \text{ alors } n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty;$$

$$(3) \quad n < \infty.$$

Etant donné que ces règles indiquent la manière de manipuler avec les opérations « + » et « . » et les prédicats « = » et « < », la vérité de toute proposition arithmétique qui porte sur les objets de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pourra se déterminer sans tenir compte de l'inexistence de ∞ . En effet, l'introduction d'un objet fictif comme ∞ est minée par l'exigence de prouver que cet objet ne conduit à aucune contradiction

« $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 =$ indiquée ci – haut était remplacée par $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 1$ »

$$1 = (n \cdot 0) \cdot \infty = n \cdot (0 \cdot \infty) = n$$

quelque soit n . D'où on a une contradiction lorsque $n \neq 1$. Cela indique que le finitisme ne doit pas se doubler d'une méthode mathématique aux fins de prouver la consistance des systèmes d'axiomes. Pour HILBERT, cette méthode consiste à considérer la théorie mathématique idéale comme une entité symbolique finie à scruter au moyen de l'arithmétique intuitive.

Le métalangage est perçu, dans la perspective des fondements, comme une notion cardinale pour l'étude de toute théorie mathématique. Cette approche est rendue possible par une conception symbolique de l'objet et de la théorie mathématique. Ainsi, la preuve de la consistance logique dépend seulement des propriétés symboliques du langage et ne se repère jamais à la structure définie par les axiomes. En fait, toute théorie mathématique, dépassant le contexte finitiste, est aussi dépourvue de référence. Ici les seules véritables propriétés logiques que la théorie mathématique possède sur le plan contextuel sont les propriétés symboliques liées à sa formalisation. Du point de vue de la théorie mathématique, le contenu procède du symbole et cela est dû au fait que le symbole est l'objet par excellence de la « raison arithmétique contextuelle ». Pour HILBERT, l'approche sémantique est telle que le symbole n'a pas de signification mais il est la signification⁷.

Dès lors, HILBERT estime que la logique est une affaire de manipulations symboliques. Ici, l'objet et l'expression sont fondus en un. D'où, la métamathématique n'est pas, à vrai dire, une métathéorie. Elle est une seule et même théorie qui est la seule véritable théorie appelée *l'arithmétique contentuelle*. De ce point de vue, il résulte que les objets de la métamathématique sont toujours les mêmes : ce sont des symboles. Ils prennent différemment les noms de « axiomes de l'analyse réelle », « axiomes de la géométrie » ou encore « nombres naturels ».

Pour HILBERT, généralement, il n'y a pas de relation entre une théorie objet et son métalangage. Une seule théorie existant, c'est-à-dire *l'arithmétique réelle* ; celle-ci porte sur un seul type d'objet qui est le symbole prenant parfois plusieurs formes.

10 CONCLUSION

Pour terminer, il nous revient de déduire que, suivant le programme de HILBERT, les principes de la logique et ceux de l'arithmétique sont tels que pour RUSSEL, la logique est antérieure à l'arithmétique tandis que pour HILBERT, elles sont *simultanées*. Pour ce logicien et mathématicien, les mathématiques ne doivent combiner que de purs symboles. A ce titre, un vrai mathématicien doit raisonner sur ces symboles sans se préoccuper du sens à leur conférer.

L'échec irrémédiable du projet de HILBERT sur la cohérence de l'arithmétique était systématiquement et rigoureusement établi par les théorèmes de limitation de GÖDEL, dits théorèmes d'incomplétude. Mêmes accouplés d'un formalisme rigoureux, les résultats de GÖDEL n'ont pas totalement rejeté le finitisme de HILBERT, bien qu'ils aient jeté un discret sur le projet hilbertien.

Les preuves de la cohérence des systèmes formels en arithmétique ne sont pas les seules avancées significatives enregistrées dans le domaine des recherches métamathématiques, en particulier pour ce qui regarde la décidabilité et la calculabilité effective.

Les résultats très remarquables dans la théorie des preuves sont signalés et réalisés brillamment par les travaux de GÖDEL, CHURCH, TURING, TARSKI, KLEIN, ROSSER etc. Pour F. GONSETH, l'importance de la métamathématique est sans

⁷Notons que ce point de vue remet en question le rapport traditionnel entre le symbole et ses significations. La perspective traditionnelle était soutenue par FREGE et RUSSELL pour qui l'objet logique est indépendant de la façon de la dénoter. Donc, il est désigné par l'expression symbolique et non pas par l'expression elle-même.

conteste. Elle peut s'apprécier indépendamment de toute pensée ou doctrine philosophique se rapportant à la théorie des fondements.

REFERENCES

- [1] Y. Gauthier, "Hilbert and the Internal Logic of Mathematics", *Synthese*, vol 101, n°1, 1994, p.1. 2013.
[Online] Available : http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker (août 2013).
- [2] Jonas Bolyai: *Science Absolue of Space*, New York, Dover Publications, 1955.
- [3] Pierre Cassou-Nogues, « Le programme de GÖDEL et la subjectivité mathématicienne », *Cahiers Français viete*, n°3, pp.31-55, 2002.
- [4] D. Hilbert : *Les fondements de la géométrie*, Paris : Dunod, 1971.
- [5] Rodolf Bkouche, *La démonstration : du réalisme au formalisme*, 2013.
[Online] Available : <http://www.michel.delord.free.fr/rb/rb-demrealform>, (août 2013).
- [6] Kosta Dosen, *Le programme de HILBERT*, Nouvelle Encyclopédie Didéront, Paris : Presses Universitaires de France, 1999, pp.87-106.
- [7] Y. Gauthier, De Hilbert à Kronecker. *Les fondements de la logique arithmétique*, 2013.
[Online] Available : http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker (août 2013).
- [8] Van Heijenoort: *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879 – 1931*, Cambridge (Mass.) Harvard, University Press, 1967.
- [9] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, Tomes I et II, Paris : L'Harmattan, 2001 (Tome I, p.87).
- [10] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, Tome II, Paris : l'Harmattan, 2001.
- [11] Thierry Coquand, *Herbrand et le programme de Hilbert (15 février 2008)*.
[Online] Available : https://www.math.ens.fr/herbrand100/coquand_slides (août 2013)
- [12] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, T1, Paris : l'harmattan 2011.
- [13] Ian, Stewaert : *Les mathématiques*, traduit de l'anglais par François GALLET, Collection Sciences d'Avenir, Paris : Pour la science, 1989.
- [14] Y. GAUTHIER, « Fondements des mathématiques », *Encyclopédie Philosophique Universelle. Les notions philosophiques*, T1, Paris : PUF, 1990. voir aussi Y GAUTHIER, *Les fondements de la logique arithmétique*, http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker.pdf, (août 2013).
- [15] Kosta DOSEN : *Le programme de Hilbert*, voir aussi *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, J.SALLANTIN et J-J. SZCZECINARZ eds, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Paris : Presses Universitaires de France, 1999.

L'arithmétique formelle et l'incomplétude

A.-Roger LULA BABOLE¹⁻² and Yves MANGONGO TINDA³

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

³Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: By applying the formal arithmetic model, the mathematic and logic theories have created the self-references and have chosen a specific model for accomplish the logic-mathematics proves. A formal arithmetic (ROBINSON et PEANO) constitute in this fact the basic hypothesis for the two incompleteness theorems.

KEYWORDS: formal arithmetic, incompleteness, decidability, axiomatic, coherence.

RÉSUMÉ: En appliquant le modèle de l'arithmétique formelle, les théories mathématiques et logiques ont créé les autoréférences et ont choisi un modèle spécifique pour faire assoir les preuves logico-mathématiques. L'arithmétique formelle (ROBINSON et PEANO) constitue, à cet effet, les hypothèses de base de deux théorèmes d'incomplétude.

MOTS-CLEFS: Arithmétique formelle, incomplétude, décision, axiomatique, cohérence.

INTRODUCTION

Nous indiquons les rapports existants entre l'arithmétique formelle et les deux théorèmes d'incomplétude. En effet, l'arithmétique de ROBINSON (PA^-) et l'arithmétique de PEANO (PA) servent de base formelle pour la démonstration de ces théorèmes. En somme, l'arithmétique de ROBINSON, petit fragment de l'arithmétique de PEANO, permet d'établir le théorème de représentation faisant assoir le premier théorème d'incomplétude par sa moindre expressivité. Sa preuve formelle se présente par des inductions structurelles et utilise les récurrences externes. Alors que, quand la preuve est internalisée dans l'arithmétique, on a recours aux récurrences internes. Donc, on se sert de l'arithmétique de PEANO. Ainsi, le second théorème d'incomplétude ne vaut que pour les théories récursives comprenant l'arithmétique de PEANO.

1 LES HYPOTHÈSES DES DEUX THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE [1]

La démonstration du premier théorème d'incomplétude n'utilise en effet qu'un tout petit fragment de l'arithmétique de PEANO qui permet juste d'établir le théorème de représentation. Le fragment essentiel à l'établissement de ce théorème, est appelé arithmétique de ROBINSON (PA^-). Il exprime donc toutes les propriétés récursives des entiers standards.

Du point de vue formel, l'arithmétique de ROBINSON se définit par suppression de toutes les instances du schéma de récurrence, l'exception d'une instance permettant de prouver que tout entier est soit nul, soit le successeur d'un autre entier.

Dans cette perspective, l'arithmétique de ROBINSON permet de prouver que toutes les additions commutent ($4+3=3+4$, $71+13=13+71$, etc.), mais ce n'est pas que l'addition est commutative en $(\forall x \forall y (x + y = y + x))$.

L'hypothèse selon laquelle la théorie T est récursive est fondamentale au regard de cette remarque. La raison essentielle est qu'elle permet d'appliquer le théorème de représentation à la fonction qui teste si un entier est le code d'une preuve correcte dans T .

On notera en effet par ailleurs que la démonstration du théorème de complétude de la logique du premier ordre, autre fameux résultat dû à GÖDEL, indique que l'arithmétique formelle, qu'elle soit de PEANO ou de ROBINSON, a des extensions non récursives qui sont complètes.

La démonstration du premier théorème d'incomplétude utilise les récurrences externes qui sont les inductions structurelles sur les termes, les formules et les preuves aux fins de définir le codage et montrer ses propriétés logiques. Quand cette démonstration est internalisée dans l'arithmétique, on voit alors que ces récurrences se retrouvent sur le plan interne ; raison pour laquelle le second théorème d'incomplétude n'est valable que pour les théories récursives qui comprennent l'arithmétique de PEANO(PA)¹.

2 L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO (PA)

L'arithmétique de PEANO, notée PA, est la théorie qui s'obtient en ajoutant à la théorie de l'égalité ε les six axiomes suivant :

- (PA1) $\forall y(0 + y = y)$
- (PA2) $\forall x(s(x) + y = s(x + y))$
- (PA3) $\forall y(0 \times y = y)$
- (PA4) $\forall x \forall y(s(x) + y = (x + y) + y)$
- (PA5) $\forall x \forall y(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- (PA6) $\forall x(s(x) \neq 0)$

Ainsi que les axiomes de récurrence

(PA7) $\forall z_1 \dots z_n (A = \{x := 0\} \wedge \forall x(A \Rightarrow A\{x := s(x)\}) \forall x A)$. Cet axiome est en effet la clé de voute de l'arithmétique. C'est donc le seul à faire appel à la notion de classe.

Pour chaque formule A de variables libres $x, z_1, \dots, z_n$

D'une manière concrète, PEANO a étendu l'axiomatique de ROBINSON à partir de la possibilité offerte par la logique du premier ordre consistant à formaliser le principe de récurrence. L'axiome 7 est remplacé par le schéma d'axiomes suivant :

$$\text{Ax7}' \quad ! (p[0] \wedge \forall a : (p[a] \rightarrow p[Sa])) \rightarrow \forall b : p[b],$$

ou

$$\text{Ax7}'' \quad \forall p : (p[0] \wedge \forall a (p[a] \rightarrow p[Sa])) \rightarrow \forall b : p[b],$$

qui aurait l'avantage de pouvoir condenser le schéma de récurrence en un axiome unique.

L'arithmétique de PEANO, PA_1 du premier ordre, sert de cadre de référence consensuel pour la théorie des nombres naturels. Quand bien même elle adopte l'axiome d'induction lui permettant de lever l'indécidabilité des énoncés élémentaires tels que : $a+a=a$, $a=(b+c)=(a+b)+c, \dots$, cette arithmétique est au fond syntaxiquement incomplète et indécidable.

Expressivité de l'arithmétique de PEANO, PA

L'arithmétique de PEANO est une théorie très expressive permettant de prouver les propriétés simples de l'addition et de la multiplication (associativité, commutative, éléments neutres, distributivité, etc.), de l'ordre (réflexivité, transitivité, antisymétrie et totale) et de l'ordre strict. Particulièrement le schéma de récurrence forte s'écrit de la manière suivante :

¹ La démonstration du premier théorème d'incomplétude n'utilise pas le schéma de récurrence interne qui est du domaine de l'arithmétique formelle, numérisée.

$$PA \mapsto \forall x (\forall y (y < x \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x)) \rightarrow xA(x)$$

et la propriété de bon ordre

$PA \mapsto \exists x A(x) \rightarrow \exists x (\forall y (x \leq y \rightarrow A(y)))$ sont prouvables dans PA

Les théorèmes de PA concernent aussi bien les propriétés élémentaires, les propriétés de la divisibilité et de l'arithmétique modulaire que des propriétés de nombres premiers. On utilise à cet effet :

$$Prim(x) \equiv x \neq 1 \wedge \forall y \forall z (x = y \times z \rightarrow 1 \vee z = 1).$$

Le travail d'adaptation au niveau de l'énoncé et de la preuve conduit à énoncer le théorème d'EUCLIDE sous sa forme originelle comme suit :

$$\forall x \exists y (y > x \wedge Prim(y))$$

Pour la preuve de ce théorème, on vérifie si les formules suivantes sont prouvables dans PA.

1. $\forall x (x \geq 2 \rightarrow \exists y Prim(y) \wedge x = sy(x))$
2. $\forall x \exists y (y \neq 0 \wedge \forall x' (1 \leq x'sx' \leq x \rightarrow x' = y))$
3. $\forall x \forall y (y \neq 0 \wedge \forall x' (1 \leq x'sx' \leq x \rightarrow x' = y))$
 $\rightarrow \forall z (Prim(z) \wedge z(s(y)) \rightarrow x < z)$

Dès le début, PEANO avait formulé son arithmétique au moyen des axiomes (ou une variable) et du schéma d'induction.

L'expression :

$A[0] \wedge \forall y (A[y] \Rightarrow A[Sy]) \rightarrow \forall x A[x]$ est formulée par une propriété arbitraire des nombres naturels. Par ailleurs, le paradoxe de RICHARD (1905) montre le contraire c'est-à-dire il doit faire partie d'un langage formel bien défini. Cela signifie que c'est l'arithmétique de PEANO qui est le système formel PA obtenu par ajout aux axiomes de PA, du schéma d'induction restreint aux propriétés arithmétiques, c'est-à-dire aux énoncés du langage.

Le second théorème d'incomplétude est au fond une formalisation du premier théorème. La preuve informelle du premier théorème se montre par des inductions. Donc, le second théorème est établi dans l'arithmétique de PEANO (ou sa variante intuitionniste).

En effet, il est à préciser naturellement que les inductions ont lieu sur des énoncés de prouvabilité, donc expansifs Σ_1^0 . Le second théorème exploite ainsi l'induction restreinte pour les énoncés Σ_1^0 . Ce n'est pas optimal, quand bien même il présente une bonne idée claire et précise.

En effet, le « bon système » prend en compte les primitives fonctionnelles. La fonction exponentielle est obtenue de manière à pouvoir remplacer dans certains cas des quantifications non bornées. Alors que l'induction est limitée aux énoncés sans quantificateurs non bornés.

Enfin, on peut aussi formuler l'induction avec deux ou trois variables emboîtées etc. pour les inductions généralisées, on les voit apparaître en des inductions transfinies.

On a par exemple, deux variables jusqu'à ω^2 , à trois jusqu'à ω^3 . Donc, *a priori* on se retrouve avec deux paramètres pour une induction. D'une part, la longueur de l'induction et, d'autre part, la complexité (alternance de quantificateurs) de l'énoncé « induit ».

La seconde preuve de GENTZEN montre que l'induction initiale est de longueur courte (ω), mais de complexité arbitraire (n'importe quel Σ_n^0), tandis que sa preuve de cohérence utilise une induction longue (ε_0), mais de basse complexité. Ici, elle est sans quantificateurs.

L'arithmétique de PEANO exhibe un exemple de système non finement axiomatisé et d'ailleurs non finement axiomatisable. Il est vrai qu'on doit imposer des limitations à l'utilisation de listes infinies d'axiomes. Autrement, on tombe dans le travers des logiques non monotones c'est-à-dire, plus de notion de preuve. Naturellement, on définit une famille décidable avec les axiomes.

Une fausse généralisation, dans ce cas, est une axiomatisation expansive, c'est-à-dire récursivement énumérable qui ne produit rien de plus. De manière concrète, si on remplace l'axiome A_n fourni à l'étape n par une variante qui lui est

équivalente au moins de taille $\underline{n}$, par exemple, la conjonction ou la disjonction de $\underline{n}$ copies de $A\underline{n}$. Ce qui veut dire qu'on remplace une axiomatique $r. e.$ par une axiomatique dite récursive.

Au cas où on abandonnait les restrictions récursives sur la prouvabilité, on perdrait l'expansivité et le lien avec le calcul, alors que toute la machinerie reste intacte. On doit, pour ce faire, prendre en compte la complexité logique de la « déduction » : ne pas se priver de n cohérences... pour atteindre donc une généralisation de tout genre.

Le système d'axiomes de PEANO est un ensemble de conventions qui permettent de représenter les formules et d'établir les preuves mathématiques au sujet des nombres entiers. L'utilisation de cette axiomatique permet d'écrire et de prouver une formule signifiant que « $30 = 2 \times 3 \times 5$ » ou que « 40 est la somme des deux carrés » (36 et 4).

Pour ce système formel les raisonnements sur les entiers se ramènent à des manipulations formelles. Cela veut dire qu'on a des manipulations de symboles qui respectent rigoureusement les règles intangibles [2].

3 L'ARITHMÉTIQUE DE ROBINSON (PA^-)

L'arithmétique de ROBINSON, notée PA^- , est la théorie du premier ordre qui s'obtient à partir de l'arithmétique de PEANO et cela par suppression de tous les axiomes de récurrence ($PA7$) et par substitution en un unique axiome de « filtrage ».

$$(PA\bar{7}) \quad \forall x(x = 0 \wedge \exists y(x = s(y)))$$

C'est-à-dire tout entier naturel est soit nul, soit le successeur d'un autre entier. En effet, le « ou » exclusif découle de ($PA6$).

A l'opposé de PA , la théorie PA^- se définit à partir d'un ensemble fini d'axiomes.

Il est à remarquer que l'axiome de filtrage ($PA\bar{7}$) est logiquement équivalent à l'axiome de récurrence..

$A(0) \wedge \forall x(A(s(x)) \Rightarrow \forall x A(x))$ pour la formule $A(x) \equiv x = 0 \vee \exists y(x = s(y))$. En clair, l'axiome ($PA\bar{7}$) est de manière implicite contenu dans les axiomes de récurrence ($PA7$) de l'arithmétique de PEANO. D'où, il n'est pas inclus dans la liste d'axiomes présentée.

Il va de soi que toute formule prouvable dans PA^- est également prouvable dans PA . Ce qui laisse entendre que l'arithmétique de ROBINSON est un système de l'arithmétique de (PA).

L'arithmétique de ROBINSON PA^- formalise plus simplement l'arithmétique universelle dans le cadre d'un langage du premier ordre. Elle va poser l'existence de "0" et de la fonction unaire. Elle va aussi définir les opérations binaires, "addition" et "multiplication".

Il sied de reconnaître que l'axiomatique de ROBINSON sur le plan syntaxique est incomplète puisqu'un grand nombre de propositions y sont indécidables, tel l'énoncé, $a+b=b+a$; cette axiomatique ne permet ni de prouver ni de réfuter en toute généralité, alors qu'elle prouve ainsi séparément chaque instance du schéma, par exemple :

$$\begin{array}{ccccccc} SS0+SS0= S & (SS0+0)=SSS0=SS & (S0+0)=S & (S0+SS0)= & S0+SS0 \\ \text{Ax}_4 & \text{Ax}_3 & \text{Ax}_3 & \text{Ax}_4 & \text{Ax}_4 \end{array}$$

Cela signifie donc que l'arithmétique de ROBINSON PA^- peut prouver la commutativité de l'addition et ce, instance après instance, mais elle est incapable de les condenser entièrement en une seule formule.

D'autres énoncés indécidables de l'arithmétique de ROBINSON PA^- sont :

$$a+a=a \text{ ou } a+(b+c)=(a+b)+c, \dots$$

Evidemment, cette axiomatique est ω -incomplétude. Ce qui veut dire qu'il existe des chaînes de théorèmes entièrement indexés par un entier i , tel qu'on se permet de dire que la formule quantifiée, les condensant toutes, n'est pas un théorème.

L'expressivité de l'arithmétique de ROBINSON est beaucoup moins expressive que l'arithmétique de PEANO puisqu'on ne peut pas y prouver que l'addition est associative ou commutative :

$$PA^- \vdash (x + y) + z = x + (y + z), \quad PA^- \vdash x + y = y + x$$

Le premier théorème d'incomplétude est d'ordinaire formulé pour des systèmes fondés sur un langage simpliste dû à PEANO. Il opère avec quatre symboles fonctionnels, à savoir :

La constante 0, le successeur S (unaire) et les symboles binaires +, ×. Ainsi va – t – on coder l'entier 5 par le terme $\bar{5} := sssss0$. En général, on note n par $\bar{n}$, n symboles s suivi d'un zéro. Retenons que la régression accompagnant le progrès, c'est-à-dire le formalisme, nous amène à la numération pré-babylonienne. Deux symboles binaires de prédicats sont considérés =, <. Les axiomes du système PA^- se subdivisent en trois groupes, à savoir :

Egalité : ces axiomes expriment que l'égalité est une congruence :

$$\begin{aligned} x &= x ; x = y \rightarrow y \rightarrow x ; x = y \wedge y = z \rightarrow x = z ; \\ x &= y \wedge z = t \wedge x < z \rightarrow y < t ; x = y \rightarrow Sx = Sy ; \\ x &= y \wedge z = t \rightarrow x + z = y + t ; x = y \wedge z = t \rightarrow x \times z = y \times t ; \end{aligned}$$

Ces axiomes suffisent pour prouver $x = y \wedge A[x] \rightarrow A[y]$.

Définitions : Quant à leurs définitions, ces axiomes aident à prouver les équations et inéquations de base. Le groupe $x + 0 = x ; x + Sy = S(x + y) ; x \times 0 = 0 ; x \times Sy = (x \times y) + x$, pour tout terme clos t dont la valeur est n , l'égalité $t = \bar{n}$. Evidemment, toutes égalités $t = \mu$ entre termes clos sont vraies. Le groupe $Sx \neq 0 ; Sx = Sy \rightarrow x = y$ (troisième et quatrième axiome de PEANO) prouve toutes les inéquations $t \neq \mu$ entre termes clos. Elles sont donc vraies. Retenons que ces deux axiomes laissent penser à un domaine infini (sans eux on s'attendrait à avoir $\bar{10} = \bar{0}$).

Finalement, le groupe $\neg(x < 0) ; x < Sy \Leftrightarrow x < y \vee x = y$ prouve toutes les inégalités ou non inégalités $t < \mu, \neg(t < \mu)$ entre termes clos. Elles sont donc vraies. Ainsi il prouve l'équivalence $x < n \Leftrightarrow x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee \dots \vee x = \overline{n-1}$. Il permet aussi de passer à l'étape cruciale des quantificateurs bornés.

Notons qu'un dernier axiome laisse penser que l'axiome $x < y \vee x = y \vee y < x$ est intrinsèquement différent des autres. Il n'est donc pas nécessaire à l'incomplétude. En effet, la représentation des propriétés expansives est assurée par les axiomes de définition. Il sert à la représentation des fonctions récursives. Cela signifie qu'il sert à l'indécidabilité algorithmique de PA et de toutes ses extensions cohérentes. Il est utilisé également dans la variante de ROSSER.

L'incomplétude utilise d'habitude la logique classique. Elle peut aussi utiliser la logique intuitionniste, voir aussi la logique linéaire².

En termes clairs, tout système cohérent qui contient ces quelques axiomes sera incomplet et, donc indécidable. L'indécidabilité signifie ici que le système ne décide pas toutes les propriétés, mais surtout on n'est pas en mesure au niveau d'algorithme de savoir si un énoncé est prouvable ou non. Par contre, la décidabilité dit plus que cela, par exemple, on peut :

- (i) Remplacer le troisième axiome de PEANO par, disons $\bar{10} = \bar{0}$. Dans ce cas, on est dans le fini (les entiers *modulo* 10) et le système est dit décidable ; au cas contraire, on reste dans l'indécidable.
- (ii) Se priver du symbole propre au produit (arithmétique de PRESBURGER³, décidable). Il est clair que cette privation est comprise, par la multiplication, dans la représentation des suites finies. Ces systèmes sont donc décidables.

²La logique linéaire est une invention du logicien français Jean-Yves GIRARD.

³L'arithmétique de PRESBURGER,

L'arithmétique de PRESBURGER est une restriction de L'arithmétique de PEANO où est éliminée la multiplication. Elle opère avec l'addition et éventuellement l'ordre. Elle a la même syntaxe et sémantique que celle de PEANO, mais pas de multiplications. Précisons ici que la multiplication par une constante est permise. Dans ce cas la multiplication est une suite finie d'additions.

Illustrons cela par un exemple

$\forall x \exists y. y \geq 2 * x$

Notons en effet que l'arithmétique de PRESBURGER est beaucoup moins expressive mais décidable et complète pour le sous-ensemble qui correspond aux axiomes de PEANO. Elle est construite sur une complexité triple exponentielle déterministe $2^{2^{2^{cn}}}$, mais elle est simple sans quantificateurs.

L'arithmétique de PRESBURGER comporte les axiomes suivants :

1. $\neg(0=x+1)$
2. $x+1=y+1 \rightarrow x=y$
3. $x+0=x$
4. $(x+y)+1=x+(y+1)$

Pour LASCAR, il est possible de construire dans le langage de l'arithmétique un énoncé, noté $\text{Dem}(n)$ qui dépend du paramètre n et qui veut dire que l'entier naturel n est le code répondant à une formule à prouver à partir des axiomes de PEANO. L'arithmétique est ici reflétée à l'intérieur d'elle-même. Il résulte dans le cas de l'incomplétude de prendre une formule, notamment fausse du genre, $1 = 2$. Si son code est, par exemple, 337500 et φ , la négation de $\text{Dem}(3307500)$. En termes clairs, la formule signifie que $1 = 2$ n'est pas prouvable à partir des axiomes de PEANO. De toute évidence, il y a lieu de constater que ces axiomes ne sont pas contradictoires. Or, disons-le, GÖDEL a su parfaitement montrer que la formule φ en elle-même n'était pas prouvable, à partir des axiomes de PEANO. D'où, il faut affirmer que ce qui est vrai n'est pas nécessairement démontrable [3].

4 CONCLUSION

En arithmétique formelle, il y a des énoncés vrais qu'on ne peut pas démontrer à partir des axiomes de ce système axiomatique. Donc, pour contourner les tribulations de l'incohérence logique, l'incomplétude est justement le prix à payer. L'arithmétique formelle sert de fondement logique pour prouver le théorème d'incomplétude. Par ses récurrences externes, l'arithmétique de ROBINSON permet d'établir le théorème de représentation qui sert à la preuve du premier théorème d'incomplétude et le second théorème n'est valable que pour, les théories récursives qui comprennent l'arithmétique de PEANO.

-
5. Supposons que $P(x)$ soit une formule logique du premier ordre opérant dans le langage de l'arithmétique de PRESBURGER, n'ayant pas d'autres symboles de fonction que le successeur et l'addition et possédant la variable libre x (et avec l'éventualité d'autres variables libres). Disons alors que la formule suivante est un axiome :
- $$(P(0) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow P(x+1))) \rightarrow P(y).$$

REFERENCES

- [1] Alexandre Miquel, *Les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL*, 2013.
[Online] Available : <http://perso.enslyon.fr/natacha.portier/enseign/logique/GoedelParAlex.pdf>, (Août 2013).
- [2] Jean-Paul Delahave, « L'incomplétude, le hasard et la physique », *Pour la science*, n°355, pp.90-94, 2007.
- [3] D. Lascar, « Formalisation de l'arithmétique », *Encyclopédie Philosophique Universelle. Les Notions Philosophiques*. T1, Paris : PUF, pp.1022-1024, 1990.

L'arithmétisation et la métathéorie

A.-Roger LULA BABOLE¹⁻²

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The resort in arithmetization of arithmetic reaches to construct inside of arithmetic a proposition which confirm its self-indemonstrability. In substance, the proof of coherence presupposes a form of induction in transfinite order for proving the coherence of arithmetic which is the finite order. It is dealing recursive functions which have the properties for all attribute values system to determine them by the means of finite type procedure. It comes to recursive arithmetic, to translate the elements of metatheory formal system.

KEYWORDS: arithmetization, metatheory, recursivity, recursive arithmetic, iteration, metamathematic, incompleteness.

RÉSUMÉ: Le recours à l'arithmétisation de l'arithmétique amène à construire à l'intérieur de l'arithmétique une proposition qui affirme sa propre indémontrabilité. Au fond, la preuve de la cohérence présuppose une forme d'induction de l'ordre transfini aux fins de prouver la cohérence de l'arithmétique qui est de l'ordre fini. Il s'agit donc des fonctions récursives qui ont des propriétés pour tout système de valeurs attribué à ses arguments de les déterminer aux moyens d'une procédure de type fini. Il revient à l'arithmétique récursive de traduire les éléments de la métathéorie du système formel.

MOTS-CLEFS: Arithmétisation, métathéorie, récursivité, arithmétique récursive, itération, métamathématique, incomplétude.

INTRODUCTION

GÖDEL a essayé de formaliser la métamathématique dans une théorie si puissante afin de permettre à la métathéorie de s'exprimer et de se construire en un nombre fini de procédures. Les prédicats qui ont servi des preuves arithmétiques aux formules sont traduits en propriétés arithmétiques en passant d'abord par les propriétés métamathématiques.

La méthode de l'arithmétisation est utilisée dans l'opération de traduction aux fins d'éliminer des paradoxes sémantiques. Cette méthode consiste, à associer de façon biunivoque, des entiers aux objets du système formel étudié.

Le concept de fonctions récursives est au cœur de toute la recherche conduisant à la preuve du théorème de GÖDEL. Ce sont des fonctions arithmétiques dont la propriété s'énonce comme suit : « pour tout système des valeurs qu'on donne aux arguments, on peut préciser la valeur au moyen de procédures de type fini ».

1 L'ARITHMÉTISATION ET LES FONCTIONS RÉCURSIVES

Il s'agit à ce niveau d'établir les rapports entre le principe d'arithmétisation et la notion de fonction récursive. Pour opérer une traduction du genre à éliminer certaines antinomies sémantiques, GÖDEL a utilisé la méthode de l'arithmétisation.

En effet, elle consiste à associer, de façon biunivoque, des entiers aux objets du système formel examiné. Grâce à elle, il est possible de formuler, au moyen des procédés de l'arithmétique, une classe très étendue d'énoncés et de raisonnements métathéoriques.

L'idée de l'arithmétisation se trouve déjà chez LEIBNIZ. Mais c'est bien GÖDEL qui l'a mise en œuvre pour la première fois de façon systématique. L'utilisation pratique de cette méthode repose sur la théorie des fonctions récursives.

1.1 FONCTIONS RÉCURSIVES

Une fonction récursive est une fonction arithmétique qui a la même propriété selon laquelle pour tout système de valeurs attribué à ses arguments, il y a lieu de déterminer sa valeur au moyen d'une procédure de type fini. La notion de fonction récursive a servi à analyser le contenu constructif de certains théorèmes classiques et à étudier le finitisme des formalismes logiques.

Rappelons qu'une sous-classe des fonctions récursives, les fonctions récursives primitives, a été définie et utilisée par HERBRAND et par GÖDEL en 1931. Mais il est à remarquer que l'exponentielle généralisée d'ACKERMANN est récursive sans être récursive primitive.

Les récursions primitives ou réductibles à des récursions primitives s'inscrivent dans le cadre de l'arithmétique finitiste, que celle-ci soit formalisée, c'est-à-dire l'arithmétique récursive ou qu'elle soit contentuelle. On notera que la fonction d'ACKERMANN est récursive simultanément en plusieurs variables simples. Mais l'une de ces fonctions récursives simples est la « Funktionenfunktion » itération de f qui n'est pas récursive ordinaire, puisqu'elle est dépendante d'une variable qui n'est pas arithmétique [1].

1.1.1 LA RÉCURSIVITÉ

On définit la classe des fonctions récursives de la même manière que celle de la gödelienne. D'abord, il y a les fonctions de base qui sont toutes des fonctions totales :

- (I) La fonction constante Cnt , dont la valeur est toujours 0 ($\text{Cnt } \alpha = 0$) ;
- (II) La fonction successeur Scc , $\text{Scc}(x) = x + 1$;
- (III) La fonction de sélection : $\text{Sel}^{(\text{in})}$, isolant la $n^{\text{ième}}$ variable ($\text{Sel}^{(\text{in})}(x_1 x_2 \dots, x_i \dots x_n = x_i)$ pour tous les $x_1, \dots, x_n$).

Toutes les fonctions élémentaires de l'arithmétique s'inscrivent dans cette classe (addition, différence, multiplication, exponentiation, etc.). Ensuite, nous avons les règles suivantes :

- (IV) La substitution $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$.
- (V) La récursion $f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n), \dots, y, f(x_1, \dots, x_n, y)$.¹
- (VI) L'opérateur μ . Supposons que $g(x_1, \dots, x_n, y)$ est une fonction telle que pour tous $x_1, \dots, x_n$, il y a au moins un y tel que $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

Nous signifions par $\mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$ le plus petit nombre y satisfaisant :

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \text{ si } f(x_1, \dots, x_n) = \mu y(g(x_1, \dots, x_n, y) = 0).$$

Nous disons alors que $f(x_1, \dots, x_n)$ est obtenue de $g(x_1, \dots, x_n, y)$ par l'opérateur μ .

Il est pertinent de faire remarquer [2] qu'il y a des fonctions calculables qui ne sont pas récursives primitives (FRP). Un raisonnement « diagonal » en apporte la preuve. Soit l'ensemble des fonctions récursives primitives d'une variable. On peut numéroter d'une manière effective chaque élément de cet ensemble. Si on note φ_n la FRP portant le numéro n , alors il est possible de numéroter l'ensemble des FRP à une variable comme suit : $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. En considérant la fonction ψ définie ainsi : $\exists_n, \psi(n) = \varphi_n + 1$

En clair, la FRP est donc calculable. Cela signifie que la numérotation des FRP est effective. D'où, il y a lieu à partir de n , de déterminer φ_n . Il en résulte que φ_n étant récursive primitive, $\varphi_n(n)$ est calculable pour toute valeur de n , et cela vaut aussi

¹ La récursion intervient dans la démonstration du premier théorème d'incomplétude, au point qu'on se permet d'affirmer que l'incomplétude et l'indécidabilité de l'arithmétique sont intimement liées.

pour $\varphi_n(n) + 1$. Mais il faut noter que ψ n'est pas une FRP, sinon, ψ figurerait dans la numération, à un certain rang m et, peut être, on dit que ψ est identique à la fonction φ_m . Pour tout n , on aurait,

$$\varphi(n) = \varphi_m(n) = \varphi_m(n) + 1 ; \text{ et pour } n = m$$

$$\varphi_m(m) = \varphi_m(m) + 1 ; \text{ ce qui amène à l'absurdité.}$$

D'où, finalement, ψ est non récursive primitive quand bien même elle est calculable. Cela est de même de φ .

1.1.2 LES SCHÉMAS DE RÉCURSION

Soient des fonctions partielles $G: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ et $H: \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$. On appelle la fonction définie par récursion à partir de G et H la fonction

$F: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, Scc\alpha) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)$$

pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha) \in \mathbb{N}^{n+1}$ pour lequel la définition a une signification.

1.1.2.1 LE SCHÉMA DE RÉCURSION PRIMITIVE

On présente en effet le schéma de récursion primitive comme suit :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, Scc\alpha) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha), x_1, \dots, x_n, \alpha$$

Ce schéma nous montre que F représente une fonction ayant $(n+1)$ arguments, G une fonction de n arguments et H est une fonction ayant $(n+2)$ arguments telle que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des variables et α est un symbole pouvant être remplacé par n'importe lequel des entiers. On suppose que les fonctions g et h sont déjà définies.

1.1.2.2 AUTRES SCHÉMAS DE RÉCURSION

En ce qui concerne les autres schémas de récursion, on peut énumérer trois types, à savoir :

- **Le schéma de récursion indirecte**, dans lequel il y a dépendance de la fonction vis-à-vis de la variable par l'intermédiaire des termes déjà définis.

Illustrons cela :

$$F0 = a$$

$$F1(Sccn) = Gn[F(H_1n)][F(H_2n)] \dots [F(H_kn)]$$

Ce schéma nous indique que G représente une fonction déjà définie à $(k+1)$ arguments, $H_1, H_2, \dots, H_k$ sont des fonctions déjà définies à un argument où on a $H_1n \leq H_2n \leq \dots H_kn \leq n$

- **Le schéma de récursion simultanée**, dans lequel sont définies à la fois deux ou plusieurs fonctions dépendant les unes des autres.

Illustrons cela donc :

$$F_10 = a$$

$$F_1(Sccn) = G_1n(F_1n)(F_2n)$$

$$F_20 = b$$

$$F_2(Sccn) = G_2n(F_1n)(F_2n)$$

On voit que dans ce schéma F_1 et F_2 sont donc des fonctions devant être définies, G_1 et G_2 représentent les fonctions déjà définies ayant trois arguments.

- **Le schéma de récursion croisée**, dans lequel on représente la fonction d'ACKERMANN.

En effet, la fonction d'ACKERMANN² illustre un cas d'une fonction définie par un schéma de récursion croisée. Son schéma de définition utilise trois fonctions auxiliaires, qui sont alors définies par des schémas de récursion primitive :

$$Ack_a 0 = 0$$

$$Ack_a (Scc n) = 1,$$

$$Ack_b 0 = 1$$

$$Ack_b (Scc n) = 0,$$

$$Ack_c 0 = 0$$

$$Ack_c (Scc n) = n.$$

La fonction Ack_n se définit comme suit :

$$Ack_{n\alpha\beta} 0 = \alpha + \beta$$

$$Ack_{n\alpha} 0 (Scc n) = Ack_b (Scc n) + [\alpha \times Ack_{na} (Ack_{ncn})]$$

$$Ack_{n\alpha} (Scc n) = Ack_{n\alpha} [Ack_{n\beta} (Scc n)] n$$

Ce qui donne en effet :

$$Ack_n \beta 1 = \alpha \times \beta$$

$$Ack_n \beta 2 = \alpha^\beta$$

Il nous faut préciser que la deuxième ligne du schéma nous fait passer de la valeur de la fonction, pour la valeur n du 3^{ème} argument, à la valeur de la fonction pour la valeur $(n+1)$ de cet argument. Quant à la troisième ligne du schéma, elle nous fait passer de la valeur de la fonction pour la valeur n , du deuxième argument, à la valeur de la fonction pour la valeur de $(n+1)$ de cet argument.

La fonction d'ACKERMANN est définie par récurrence double avec imbrication des appels récursifs. Mentionnons notamment que :

$$Ack (0, x) = x + 2$$

$$Ack (1, 0) = 0$$

$$Ack (n+2, 0) = 1$$

$$Ack (n+1, x+1) = Ack (n, Ack (n+1, x)).$$

Notons en effet que chaque $Ack_n: x \rightarrow Ack (n, x)$ est récursive primitive. Cela signifie que la fonction Ack_{n+1} s'obtient lorsqu'on itère la fonction Ack_n

$$Ack_{n+1} (x+1) = Ack_n (Ack_{n+1} (x)).$$

Il s'ensuit que toutes les fonctions Ack_n sont croissantes, et cette croissance se réalise de plus en plus rapide de telle sorte que

$$Ack_1(x) = 2x, Ack_2(x) = 2^x$$

$$Ack_3(x) = 2^{\left. 2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}\right\}^x}$$

² Le théorème de GÖDEL datant de 1931 a contraint ACKERMANN à revisiter ses points de vue de 1924 (HILBERT et ACKERMANN) et cela en complétant en 1940 une preuve de non-contradiction avec le calcul ϵ qui s'inspire de la preuve par induction transformée de GENTZEN (1936) En clair, sa preuve dépasse largement le cadre de l'arithmétique contentuelle.

Alors on dit qu'une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ domine une fonction $g: \mathbb{N}^P \rightarrow \mathbb{N}$ si f est supérieure à g à partir d'un certain rang. Autrement dit, on a :

$$\exists k \in \mathbb{N} \forall \bar{x} \in \mathbb{N}^P \quad g(\bar{x}) \leq f(\sup(\bar{x}, k)).$$

Donc, il est possible de montrer que pour toute fonction primitive récursive, il existe n tel que Ack_n domine f , telle est la déduction.

En d'autres termes, on peut définir la fonction d'ACKERMANN comme suit :

1. Si $m = 0$ alors $Ack(m, n) = n + 1$
2. Si $m \neq 0$ mais $n = 0$, alors $Ack(m, n) = Ack(m - 1, 1)$
3. Si $m \neq 0$ et $n \neq 0$, alors $Ack(m, n) = Ack[m - 1, Ack(m, n - 1)]$

En effet, la fonction d'ACKERMANN est une fonction à deux arguments m et n tels que chacun d'entre eux peut prendre des valeurs $0, 1, 2, 3, \dots$. Donc, cette définition est récursive puisqu'elle se réfère à elle-même dans les parties (2) et (3). Evidemment $Ack(m, n)$ n'est donné de façon explicite que lorsque $m = 0$. Ainsi, les critères de base sont les paires $(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots (0, n), \dots$

Exemple : calculer $Ack(1, 3)$ en appliquant la définition de la fonction d'ACKERMANN.

[il y a 15 étapes pour arriver à la solution finale]

- (1) $Ack(1, 3) = Ack[0, Ack(1, 2)]$
- (2) $Ack(1, 2) = Ack[0, Ack(1, 1)]$
- (3) $Ack(1, 1) = Ack[0, Ack(1, 0)]$
- (4) $Ack(1, 0) = Ack(0, 1)$
- (5) $Ack(0, 1) = 1 + 1 = 2$
- (6) $Ack(1, 0) = 2$
- (7) $Ack(1, 1) = Ack(0, 2)$
- (8) $Ack(0, 2) = 2 + 1 = 3$
- (9) $Ack(1, 1) = 3$
- (10) $Ack(1, 2) = Ack(0, 3)$
- (11) $Ack(0, 3) = 3 + 1 = 4$
- (12) $Ack(1, 2) = 4$
- (13) $Ack(1, 3) = Ack(0, 4)$
- (14) $Ack(0, 4) = 4 + 1 = 5$
- (15) $Ack(1, 3) = 5$

Pour ACKERMANN, on ne peut donc pas définir cette fonction au moyen d'un schéma de récursion primitive. Partant de ces fonctions, l'idée de généraliser la notion de récursivité a hanté HERBRAND à utiliser deux ou trois équations soumises à certaines conditions bien déterminées [6].

La fonction d'ACKERMANN ainsi définie illustre un cas de fonction récursive générale. Cela va s'en dire que le concept de récursivité se généralise à d'autres catégories d'objets tels que les prédicats, les classes et les ensembles.

1.2 FONCTIONS ET PRÉDICATS RÉCURSIFS

Une fonction f est dite récursive, si et seulement si, elle peut être obtenue des fonctions de base par un nombre fini d'applications des règles (IV), (V) et (VI). Cela signifie que s'il existe une suite de fonctions $f_1, \dots, f_n$ telles que, pour tout i , f_i est, soit une fonction initiale, soit une fonction obtenue de fonctions $f_{j_1}, \dots, f_{j_r}$ avec $j_1, \dots, j_r < i$ par l'application des règles (IV), (V) ou (VI).

Une fonction est dite *primitivement récursive*, si elle est récursive et s'il est possible de l'obtenir sans l'application de la règle (VI).

1.2.1 LA REPRÉSENTATION

Une fonction est dite représentative d'un prédicat, si on a une fonction des mêmes arguments prenant la valeur 0, si le prédicat est vérifié ; la valeur 1, s'il ne l'est pas, et ne pouvant prendre d'autres valeurs. Donc la fonction F est dite fonction représentative du prédicat R si on a l'équivalence.

$$Rx_1x_2 \dots x_n \leftrightarrow Fx_1x_2 \dots x_n = 0$$

Prenons par exemple le prédicat divisible par 2 ayant pour fonction représentative le reste de la division par 2. Si un nombre entier peut être divisé par 2, le reste de sa division par 2 donne 0, s'il ne le peut être, le reste de sa division par 2 vaut 1.

On appelle donc prédicat récursif (primitif ou général) un prédicat ayant une fonction représentative récursive (primitive ou générale).

Un prédicat arithmétique $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_n)$ est dit *exprimable* dans SFC si et seulement s'il existe une formule $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_n)$ telle que pour tous nombres $k_1, \dots, k_n$:

- (1). Si $R(k_1, \dots, k_n)$ alors $\vdash_k \mathfrak{R}(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$
- (2). Si $\neg R(k_1, \dots, k_n)$ alors $\vdash_k \neg \mathfrak{R}(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$

Une fonction arithmétique $f(x_1, \dots, x_n)$ est dite représentable dans SFG si et seulement s'il existe une formule $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ de SFG telle que pour tous nombres $k_1, \dots, k_n$ et m :

- (1). Si $f(k_1, \dots, k_n) = m$ alors $\vdash_k R(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{m})$;
- (2). $\vdash_k \neg \exists_1 x_{n+1} \mathfrak{R}(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, x_{n+1})$

Les fonctions de base sont représentables.

La fonction $\beta(x_1, x_2, x_3) = \text{le reste de la division euclidienne de } 1 + (x_3 + 1) \cdot x_2 \text{ par } x_3$.

1.2.2 PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES RÉCURSIVES

Pour conférer à la théorie des preuves la rigueur requise, GÖDEL essaye de la formaliser dans une théorie si puissante que la métathéorie y soit exprimable et qu'elle soit constructible en un nombre fini d'étapes.

Pour ce faire, GÖDEL a créé des prédicats pour appliquer les preuves arithmétiques aux formules. Il a traduit Ces propriétés métamathématique par des propriétés arithmétiques.

Ainsi, la fonction Γ proprement dite doit avoir les propriétés métathéoriques.

1. x divise y , $x : y \equiv \exists z (z \leq y \wedge y = z \cdot x)$
2. x est un nombre premier, $\text{Pr}(x) : \text{Pr}(x) \equiv \forall y ((y \leq x \wedge y / x) \rightarrow (y = 1 \vee y = x))$
3. $\text{Pr}(n, x)$ est le $n^{\text{ième}}$ premier dans la suite des nombres premiers qui divise x :
 $\text{Pr}(0, x) \equiv 0$ et $\text{Pr}(n+1, x) \equiv \varepsilon y (y \leq x \wedge \text{Pr}(y) \wedge y/x \wedge y < \text{Pr}(n, x))$
4. La fonction factorielle : $0!$ et $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
5. $\text{Pr}(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ premier dans la suite des nombres premiers :
 $\text{Pr}(n) \equiv 0$ et $\text{Pr}(n+1) \equiv \varepsilon y (y \leq x \wedge \text{Pr}(n)! + 1 \wedge \text{Pr}(y) \wedge \text{Pr}(n))$
6. Terme (n, x) est le $n^{\text{ième}}$ terme dans la suite numérique x :

$$\text{Terme}(n, x) \equiv \varepsilon y(y \leq x \wedge \text{Pr}(n, x)^y / x \wedge \neg \text{Pr}(n, x)^{y+1} / x)$$

7. $l(x)$ est la longueur de la suite x :

$$\text{Terme}(n, x) \equiv \varepsilon y(y \leq x \wedge \text{Pr}(n, x)^y / x \wedge \neg \text{Pr}(n, x)^{y+1} / x)$$

8. $x * y$ est la concaténation des deux suites finies x et y :

$$\begin{aligned} x * y &\equiv \varepsilon z(z \leq (\text{Pr}(l(x) + l(y)))^{x+y} \wedge \forall n(n \leq l(x) \rightarrow \text{Terme}(n, x) \\ &= \text{Terme}(n, z)) \wedge \forall n(0 < n \leq l(y) \rightarrow \text{Terme}(n, y) = \text{Terme}(n + l(x), z))) \end{aligned}$$

9. $R(x)$ est la suite du nombre x tout seul : $R(x) \equiv 2^x$

10. $E(x)$ est l'opération de mise du nombre x entre parenthèses : $E(x) \equiv R(11) * x * R(13)$

11. x est une variable de type n , $\text{Var}(n, x)$:

$$\text{Var}(n, x) \equiv \exists z(13 < z \leq x \wedge \text{Pr}(z) \wedge x = z^n)$$

12. x est une variable, $\text{Var}(x) : \text{Var}(x) \equiv \exists n(n \leq x \wedge \text{Var}(n))$

13. $\text{Neg}(x)$ est la négation de x : $\text{Neg}(x) \equiv R(5) * (x)^* = R(5) * x$

14. $\text{Dis}(x, y)$ est la disjonction de x et y :

$$\text{Dis}(x, y) \equiv E(x) * R(7) * E(y) \equiv E(x) * R(7) * y$$

15. $\text{Gen}(x, y)$ est la généralisation de y par rapport à x :

$$\text{Gen}(x, y) \equiv R(x) * R(7) * E(y) \equiv E(9) * R(x) * y$$

16. $N(n, x)$ est l'action qui place n symboles « ' » devant x :

$$N(0, x) \equiv x \quad \text{et} \quad N(n+1, x) \equiv R(3) * N(n, x)$$

17. $N(x)$ est le nombre de GÖDEL x : $N(x) \equiv N(x, 1)$

18. x est un signe de type 1, $\text{type } 1(x)$:

$$\text{type } 1(x) \equiv \exists m \exists n(m, n \leq x \wedge (m = 1 \vee \text{Var}(1, m)) \wedge x = N(n, R(m)))$$

19. x est un signe de type n , $\text{type}_n(x)$:

$$\text{type}_n(x) \equiv ((n = 1 \wedge \text{type}_1(x)) \vee (n > 1 \wedge \exists y(y \leq x \wedge \text{Var}(n, x) \wedge x = R(y)))$$

20. x est une formule élémentaire, $\text{Elf}(x)$:

$$\text{Elf}(x) \equiv \exists y \exists z \exists n(y, z, n \leq x \wedge \text{type}_n(y) \wedge \text{type}_{n+1}(z) \wedge x = z * E(y))$$

21. x s'obtient de la formule y par négation ou généralisation ou des formules y et z par conjonction $\text{Op}(x, y, z)$:

$$\text{Op}(x, y, z) \equiv (x = \text{Neg}(y)) \vee (x = \text{Dis}(y, z)) \vee \exists v(v \leq x \wedge \text{Var}(v) \wedge x = \text{Gen}(v, y))$$

22. x est une suite de formules, chacune est une formule élémentaire ou une des formules obtenue précédemment par l'opération $\text{Op}(x, y, z)$, $\text{FR}(x)$:

$$\begin{aligned} \text{FR}(x) &\equiv l(x) > 0 \wedge \forall n(0 < n \leq l(x) \rightarrow \text{Elf}(\text{Terme}(n, x)) \vee \exists p \exists y(0 < p, qn \wedge \\ &\quad \text{Op}(\text{Terme}(n, x), \text{Terme}(p, y), \text{Terme}(q, z))) \end{aligned}$$

23. x est une formule, $\text{Form}(x)$:

$$\text{Form}(x) \equiv \exists n(n \leq (\text{Pr}(l(x)^2)) \wedge \text{FR}(n) \wedge x = \text{Terme}(l(n), n))$$

24. La variable v est liée à la $n^{\text{ième}}$ place dans x , liée (v, n, x) :

$$\begin{aligned} \text{Liée}(v,n,x) &\equiv (\text{Var}(v) \wedge \text{Form}(x) \wedge \exists a \exists b \exists c (a,b,c \leq x \wedge l(a)+1 \leq n \leq l(a)+l(\text{Gén}(v,b)) \wedge x \\ &= a * \overline{\text{Gen}(v,b)} * c \wedge \text{Form}(x))) \end{aligned}$$

25. La variable v est libre à la $n^{\text{ième}}$ place dans x , $\text{Libre}(v,n,x)$:

$$\text{Libre}(v,n,x) \equiv (n \leq l(x) \wedge \text{Var}(v) \wedge \text{Form}(x) \wedge v = \text{Teme}(n,x) \wedge \neg \text{Liée}(v,n,x))$$

26. La variable v est libre dans x , $\text{Libre}(v,x)$:

$$\text{Libre}(v,x) \equiv \exists n (n \leq l(x) \wedge \text{Libre}(v,n,x))$$

27. $\text{Su}(x,n,y)$ est le résultat de la substitution du $n^{\text{ième}}$ terme de x par y :

$$\begin{aligned} \text{Su}(x,n,y) &\equiv \varepsilon z (z \leq (\text{Pr}(l(x)+l(y)))^{x+y} \wedge \exists u \exists v (u,v \leq x \wedge x = u * \text{R}(\text{Terme}(n,x)) * v \wedge z \\ &= u * y * v \wedge n = l(u)+1)) \end{aligned}$$

28. $\text{St}(k,v,x)$ est la $(k+1)^{\text{ième}}$ place où v est libre dans x .

$$\text{St}(0,v,x) \equiv \varepsilon n (n \leq l(x) \wedge \text{Libre}(v,n,x) \wedge \forall p (n < p \leq l(x) \rightarrow \neg \text{Libre}(v,p,x)))$$

$$\text{St}(k+1,v,x) \equiv \varepsilon n (n \leq \text{St}(k,v,x) \wedge \text{Libre}(v,n,x) \wedge \forall p (n < p \leq \text{St}(x) \rightarrow \neg \text{Libre}(v,p,x)))$$

29. $A(v,x)$ est le nombre de places où v est libre dans x :

$$A(v,x) \equiv \varepsilon n (n \leq l(x) \wedge \text{St}(n,v,x) = 0)$$

30. $\text{Sub}_k(x,v,y)$ est le résultat de la substitution de v par y à la $1^{\text{ère}}$, $2^{\text{ème}}$, $k^{\text{ième}}$ places dans x :

$$\text{Sub}_0(x,v,y) \equiv x$$

$$\text{Sub}_{k+1}(x,v,y) \equiv \text{Su}(\text{Sub}_k(x,v,y), \text{St}(k,v,x), y)$$

31. $\text{Sub}(x,v,y)$ est le résultat de la substitution de v par y dans x :

$$\text{Sub}(x,v,y) \equiv \text{Sub}_{A(v,x)}(x,v,y)$$

32. $\text{Imp}(x,y)$ est l'implication de y par x :

$$\text{Imp}(x,y) \equiv \text{Dis}(\text{Neg}(x), y)$$

$\text{Con}(x,y)$ est la conjonction de x et y :

$$\text{Con}(x,y) \equiv \text{Neg}(\text{Dis}(\text{Neg}(x), \text{Neg}(y)))$$

$\text{Eq}(x,y)$ est l'équivalence entre x et y :

$$\text{Con}(\text{Imp}(x,y), \text{Imp}(y,x))$$

$\text{Exist}(v,x)$ est la quantification existentielle de x par v :

$$\text{Neg}(\text{Gen}(v, \text{Neg}(x)))$$

33. $\text{Th}(n,x)$ est la $n^{\text{ième}}$ élévation de type de x :

$$\text{Th}(n,x) \equiv \varepsilon y (y \leq x^{(x^n)} \wedge \forall k (k \leq l(x) \rightarrow (\text{Terme}(k,x) \leq 13 \wedge \text{Terme}(k,y) \\ = \text{Terme}(k,y)) \vee (\text{Terme}(k,x) > 13 \wedge \text{Terme}(k,y) \\ = \text{Terme}(k,x.\text{Pr}(1, \text{Terme}(k,x))^{l(x)}))))$$

$$= \text{Terme}(k,y) \vee (\text{Terme}(k,x) > 13 \wedge \text{Terme}(k,y) \\ = \text{Terme}(k,x.\text{Pr}(1, \text{Terme}(k,x))^{l(x)}))))$$

$$= \text{Terme}(k,x.\text{Pr}(1, \text{Terme}(k,x))^{l(x)}))))$$

34. x est un des axiomes de PEANO ou axiomes du groupe 1, $\text{Ax}|$:

$$\text{Ax}|(x) \equiv (x = n_1 \vee x = n_2 \vee x = n_3 \text{ où des axiomes } n_1, n_2 \text{ et } n_3 \text{ sont les ndg I.1, I.2. et I.3 respectivement.})$$

35. x est une formule résultant du schéma d'axiome II.1 par la substitution, $\text{Ax}/1(x)$:

$$Ax//1(x) \equiv \exists y(y \leq x \wedge Form(y) = Imp\ p(Dis(y, y), y))$$

De façon similaire, on obtient pour les axiomes II.2, II.3 et II.4 les prédicats suivants $Ax//2(x)$, $Ax//3(x)$ et $Ax//4(x)$, respectivement.

36. x est un des axiomes de la logique propositionnelle ou axiomes du groupe 2, $Ax//(x)$:

$$Ax//(x) \equiv (Ax//1(x) \vee Ax//2(x) \vee Ax//3(x) \vee Ax//4(x))$$

37. z ne contient pas de variables liées en y à l'endroit où v est libre, $Q(z, y, v)$:

$$Q(z, y, v) \equiv \neg \exists n \exists m \exists w (n \leq l(y) \wedge m \leq l(z) \wedge w \leq z \wedge w \\ = Terme(m, z) \wedge Liée(w, n, y) \wedge Libre(v, \dots, y))$$

38. x est une formule résultant de l'axiome III.1 par substitution, $AxIII1(x)$:

$$AxIII1(x) \equiv \neg \exists v \exists y \exists z \exists n (v, y, z, n \leq x \wedge Var(n; v) \wedge Type_n(z) \wedge Form(y) \wedge Q(z, y, v) \wedge x = Imp(Gen(v, y), Sub(y, v, z)))$$

39. x est une formule résultant du schéma d'axiomes III.2. par substitution, $AxIII2(x)$:

$$AxIII2(x) \equiv \neg \exists v \exists q \exists p (v, q, p \leq x \wedge Var(v) \wedge Form(p) \wedge \neg Libre(q) \wedge x \\ = Imp(Gén(v, Dis(p, q)), Dis(p, Gén(v, q))))$$

40. x est une formule résultant de l'axiome de compréhension par substitution, $AxIV1(x)$:

$$AxIV1(x) \equiv \exists u \exists v \exists y \exists n (u, v, y, n \leq x \wedge Var(n; v) \wedge Var(n+1, u) \wedge \neg Libre(u, y) \wedge Form(y) \wedge x = Existe(u, Gén(v, éq(R(u)*E(R(v)), y))))$$

41. x est une formule résultant de l'axiome d'extensionnabilité par substitution, $AxIV2(x)$:

$$AxIV2(x) \equiv \exists n (n \leq x \wedge x = Th(n, n_4)),$$

Où n_4 est le ndg de l'axiome d'extensionnabilité.

42. x est un axiome, $Ax(x)$:

$$Ax(x) \equiv (Ax/(x) \vee Ax//(x) \vee Ax///(x) \vee Ax/V1(x) \vee Ax/V2(x))$$

43. x est une conséquence immédiate de y et z , $Cons(x, y, z)$:

$$Cons(x, y, z) \equiv (y = Imp(z, x) \vee \exists v (v \leq x \wedge Var(v) \wedge x = \overline{Gen}(v, y)))$$

44. x est une figure de preuve, $Dm(x)$:

$$Dm(x) \equiv (l(x) > 0 \wedge \forall n (0 < n \leq l(x) \rightarrow (Ax(Terme(n, x)) \vee \exists p \exists q (0 < p, q < n \wedge \\ Cons(terme(n, x), Terme(p, x), Terme(q, x))))))$$

45. x est une preuve de y , $Dem(x, y)$:

$$Dem(x, y) \equiv Dm(x) \wedge y = Terme(l(x), x)$$

46. x est une formule prouvable, $Dem(x)$:

$$Dem(x) \equiv \exists y Dem(y, x)$$

De ces formules, il nous faut déduire que (1) à l'exception de la formule 46, qui est non récursive, toutes les définitions, soit qu'elles sont les prédicats (1, 2, 11, 12, 18-26 et 34-46), soit qu'elles sont les fonctions (3-10, 13-17 et 27-33) sont toutes récursives, (2) ne sont pas construites dans le système SFG, étant donné qu'une extension dans le système SFG, n'inclut pas les notions de récursivité, (3) les fonctions ou les prédicats (6-45) sont toutes les traductions d'opérations ou prédicats métathéoriques, c'est-à-dire elles sont des fonctions ou des prédicats entre les nombres de GÖDEL.

1.2.3 ARITHMÉTIQUE RÉCURSIVE

C'est une partie importante de l'arithmétique dans laquelle sont utilisés des procédés constructifs tels que la récursion et l'induction. En clair, l'arithmétique récursive est la partie de la théorie des nombres entiers qui est obtenue au moyen des opérations logiques élémentaires, exceptées les opérations de généralisation, de la relation d'égalité (avec les axiomes qui la caractérisent), du principe d'induction et de définitions récursives (définitions de fonctions au moyen du schéma de récursion primitive) ; il s'agit en particulier de plusieurs théories arithmétiques qui relèvent de l'arithmétique récursive, la théorie de la récursion, la théorie du plus grand commun diviseur à savoir, la théorie de la décomposition en facteurs premiers (avec la théorie sur l'unicité de la décomposition).

Si dans un système approprié, on formalise l'arithmétique récursive, on peut représenter le calcul des valeurs d'une fonction récursive primitive quelconque par des déductions réalisées dans ce système formel. La méthode de GÖDEL, ou l'arithmétisation, utilise l'arithmétique récursive. C'est ce qui lui donne un caractère entièrement constructif.

L'arithmétique récursive est, selon HILBERT, une arithmétique sans variables libres (sa logique sous-jacente est le calcul élémentaire avec des axiomes libres de l'égalité) qui comporte un schéma d'induction ayant des variables libres seulement et un schéma de définition par récursion. Les moyens mis en œuvre dans ce système formel embrassent la classe des fonctions récursives primitives. L'arithmétique récursive a un sens finitiste ; car toutes ses formules peuvent être vérifiées, cela signifie qu'elles peuvent être interprétées par des moyens finistes³.

1.2.4 PROCÉDURE RÉCURSIVE

1.2.4.1 NOTION DE LA PROCÉDURE

On sait, en effet, que de nombreux algorithmes sont décrits de manière plus descriptive en termes de récursivité. Prenons en compte une procédure P comprenant une instruction Call (appel) sur elle – même, soit une instruction Call sur une autre procédure, qui d'ailleurs, peut entraîner une instruction Call de retour sur la procédure initiale P ; suivant ces conditions, la procédure P constitue de ce fait une procédure récursive. Ainsi, pour empêcher le programme de tourner indéfiniment en rond, une procédure récursive est sensée avoir les deux propriétés ci – après :

1. Il faut qu'il y ait des critères appelés critères fondamentaux pour lesquels la procédure ne s'appelle pas elle – même.
2. Chaque fois que la procédure s'appelle elle – même, elle doit être plus proche de ses critères fondamentaux.

Une procédure récursive est dite bien définie, si elle possède ces deux critères de base. En effet, une fonction se définit de manière récursive, si sa définition fait référence à elle – même. Pour que cette fonction ne soit pas circulaire, elle doit posséder les deux propriétés ci – après :

1. Il faut qu'il ait les valeurs de base ou arguments pour lesquels la fonction ne se réfère pas à elle – même.
2. Chaque fois que la fonction se réfère à elle – même, son argument doit être plus proche d'une valeur de base.

1.2.4.2 ILLUSTRATION DE LA PROCÉDURE

Calcul de $n !$

Pour tout entier positif n , on a $n! = n(n - 1)!$

En effet, cette fonction factorielle se définit d'une manière récursive.

1. Si $n = 0$, alors $n! = 1$
2. Si $n > 0$, alors $n! = n(n - 1)!$

La définition ci – dessus est récursive puis qu'elle se réfère à elle – même lorsqu'elle applique $(n - 1)!$

³ L'arithmétique primitivement récursive est non seulement un fragment de l'arithmétique de PEANO, mais un fragment de l'arithmétique formelle intuitionniste, obtenue par ajout des axiomes de PEANO à la logique intuitionniste de premier ordre, une logique plus restreinte que la logique classique.

1. On voit que la valeur de $n!$ est de façon explicite donnée par $n = 0$, d'où 0 est une valeur de base.
2. On voit également que la valeur de $n!$ Pour n arbitraire se définit en fonction d'un plus petit n plus voisin de la valeur de base 0. Par conséquent, la définition n'est pas circulaire. Cela veut dire donc que la procédure récursive est bien définie.

Calcul de 3 ! Partant de la définition récursive, on a :

- (1) $3! = 3.2!$
- (2) $2! = 2.1!$
- (3) $1! = 1.0!$
- (4) $0! = 1$ (valeur de base de la définition récursive)
- (5) $1! = 1.1 = 1$
- (6) $2! = 2.1 = 2$
- (7) $3! = 3.2! = 6$

En clair, cela montre que :

Etape (1) : définit 3 ! en fonction de 2 !

Etape (4) : évalue 0 ! explicité car 0 étant la valeur de base de la définition récursive

Etape (5) et (7) : repartent en arrière, en utilisant 0 ! pour évaluer 1 ! servant à évaluer 2 ! et ainsi de suite jusqu'à 3 !

1.2.4.3 PROCÉDURES DE CALCUL

1° Première procédure de calcul de la fonction factorielle $n!$

FACTO (FAC, N) calcul $n!$ et affecte le résultat à FAC

1. *Si $N = 0$, alors poser $FAC = 1$ et return*
2. *Poser $FAC = 1$ [initialiser FAC pour la boucle]*
3. *Repeat pour $K = 1$ à N*

[fin de la boucle]

4. *Exit*

2° Deuxième procédure du calcul de la fonction factorielle $n!$

FACTO (FAC, N) calcul $n!$ et affecte le résultat à FAC

1. *Si $N = 0$, alors poser $FAC = 1$ et Return*
2. *Call FACTO (FAC, $N - 1$)*
3. *Poser $FAC = N * FAC$*
4. *Exit*

Il nous faut souligner que la procédure 1 évalue $n!$ à l'aide d'un processus de boucle itérative. Par contre, la procédure 2 est plutôt récursive, puisqu'elle contient un appel à elle – même. Il y a des langages de programmation, en particulier, qui n'autorisent pas de sous – programmes récursifs de ce genre.

1.2.4.4 SUITE DE FIBONACEE

Par la suite de FIBONACEE, on entend une suite ayant la forme :

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, ... notée en général $F_0, F_1, F_2, \dots$ soit $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ les deux premiers termes.

Et on voit que chaque terme suivant est la somme des deux termes précédant :

$$8 + 13 = 21$$

$$13 + 21 = 34$$

$$21 + 34 = 55$$

$$34 + 55 = 89$$

$$55 + 89 = 144$$

La suite de FIBONACEE se définit comme suit :

1° Si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $F_n = n$

2° Si $n > 0$, alors $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

En clair, c'est une définition récursive, puisqu'elle se réfère à elle – même lorsqu'elle utilise $F_{n-2} + F_{n-1}$.

1° On voit que les valeurs de base sont 0 et 1

2° On voit également que la valeur de F_n se définit en fonction des valeurs plus petites de n étant plus proches des valeurs de base.

D'où, il y a lieu d'affirmer que la fonction est bien définie.

Il est à remarquer que la procédure suivante calcule F_n et affecte sa valeur au premier FI .

FIBO (FI, N)

1. Si $N = 0$ ou $N = 1$ alors poser $FI = N$, et return
2. Call FIBO (FIA, $N - 2$)
3. Call FIBO (FIB, $N - 1$)
4. Poser $FI = FIA + FIB$
5. Exit

Ici, c'est une procédure récursive ; car elle contient un appel à elle – même. Elle comporte en effet deux appels à elle – même. Cela montre que la procédure suivante calcule les N premiers nombres de FIBONACEE et les affecte à un tableau F .

1. Poser $F[1] = 1$ et $F[2] = 1$
2. Repeat pour $K = 3$ à N
Poser $F[K] = F[K - 1] + F[K - 2]$
[fin de la boucle]
3. Exit

Il s'agit ici d'une procédure itérative qui est beaucoup plus efficace que la procédure récursive reprise ci – haut.

1.2.4.5 SCHÉMA ITÉRATIF – SCHÉMA RÉCURSIF

Comparativement aux algorithmes itératifs, les algorithmes récursifs se présentent sous une forme simple. Le programmeur peut éprouver des difficultés pour les concevoir parce qu'ils nécessitent un grand effort d'abstraction. On dit qu'un problème se prête bien à une démarche ou procédure récursive, quand il peut être décomposé en une suite d'actions dont l'une constitue un sous-problème semblable à celui d'origine mais qui est appliqué à un environnement réduit.

Aussi faut-il préciser que la récursivité est coûteuse, mais, en la comparant avec l'itération, elle donne des solutions s'exprimant de manière plus concise que les solutions itératives correspondantes. Néanmoins, si la solution itérative est simple à formuler, il est donc déconseillé d'utiliser une solution récursive en raison du coût que cela implique eu égard à l'exécution de la gestion des environnements successifs.

Par ailleurs, il y a des problèmes auxquels il est difficile de donner une solution, qui ne soit pas récursive. Il s'agit particulièrement des problèmes dont la recherche de la solution se fait par essais successifs. Cela se passe comme dans le parcours d'un labyrinthe, c'est-à-dire on essaie un chemin et, si cela n'amène pas à la solution, il faut revenir en arrière et essayer un nouveau chemin. Pour s'en sortir, il existe des méthodes de traduction d'une procédure récursive en une procédure non récursive.

1.2.4.6 TRADUCTION D'UNE PROCÉDURE RÉCURSIVE EN UNE PROCÉDURE NON RÉCURSIVE

Considérons P une procédure récursive telle qu'un appel à P ne peut provenir que de P . Ainsi, on peut traduire P en une procédure non récursive comme suit :

1. On considère une pile STY pour chaque paramètre Y ;
2. On considère également une pile STX pour chaque variable locale ;
3. On considère finalement une variable locale AD et une pile STAD pour ranger les adresses de retour.

Le constat est que chaque fois qu'apparaîtra un appel récursif à P , les valeurs actuelles des paramètres et des variables locales vont être empilées sur les piles correspondantes et cela pour traitements ultérieurs et à chaque retour récursif sur P . De même, les valeurs des paramètres et des variables locales liées à l'exécution actuelle de P vont être restaurées après défilements.

La gestion de l'adresse de retour suivra la démarche que voici :

A ce stade, on suppose que la procédure P contient une instruction récursive Call P à l'étape K . on a deux adresses de retour associées à cette étape K .

1. L'adresse actuelle de retour de la procédure P qui sera utilisée lorsque l'exécution courante de la procédure P sera achevée.
2. La nouvelle adresse de retour $K+1$, qui est l'adresse de l'étape suivant Call P et qui sera utilisée aux fins de revenir au stade d'exécution actuelle de la procédure.

De cette traduction de différentes procédures, il est à remarquer que pour certains acteurs, il y a lieu d'empiler la première de ces deux adresses, c'est-à-dire l'adresse de retour actuelle, sur la pile d'adresse de retour STAD, et, pour d'autres acteurs, on peut empiler la seconde adresse, la nouvelle adresse de retour $K+1$, sur STAD. Donc, la deuxième démarche a l'avantage de simplifier le processus de traduction de P en une procédure non récursive.

Elle veut dire donc qu'une pile STAF vide va indiquer un retour au programme principal appelant initialement la procédure récursive P .

2 L'ARITHMÉTISATION DE LA MÉTAMATHÉMATIQUE

2.1 L'IDÉE D'ARITHMÉTISATION

Soit K une théorie du premier ordre. Le leitmotiv de l'idée d'arithmétisation chez GÖDEL consiste à encoder les énoncés métamathématiques à propos de la théorie K de manière à pouvoir les substituer par des formules arithmétiques. A leur tour, ces formules pourront même être exprimées dans la théorie K . Donc, on peut exprimer les propriétés métamathématiques de la théorie K dans K elle-même. L'arithmétisation se définit de la façon suivante [3]:

2.2 DÉFINITION

On appelle arithmétisation d'une théorie K , une fonction monomorphique g de l'ensemble des symboles, expressions et suites fines d'expressions de K vers l'ensemble des entiers positifs vérifiant les conditions suivantes :

- (1) g est effectivement calculable ;
- (2) il ya une procédure effective qui détermine si un entier positif m est dans l'image de la fonction g et le cas échéant, cette procédure permet de trouver l'objet x' tel que $g(x') \equiv m$.

Au regard du premier théorème d'incomplétude, l'idée d'arithmétisation a pour aboutissement son application à la théorie arithmétique formelle S et au langage L_A . D'une manière plus générale, GÖDEL procède en deux étapes. La première définit une fonction d'arithmétisation en associant à tout symbole du langage de K , un nombre entier positif. La deuxième étape traduit les énoncés du métalangage de K en des formules arithmétiques.

2.3 ARITHMÉTISATION DE LA SYNTAXE [4]

La preuve d'incomplétude de GÖDEL fait appel à l'arithmétisation de la syntaxe. En effet, on considère les expressions d'un langage formel (les symboles, séquences de symboles, etc.) comme étant des objets formant une classe à dénombrer. C'est donc une classe susceptible d'être corrélée effectivement et injectivement à l'ensemble des entiers naturels.

Au niveau métathéorique, on peut se référer aux indices de l'énumération plutôt qu'aux objets énumérés et de représenter dans ce cas les propriétés et relations syntaxiques des systèmes formels par les propriétés des nombres naturels [4].

Ainsi, dans les systèmes axiomatiques, il est possible d'énumérer tous les symboles primitifs, tous les termes et toutes les preuves telles que pour un entier positif n , il y a lieu de trouver en un nombre fini d'étapes, quelle combinaison de signes est le $m^{\text{ième}}$ énoncé et quelle combinaison de signes est la $n^{\text{ième}}$ preuve. D'où, pour chaque système, une méthode permet, étant donnés deux entiers positifs m et n , de décider en un nombre fini d'étapes si la $m^{\text{ième}}$ preuve est une preuve du $n^{\text{ième}}$ énoncé. Quelle en soit la preuve enregistrée, c'est possible de préciser de quel énoncé elle est la preuve. Ce qui signifie que la relation binaire « être une preuve de » est récursive ou axiomatiquement énumérable [4].

La preuve classique sur l'incomplétude de l'arithmétique de PEANO amène GÖDEL à supposer que la consistance ω de l'arithmétique est définie sur l'ensemble infini des nombres naturels. Il formule au début de deuxième ordre du postulat chez PEANO sur l'existence d'un tel ensemble infini.

$$\exists x \{ \emptyset \in \neg \forall y (y \in x \rightarrow Sy \in x) \} \rightarrow \forall y \in x$$

La théorie ou le système formel S_2 de l'arithmétique de PEANO est cependant finie au sens de la théorie de la démonstration de HILBERT aux fins de représenter le système formel dans l'arithmétique de PEANO. On voit GÖDEL assigner des nombres naturels (les nombres de GÖDEL) aux signes primitifs S_2 et aux suites finies de tels signes (les formules de S_2). Ainsi on a par exemple :

$$\begin{aligned} & \text{"0" ... 1 " "...5 "π" ... 9} \\ & \text{"f" ... 3 "v "...7"(" ... 11} \\ & \text{"(" ... 13} \end{aligned}$$

Notons qu'on établit la bijection entre une suite de nombres naturels et une suite finie de signes de $L(S_2)$, *le langage du système formel s'accompagne d'une application* : $\emptyset: \mathbb{N}_s \rightarrow \mathbb{N}$ des suites finies de nombres naturels sur des nombres naturels associant par bijection, cette fois à la suite $n_1, n_2 \dots n_k$, le nombre $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ où p_k dénote le $K^{\text{ième}}$ nombre premier. GÖDEL veut ainsi plonger le système formel dans l'arithmétique de PEANO.

Il s'agit de l'arithmétique des fonctions récursives primitives construites par les règles de substitution et de composition (ou récursion) à partir des fonctions de base de successeur, des fonctions constantes dont la fonction zéro.

$$\forall x (Zx = 0)$$

et les fonctions d'identité. Si l'on en a plus, comme chez GÖDEL, la fonction μ pour « le plus petit nombre K tel que »

$$\emptyset(K + 1, x_2, \dots, x_n) = \mu(k, \emptyset(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

On a les fonctions récursives générales. Mais si les fonctions récursives, comme on le sait, sont des fonctions arithmétiques, leur domaine et codomaine sont l'ensemble dénombrable $\mathcal{N}_0$ des nombres naturels. Elles ne se prêtent pas naturellement à un calcul fini.

D'après GÖDEL, la consistance ω est définie pour les propriétés $F(x)$ des nombres naturels. En effet, elle suppose le parcours complet des valeurs d'une fonction définie sur l'ensemble des nombres naturels. Alors que la consistance simple de ROSSER, pour l'arithmétique de PEANO, ne fait que substituer à la consistance ω le concept d'énumérabilité récursive qui lui est équivalent par le recours récursif $\mathcal{N}_0 = \text{card } N$.

Il est à remarquer que le produit de convolution polynomiale ou la diagonale de CAUCHY n'est pas source de paradoxe de l'autoréférence à travers la diagonale de CANTOR dans l'arithmétique de PEANO. En effet, GÖDEL accepte qu'il s'agit là d'un accident, si une formule obtenue par la substitution diagonale se transforme en un énoncé indécidable qui dit de lui-même qu'il est non prouvable : l'autoréférence ne serait qu'un produit dérivé de la procédure diagonale. GÖDEL suppose en effet la consistance ω — la consistance de ROSSER qui utilise la notion équivalente de fonction récursive sur $\mathcal{N}_0 = \text{Card } N$. Ce qui permet, à la diagonalisation à la CANTOR, d'identifier certains énoncés qui portent sur le contenu arithmétique de la théorie

(la théorie – objet) avec les énoncés métalogiques de la théorie. Cela se passe dans le cas de l'énoncé indécidable du système formel S_2 de l'arithmétique de PEANO.

$$\forall_{\underline{x}_2} \neg P_r(\overline{k}, \underline{x}_2)$$

où les expressions soulignées font partie du système formel et où $\overline{k}$ est la *ndg* de la formule

$$\forall_{\underline{x}_2} \neg P_r(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$$

En effet, l'énoncé indécidable dit qu'il n'y a pas de preuve de lui-même dans S_2 , mais l'énoncé est vrai dans T_2 (le modèle de l'arithmétique de PEANO). Le jeu de la substitution montre qu'on peut l'admettre, dans une logique interne de l'arithmétique ou une logique polynomiale, étant donné que la substitution par diagonalisation (de CAUCHY) indiquerait

$$\psi: \forall xAx[n] = \prod_n (a_0x, b_0x)$$

Il se fait que pour un énoncé A , on peut associer à cela son *ndg*[n]; ce qui donne par la suite une représentation polynomiale qui fera apparaître cet n de la manière suivante :

$$C_n = a_0, b_n + a_1, b_{n-1} + a_n, b_0$$

où on a $\overline{C}_n 1 - C_n$,

Mais il fera entrer cela dans une computation sans paradoxe ; raison pour laquelle le $\overline{k}$ de l'arithmétique de PEANO, pointe réellement à un ensemble des nombres naturels se plaçant sur la codiagonale ou anticodiagonale des énoncés niés non récupérable sans paradoxes de l'autoréférence. Ainsi, on aura remarqué que la consistance externe dans l'arithmétique ensembliste N_0 est source de divers paradoxes rencontrés en logique mathématique.

Par contre, la consistance interne de l'arithmétique en général ou polynomiale le réalise et cela en s'évanouissant dans le calcul.

Fort de tous ces éléments, il est à retenir que dans sa preuve de complétude pour l'arithmétique de PEANO, GÖDEL avoue que son second résultat d'incomplétude, particulièrement les preuves sur la consistance, ne contredit pas les points de vue formalistes jusqu'alors soutenus par HILBERT ; étant donné qu'on peut concevoir qu'une démonstration finitiste « interne » ne peut pas être formulée dans le langage des systèmes formels de l'arithmétique de PEANO ou dans le langage des systèmes plus englobant telle que la théorie des ensembles ou l'analyse classique.

1) Les symboles primitifs

On note qu'à chaque symbole μ du langage K correspond un entier positif impair. On voit clairement que les nombres 3, 5, 7, 9, 11 et 13 sont alors impairs. Quant aux nombres $13 + 8K$, $7 + 8K$, $1 + 8(2^3 + 3^k)$ et $3 + 8(2^3 + 3^k)$, ils le seront si et seulement si $8k$ et $8(2^3 + 3^k)$ le sont eux-mêmes. En clair, la somme des deux entiers positifs est impaire lorsque ceux-ci sont de parité différente. Et pourtant, $8k + 8(2^3 + 3^k)$ étant divisibles par 2, sont tous deux pairs.

En outre, la fonction $\mathcal{G}$ est monomorphique. Cela signifie qu'elle associe les nombres de GÖDEL $\mathcal{G}(\mu)$ différents à des symboles μ différents et cela à 3 niveaux.

D'abord, on constate que 3, 5, 7, 9, 11 et 13 sont tous différents l'un de l'autre. Ensuite, on aperçoit que $13 + 8K$, $7 + 8K$, $1 + 8(2^3 + 3^k)$ et $3 + 8(2^3 + 3^k)$ sont différents de 3, 5, 7, 9, 11 et 13 car $k, n \geq 1$. Enfin, il est vrai que $13 + 8K$, $7 + 8K$, $1 + 8(2^3 + 3^k)$ et $3 + 8(2^3 + 3^k)$ sont aussi tous différents l'un de l'autre, car ils sont différents relativement à la division mod 8.

2) Les expressions

A ce niveau, notons d'abord que la fonction $\mathcal{G}$ fait correspondre à toute expression $u_0 u_1 \dots u_r$ constituée des symboles $u_0 u_1 \dots u_r$ un nombre entier positif $\mathcal{G}(u_0 u_1 \dots u_r)$, le nombre de GÖDEL est formé, de la manière suivante : $\mathcal{G}(u_0 u_1 \dots u_r) = 2^{\mathcal{G}(u_0)} 3^{\mathcal{G}(u_1)} \dots p_r^{\mathcal{G}(u_r)}$ où p_j est le $j^{\text{ème}}$ nombre premier avec $p_0 = 2$.

Suivant le procédé d'arithmétisation au niveau des expressions, la fonction $\mathcal{G}$ est monomorphique relativement aux expressions de la théorie K . Selon le constat, à des expressions différentes correspondent des nombres de GÖDEL différents. Ce constat se justifie par le théorème fondamental de l'arithmétique qui stipule, dans ce cas, l'unicité de la factorisation des entiers en puissances de nombres premiers.

En outre, les symboles et les expressions de la théorie K ont des nombres de GÖDEL différents. A l'opposé des symboles dont les nombres de GÖDEL sont impairs, les expressions ont par contre les nombres de GÖDEL pairs. On voit que $2^{\mathcal{G}(u_0)}$ étant pair, car il est divisible par 2, le nombre de GÖDEL $2^{\mathcal{G}(u_0)}3^{\mathcal{G}(u_1)} \dots p_r^{\mathcal{G}(u_r)}$ associé à une expression $u_0u_1 \dots u_r$ est donc pair.

De ce qui précède, il y a lieu de constater que la fonction $\mathcal{g}$ permet de rendre discriminatoire entre l'utilisation d'un symbole en tant que tel ou en tant qu'expression. En clair, une expression peut être constituée uniquement d'un symbole u . Alors que, la parité de ce symbole varie selon qu'il soit utilisé en tant qu'expression.

3) Les suites finies des expressions

En créant un modèle arithmétique de PM équivalent à PM ayant des symboles, GÖDEL établit qu'à toute suite finie d'expressions $e_0, e_1, \dots, e_r$ de K, correspond un nombre entier positif $\mathcal{g}(e_0, e_1, \dots, e_r)$; le nombre de GÖDEL de cette suite finie d'expressions est définie comme suit :

$$\mathcal{g}(e_0, e_1, \dots, e_r) = 2^{\mathcal{G}(e_0)}3^{\mathcal{G}(e_1)} \dots p_r^{\mathcal{G}(e_r)} \text{ où } p \text{ désigne le } j^{\text{e}} \text{ nombre premier.}$$

Par rapport aux suites d'expressions, la fonction $\mathcal{g}$ est monomorphique. On a des suites d'expressions différentes ayant des nombres de GÖDEL différents, et cela se justifie toujours par le fondamental de l'arithmétique.

En plus, on se rend compte que le nombre de GÖDEL, d'une suite finie d'expressions, est différent des nombres de GÖDEL associés à des symboles ou expressions. Cette différence résulte du fait que tout symbole u a un nombre de GÖDEL impair, mais le nombre de GÖDEL associé à une suite finie, d'expression $e_0, e_1, \dots, e_r$ est nécessairement pair en raison du facteur $2^{\mathcal{G}(e_0)}$. Aussi se comprend-t-elle que les nombres de GÖDEL, associés à une expression $u_0, u_1, \dots, u_r$ et à une suite finie d'expression $e_0, e_1, \dots, e_r$ sont tous deux pairs en raison de leur premier facteur qui est une puissance de 2. On trouve respectivement $2^{\mathcal{G}(u_0)}$ et $2^{\mathcal{G}(e_0)}$. S'agissant d'une expression, cet exposant correspond toutefois au nombre de GÖDEL d'un symbole. Donc, il est impair, contrairement à une suite d'expressions, cet exposant est pair, car il correspond au nombre de GÖDEL d'une expression.

En clair, on voit que la fonction permet à ce niveau d'établir une distinction entre un symbole utilisé en tant que symbole, et une expression ou suite finie d'expressions.

2.3.1 LE CODAGE

Le codage est à juste titre la numérisation, l'idée montrant un lien de cause à effet. Deux mécanismes sont opérés lors du codage à savoir : le formalisme et la numérisation [5].

2.3.1.1 LE FORMALISME

Toutes les opérations d'un système formel, qui sont la création d'un langage (termes et énoncés), les axiomes, les règles, leur enchaînement pour fournir des preuves (les théorèmes), toutes les opérations en bureautique, à savoir le renommage de variables et la substitution de termes pour des variables, peuvent être écrites en informatique. Cela suppose les caractéristiques de l'ordinateur illimitées c'est-à-dire n'ayant pas de limitation de mémoire. Ce travail est semblable à celui d'un logiciel de traitement de texte.

Remarquer que c'est une activité à caractère formel, bureautique : pas la moindre erreur, par exemple en confondant "o" et "O" [5].

2.3.1.2 LA NUMÉRISATION

Le langage se code par des nombres, en binaire ou hexadécimal qu'importe ; même les images et les sons sont codables. Le travail de GÖDEL en 1931, a consisté pour la première fois, à associer à toute expression du langage un « nombre de GÖDEL » $\lceil \alpha \rceil$, qui est certes un codage. D'après GÖDEL $\lceil \lceil = 11 \rceil \rceil = 13$, alors que les codes modernes ASCII des parenthèses sont respectivement 40, 41.

Le codage utilisé par GÖDEL est quelque peu obsolète, en ce sens qu'il ne se justifie qu'en l'absence de problème de taille (encombrement mémoire). Mais, outre cela, le codage de GÖDEL opère suivant les mêmes procédés que les codages modernes [5].

On voit également que les propriétés d'un système formel seront donc traduites à une fonction ou une opération des codes associés représentables dans l'arithmétique formelle, comme aussi tout système dans lequel il est possible de traduire l'arithmétique [5].

Particulièrement, c'est donc l'aspect réflexif du théorème qui indique qu'un système d'arithmétique peut se représenter lui-même, « parler » de soi, de même qu'un langage de programme ou un programme particulier de ce même langage [5].

2.3.1.3 DU CODAGE AUX THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE

En 1931, GÖDEL prouve l'incomplétude de tout système axiomatique contenant la théorie des nombres. Il s'agit là de l'arithmétique théorisée. Depuis lors, on établit une séparation nette entre vérité et prouvabilité.

La métamathématique gödelienne va du codage aux théorèmes d'incomplétude prouvant ainsi la faillite du réductionnisme à fonder les mathématiques sur la seule logique formaliste.

2.3.1.4 DE L'ARITHMÉTISATION (LE CODAGE) DE LA THÉORIE FORMALISÉE

Pour GÖDEL, un système formalisé est capable d'exprimer tous les concepts arithmétiques et d'établir toutes les relations arithmétiques courantes. Par après, il est possible d'arithmétiser ce calcul. Cela veut dire que les formules et les preuves de son système peuvent être codées en nombres entiers. Donc, elles sont arithmétisées, selon une méthode permettant d'établir une correspondance bi-univoque entre les expressions du système et un certain sous ensemble de $\mathbb{N}$.

Le codage dans la métamathématique de GÖDEL établit une correspondance bi-univoque entre les expressions du système et un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. La description technique du codage s'effectue de telle manière que GÖDEL assigne un nombre unique (*nombre de GÖDEL*) à chaque signe élémentaire du système :

Constances : $\rightarrow$ nombre entier de 1 à 10,

variables numériques x, y $\rightarrow$ nombre premier supérieur à 10,

variables propositionnelles p, q , $\rightarrow$ carré d'un tel nombre

variables de prédicats P, Q $\rightarrow$ cube d'un tel nombre

formule ou suite de signes produit des nombres premiers élevés à une puissance dont l'exposant est le nombre de GÖDEL de chaque signe.

Démonstration ou suite finie des formules $\rightarrow$ produit des nombres premiers élevés à une puissance dont l'exposant est le nombre de GÖDEL de chaque signe.

Ainsi il y'a lieu de déterminer le nombre de GÖDEL de toute expression et, dès qu'un nombre est donné, il est possible de déterminer s'il s'agit d'un nombre de GÖDEL et de retrouver l'expression qu'il représente.

Prenons l'exemple : le nombre 100.

$100 > 10$, donc 100 n'est pas le nombre de GÖDEL d'une constante

100 n'est pas un nombre premier supérieur à 10 et 100 n'est ni le carré ni le cube d'un nombre premier supérieur à 10, donc 100 n'est pas le nombre de GÖDEL d'une variable.

$100 = 2^2 \cdot 5^2$ On voit sauter le nombre 3. C'est pour dire que les nombres premiers ne sont pas successifs. Cela ne correspond pas à la règle posée.

De même qu'il est possible à ce stade de mentionner que toutes les assertions métamathématiques portant sur la théorie formalisée s'érigent en assertions métamathématiques portant sur des nombres entiers, il en résulte que ces relations sont transformées, quant à elles aussi, en relation portant sur les nombres. Donc les assertions métamathématique se trouvent transformées en relations arithmétiques (opérations).

A titre d'exemple

$$\left(\begin{array}{ccc} p & v & p \\ 8 & 11^2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{ccc} p & & \\ 11^2 & 9 & 3 \end{array} \quad 11^2$$

Ce qui donne en effet le nombre de GÖDEL $2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9 \cdot 13^3 \cdot 17^{11^2}$

Ainsi, la proposition " $(p \vee p)$ est une partie de $(p \vee p) \rightarrow p$ " devient " b est un facteur de a ", en désignant par b , le nombre de GÖDEL de $(p \vee p)$, soit $2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9$, et par a le nombre de GÖDEL ci-haut.

Le fondement théorique du codage dans la théorie de démonstration de GÖDEL trouve sa justification dans le fait que ces métamathématiques se trouvent entièrement arithmétisées. Donc, il est possible d'entreprendre l'étude de questions métamathématiques par une analyse des propriétés arithmétiques et des relations entre certains entiers. Aussi se permet-on d'affirmer qu'aux assertions métamathématiques vraies correspondent des formules arithmétiques vraies.

Ce codage est un procédé qui permet à GÖDEL de rédiger des assertions arithmétiques qui se réfèrent à elles – mêmes, c'est-à-dire les autoréférences typiques semblables aux paradoxes de RICHARD et/ou au paradoxe du menteur. L'assertion que construit GÖDEL pour prouver un énoncé à la fois vrai et non prouvable est de ce type. Elle utilise le fait qu'un nombre du codage peut ou non correspondre à ce qu'exprime le nombre du codage qu'il code (paradoxe de RICHARD).

Ainsi, la formule $(\exists x)(x = s y)$ a pour nombre de GÖDEL qu'on peut calculer⁴, la formule $(\exists x)(x = s m)$ a un nombre de GÖDEL qu'on peut calculer, mais qu'il est aussi possible de se contenter de définir ou de caractériser métamathématiquement, par la manière de sa formation et sans ambiguïté : c'est le nombre de GÖDEL de la formule obtenue en substituant m à y (la variable dont le nombre de GÖDEL est 13) dans la formule dont le nombre de GÖDEL est m . Il peut être noté par $Sub(m, 13, m)$.

La preuve proprement dite,

Elle se développe comme suit :

GÖDEL construit une formule arithmétique G qui affirme d'elle – même qu'elle n'est pas prouvable. Pour cela, il associe la formule G à un certain nombre h , et la construit de façon qu'elle corresponde à l'assertion : "la formule associée au nombre h n'est pas prouvable" ou "aucune preuve ne peut être donnée de la formule qui porte le nombre de GÖDEL h ".

De quelle manière procède GÖDEL ?

Pour ce faire, GÖDEL utilise un fait de système de codage, il existe une relation arithmétique entre le nombre de GÖDEL d'une preuve et le nombre de GÖDEL de sa conclusion.

Étayons ce procédé par un exemple ;

Si m est le nombre de GÖDEL de la formule $(\exists x)(x = s y)$,

Si n est le nombre de GÖDEL de la formule $(\exists x)(x = s 0)$,

On déduit que la seconde formule découle de la première. La suite des 2 formules est donc une preuve de la seconde. Si l'on associe à la suite le nombre $k = 2^m \cdot 3^n$, alors, il ya une relation arithmétique définie entre k , nombre de GÖDEL de la preuve, et n , nombre de GÖDEL de la conclusion. Généralement, ce type de relation se laisse traduire par $Dem(k, n)$.

En effet, la formule $Dem(k, n)$, signifie que l'assertion "telle suite de formules est une preuve de telle conclusion" est vraie.

De même, l'assertion métamathématique : "la suite de formule qui porte le nombre k n'est pas une preuve de la formule qui porte le nombre n ", est représentée par une formule comme dans la théorie formalisée et arithmétisée de l'arithmétique.

En généralisant cette formule et en la faisant précéder de $(\forall k)$, on a alors l'assertion métamathématique qui s'énonce comme suit :

⁴Ce nombre de GÖDEL est comme suit :

$(\exists x)(x = s y)$

$8 \ 411 \ 98 \ 11 \ 5 \ 7 \ 13 \ 9$

$2^8 x 3^4 x 5^{11} x 7^9 x 11^8 x 13^{11} x 17^5 x 19^7 x 23^{13} x 29^9$

Remarquons que tout entier naturel n'est pas à considérer comme le nombre de GÖDEL d'une formule. Comme on fait qu'une machine de TURING est une entité correspondant à un ensemble de formules, il y a lieu de lui assigner un nombre de GÖDEL.

"Pour tout k , la suite de formule qui porte le nombre de GÖDEL, k n'est pas une preuve de la formule qui porte le nombre de GÖDEL n ", veut dire que "la formule qui porte le nombre de GÖDEL n n'est pas prouvable" ou "aucune preuve ne peut être donnée de la formule qui porte le nombre de GÖDEL n ".

Pour GÖDEL, n constitue un cas particulier de $sub(m, 13, m)$, le nombre de GÖDEL de la formule obtenue en substituant m à y (dont le nombre de GÖDEL est 13) dans la formule dont le nombre de GÖDEL est m .

La formule :

$(\forall k) \neg Dem(k, sub(m, 13, m))$ représente l'assertion métamathématique :

"La formule qui porte le nombre de GÖDEL $sub(m, 13, m)$ n'est pas prouvable". Elle peut être formalisée et porter un nombre de GÖDEL h qui est calculable.

3 LES NOMBRES DE GÖDEL

Soit SFG une théorie. D'abord on assigne à chaque symbole primitif de SFG un nombre par une fonction g :

(	)	,	¬	→	∀
3	5	7	9	11	13

x_k	a_k	f_k^*	A_k^*
$13+8K$	$7+8K$	$1+8(2^{n3^k})$	$3+8(2^{n3^k})$

Ce qui revient en effet à dire que le procédé d'arithmétisation de GÖDEL procède par association d'un nombre à chaque symbole primitif du langage.

0	'	¬	∨	∀	(	)
1	3	5	7	9	11	13

Cela vaut de même pour chaque symbole de variable : si p_n est le nième premier.

x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_n	z_1	z_2	...	z_n	...
17	19	...	$P_n + 6$	17^2	19^2	...	$P_n^2 + 6$	17^3	19^3	...	$P_n^3 + 6$	...

Le nombre associé à une expression $S_1 S_2 \dots S_K$ comprenant les symboles primitifs S_i est $2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} \dots p_K^{n_K}$;

où $n_1, n_2, \dots, n_K$ sont les nombres associés aux symboles $S_1, S_2, \dots, S_K$. Donc, par exemple ;

Le nombre de $y_1(x_1) \vee \neg y_1(x_1)$ est $2^{17^2} 3^{11} 5^{17} 7^{13} 11^7 13^5 17^{17^2} 19^{11} 23^{17} 29^{13}$

Un formalisme est un système des symboles assujettis à certains principes de manipulation qui ressemble à un objet concret⁵ dont il est possible d'examiner complètement la structure. L'étude des propriétés du formalisme exige de recourir à

⁵ L'opposition concret-abstrait concerne tantôt l'ontologie c'est-à-dire les objets physiques, perceptibles, sensibles et cela par comparaison aux entités abstraites, tantôt les notions. Ici, il y a chez GÖDEL opposition entre les propriétés des combinaisons de signes envisagés comme

une métalangue qui va comporter des expressions désignant les signes de ce formalisme et les combinaisons des signes du formalisme, douées de signification des prédicats correspondant aux divers types de suites de signes du système formel, ainsi que des relations exprimant les propriétés du formalisme.

L'arithmétisation d'un tel formalisme requiert quelques exigences[6] :

- On coordonne à chaque signe un nombre premier.
- On donne un procédé coordonnant un entier bien déterminé à toute suite de signes ou expressions du formalisme.

Si S_y est une expression du système formel formée d'une suite de k signes et si $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont des nombres premiers coordonnés à ces signes, alors le nombre coordonné à l'expression S_y est :

$$2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k};$$

où p_k est le $k^{\text{ème}}$ nombre premier différent de 1

Et si S_p est également une suite de k , expressions du système formel, et si $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les nombres coordonnés à ces expressions, alors le nombre coordonné à S_p est :

$$2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k}$$

Le nombre coordonné à S_p est :

$$2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k}$$

Par le théorème sur l'unicité de la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers, on montre évidemment que la correspondance à établir est biunivoque. A tout élément de système formel (signe, expression ou suite d'expressions) correspond un nombre entier et à un seul nombre entier correspond un élément de système formel au plus [6].

Ainsi, on appelle une telle correspondance correspondance de GÖDEL et l'on appelle le nombre entier, coordonné à un élément E_c du système formel par une correspondance de GÖDEL, le nombre de GÖDEL (ou ndg) ou nombre – G de E_c (ou ndg de E_c).

Précisons en effet [6] que l'opération consistant à passer d'un élément appartenant à un système formel, à son ndg, est une fonction métathéorique. Alors que l'opération consistant à passer du ndg d'un élément à cet élément lui-même, est une fonction inverse de la fonction métathéorique.

Ces deux fonctions sont évidemment les *fonctions de GÖDEL* représentées par les notations abrégées suivantes :

fonction directe : $\text{Ngd}(E_c)$: ndg de l'élément E_c ;

fonction inverse : $\text{Ngd}^{-1}(a)$: élément du système formel dont le ndg est a .

Si les expressions de la suite $E_1, E_2, \dots, E_k$ ont respectivement les nombres $N_1, N_2, \dots, N_k$, le nombre associé à la suite est $2^{N_1} \times 3^{N_2} \times 5^{N_3} \times 7^{N_4} \times \dots \times p_k^{N_k}$. Le nombre associé à la suite de (deux) formules $y_1(x_1) \vee \neg y_1(x_1)$ et $y_1(0') \vee \neg y_1(0')$ est

$$2^{2^{17^2} 3^{11^5} 5^{17^7} 7^{13^{11}} 11^{7^{13^5}} 17^{17^{19}} 19^{11^{23}} 23^{17^{29}} 29^{13^{32}} 3^{2^{17^2} 3^{11^5} 5^{17^7} 7^{13^{11}} 11^{7^{13^5}} 13^{7^{17^5}} 17^{2^{23}} 23^{11^{29}} 31^{3^7} 37^{13}}$$

Notons que le nombre associé à une expression E d'après cette procédure, est appelé comme tel, le nombre de GÖDEL (*le ndg*) de E , ou en abréviation $\lceil E \rceil$. Le théorème fondamental de l'arithmétique nous apprend qu'un nombre a a une et une seule décomposition en nombres premiers. Il est donc évident de dire que $\lceil \cdot \rceil$ est une fonction injective. De toute façon, on peut dire que *le ndg* d'une expression est suffisant à la détermination de la suite de symboles primitifs composant E .

Ensuite, on définit une fonction Γ qui attribue un nombre à toute expression $\mu = \mu_0 \mu_1 \dots \mu_r$ de SFG (les μ_i sont des symboles primitifs) de la manière suivante :

$$\mu_0 \mu_1 \dots \mu_r \equiv 2^{g(\mu_0)} 3^{g(\mu_1)} \dots p_r^{g(\mu_r)}$$

types et les propriétés abstraites appartenant comme les combinaisons des signes, Chez HILBERT, cette opposition s'applique à des propositions, à des raisonnements où à des inférences plutôt qu'à des entités Voir : J. LARGEAULT, Logique mathématique, textes, p.258.

où p_i désigne le i -ième nombre premiers.

Ainsi, on peut arithmétiser de nombreuses conceptions métamathématiques telles que:

- (1) $N(n)$ est le nombre de GÖDEL de la formule obtenue du nombre de GÖDEL n ayant une seule variable libre en substituant la variable libre au nombre n .
- (2) $\text{Dem}(x, y)$ si et seulement si x est le nombre de GÖDEL d'une preuve de la formule du nombre de GÖDEL y .

4 CONCLUSION

La métalogue et la métamathématique constituent le champ d'approfondissement et de pertinence de la métathéorie. Partant des axiomes d'un système formel, il y a lieu de déduire des théorèmes faisant partie dudit système. Les métathéories touchant les propriétés syntaxiques ou sémantiques des systèmes formels concernent des formules indécidables dans le cadre de ses systèmes.

REFERENCES

- [1] J. Largeault : *Logique mathématique, textes*, Paris : Armand Colin ,1972.
- [2] Benis Sinaceur, « Récursivité », Encyclopédie Philosophique Universelle. Les Notions Philosophiques, Tome 2, Paris : PUF, pp.2188-2191,1990.
- [3] Elliot Mendelson : *Introduction to Mathematical Logic*, 4^{ème} édition, §3 – 4, Princeton: Van Nostrand,1964.
- [4] Jocelyne Couture, *Arithmétisation de la syntaxe*, 2013.
[Online] Available : <http://www.math.uqam.ca/~belair/seminaire%20de%20logique%20/exp.24fev06-MB> (août 2013).
- [5] J.-Y. Girard, *Proof Theory and Logical Complexity*, vol.1, Bibliopolis, 1987.
- [6] J. Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.

Champignons comestibles de la région de Kikwit en République Démocratique du Congo : Approche écologique, nutritionnelle et socioéconomique

M.F. Madamo¹, A. Lubini², F. Lukoki³, and E. Kidikwadi²

¹Institut Supérieur Pédagogique de Bandundu. B.P. 363, RD Congo

²Laboratoire Systémique, Biodiversité, Conservation de la Nature et Savoirs Endogènes, Département des Sciences de l'Environnement, Faculté des Sciences, Université de Kinshasa, B.P. 190 Kinshasa XI, RD Congo

³Laboratoire de Botanique Systématique et d'Ecologie Végétale. Département de Biologie, Faculté des Sciences, Université de Kinshasa. B.P. 190 Kinshasa XI, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: In view of gathering botanic and also other useful data, different prospective, field studies, and survey have been organized and carried out in the hinterland of Kikwit City, within an area of about 15 to 45 km square. A well prepared survey questionnaire was given to respondents and from their answers the study has been able to identify and make an inventory of mushrooms consumed by people from the hinterland communities and Kikwit City dwellers. From obtained results, it is noted that 74 kinds of mushrooms are part and parcel of the consumers' daily diet. The analysis of these gathered data reveals the prominence of *Marasmiaceae*, *Cantharellaceae*, *Lyophyllaceae* and *Polyporaceae*, types of *Marasmius*, *Termitomyces*, *Cantharellus*, *Lentinus* et *Auricularia* are the most common mushrooms sold in markets. The analysis on ecological aspects indicates that a wider majority of this species, inhabit the forests. Mushrooms are hygrophytes growing either on trees or on the ground under the trees. In all cases, these are seasonal resources whose periods of productivity require thorough observations. Our survey reveals that the people in the region under study are in majority mushroom consumers. Species of *Auricularia*, *Termitomyces* et *Schizophyllum*'s types have a huge economic impact nationwide and a strong commercial potentiality. 69 % of mushrooms are relatively appreciated on the nutritional and organic minerals point of view; among the most delicious we have the *Termitomyces* spp., *Cokeina* spp., *Clitocybe* spp., *Marasmius buzungolo* Singer, *Marasmiellus inoderma* (Berk.) Singer, *Volvariella volvacea* (Bull.) Singer, and also types of *Polyporaceae*. These mushrooms have a high rate nutritional value. The gathering and selling of these non wood forest products remain the sole activities providing food, work and income for this poor people. They are better alternatives for the guarantee of people's food security.

KEYWORDS: Edible mushrooms, Kikwit, R.D. Congo.

RÉSUMÉ: Des prospections, visites et enquêtes menées dans l'hinterland de la ville de Kikwit, sur un rayon variant entre 15 – 45 km en vue de récolter des échantillons mycologiques ainsi que d'autres données utiles ont été organisées et réalisées. Un questionnaire d'enquête élaboré, administré aux répondants et dépouillé a abouti à l'identification et inventaire des champignons consommés par les communautés de l'hinterland et citadins de Kikwit. Les résultats obtenus font état de 74 espèces de champignons entrant dans le régime alimentaire des consommateurs. L'analyse de ces résultats révèle la prédominance des *Marasmiaceae*, *Cantharellaceae*, *Lyophyllaceae* et *Polyporaceae*, des genres *Marasmius*, *Termitomyces*, *Cantharellus*, *Lentinus* et *Auricularia* sont les champignons les plus fréquents sur les marchés. L'analyse sur les aspects écologiques indique que les forêts constituent l'habitat de la très grande majorité de ces espèces de champignons. Les champignons sont des hygrophytes lignicoles ou terricoles affectionnant le sous-bois. Dans tous les cas, ce sont des ressources saisonnières dont la phénologie requiert des observations approfondies. Notre enquête révèle que la population de la région étudiée est en majorité mycophile. Les espèces des genres *Auricularia*, *Termitomyces* et *Schizophyllum* ont une

grande importance économique à l'échelle nationale et un fort potentiel commercial. 69 % des champignons sont relativement appréciés du point de vue nutritionnelle et organoleptique, les délicieux étant *Termitomyces spp.*, *Cokeina spp.*, *Clitocybe spp.*, *Marasmius buzungolo*, *Marasmiellus inoderma*, *Volvariella volvacea*, ainsi que les espèces des *Polyporaceae*. Ces champignons ont une valeur nutritionnelle élevée. La récolte et vente de ces PFNL demeurent les activités procurant la nourriture, les emplois et des revenus pour ces populations pauvres. Elles constitueraient des alternatives pour garantir la sécurité alimentaire de la population.

MOTS-CLEFS: Champignon, comestible, Kikwit, R.D.C

INTRODUCTION

Les forêts, riches en PFNL alimentaires, constituent des réserves d'aliments originaux et contribuent directement à la sécurité alimentaire dans son apport aux régimes alimentaires et à la nutrition [1]. Ces PFNL alimentaires apportent l'équilibre nécessaire aux régimes alimentaires et améliorent le goût et l'appétibilité des aliments de base [2] [3]. Leur vente génère des revenus qui peuvent aider à combler les besoins primaires auxquels les ménages sont exposés [2]

Cependant, la région de Kikwit, non industrialisée, sa population vit dans une extrême pauvreté et dépend presque totalement de la générosité de la nature pour se maintenir en vie [4]. Ainsi cette dépendance totale à la forêt, doublée par l'accroissement démographique de la région, font que l'équilibre de la nature soit profondément changé et que le rythme de déforestation soit localement beaucoup plus élevé que la moyenne. En effet, la ville de Kikwit et ses environs; à l'instar de nombreuses villes d'Afrique centrale, sont confrontées à la dégradation des écosystèmes forestiers, les rares forêts matures n'existent que sous formes d'îlots dans une matrice anthropisée. Car, la pauvreté engendre la détérioration de l'environnement qui accroît la pauvreté et ainsi de suite, le tout conduisant à l'insécurité alimentaire [5]. La conséquence est la disparition de certains organismes avant qu'ils ne soient connus et décrits des scientifiques. Les champignons se comptent parmi ces organismes qui sont pourtant des aliments de complément préférés par la population de la région de Kikwit et qui sont consommés au quotidien. Ils procurent des protéines et beaucoup de minéraux et sont considérés depuis longtemps comme des substituts potentiels de viandes et d'autres produits animaux [6] [1].

Ceci implique que les disponibilités alimentaires étant insuffisantes, la situation alimentaire demeure préoccupante pour l'ensemble de la population congolaise, et celle de la région de Kikwit en particulier. Pour résoudre ce problème de sécurité alimentaire et améliorer le niveau de vie de la population de ladite région, la valorisation des champignons comestibles par la domestication des espèces les plus consommées mais devenues rares (ou en voie de disparition) est une urgence. Pourtant, le manque d'information sur ces champignons comestibles couramment utilisés, leur disponibilité et leur préférence constituent un obstacle à la résolution de ce problème.

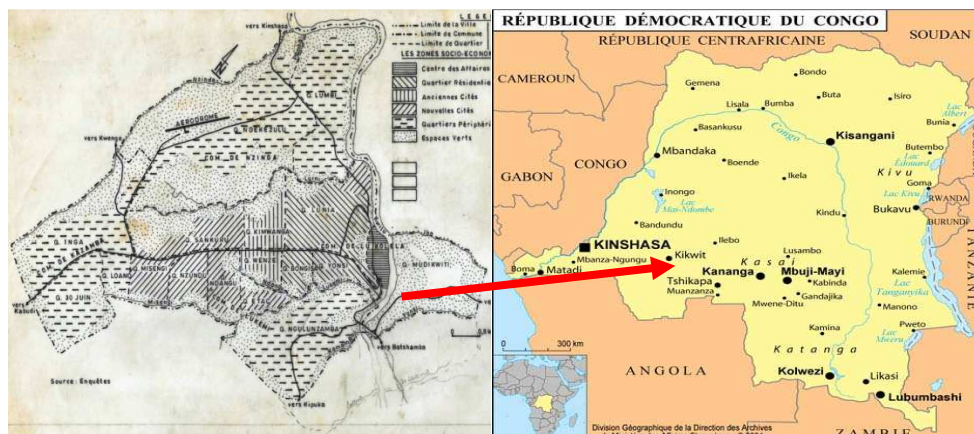
C'est cette problématique qui nous a conduits à étudier les « champignons comestibles de la région de Kikwit. Approche écologique, nutritionnelle et socioéconomique. »

Cette étude se propose de valoriser les champignons comestibles de la région de Kikwit. Elle inventorie les champignons consommés et vendus dans la région de Kikwit ; identifie les espèces couramment consommées et celles les plus appréciées ; détermine les espèces économiquement très rentables ; repère les espèces qui se raréfient et celles qui ont disparues ; évalue l'état de leurs habitats ; obtient des informations sur leur impact socioéconomique.

MATERIEL ET METHODES

MILIEU D'ETUDE

Notre étude concerne la région de Kikwit, c'est-à-dire la zone périurbaine limitrophe des Secteurs Kipuka au sud, Imbongo à l'est et Kwenge, à l'ouest, soit un rayon variant entre 15-45 km, à partir du centre ville de Kikwit. La carte 1 à gauche localise la ville de Kikwit et la carte 2 à droite situe la ville de Kikwit en République Démocratique du Congo.



Les cartes 1 et 2 localisent le milieu d'étude. Sources :

C'est l'arrière-pays à partir duquel s'approvisionnent les habitants de Kikwit en produits forestiers autres que le bois. Cette région d'étude se situe dans le territoire de Bulungu au centre de la Province du Kwilu en République Démocratique du Congo (RDC). Kikwit, ville économique de la province du Kwilu se situe à 400 km de la ville de Bandundu, chef-lieu de la province du Kwilu et à 525 km à l'est de la ville de Kinshasa, capitale de la RDC, sur l'axe routier Kinshasa - Kananga - Lubumbashi [7] [8]. La région s'intercale entre 5° et 5° 20' sud et 18° 48' de longitude est. La ville de Kikwit et ses environs sont placés dans la zone à climat subéquatorial du type AW3, caractérisé par deux saisons pluviométriques contrastées et des nuits relativement fraîches [7] [8]. En effet, les précipitations moyennes annuelles s'élèvent à 1500 mm et sont réparties en une saison humide de neuf mois du 15 août d'une année et se termine généralement vers le 15 mai de l'autre année. La saison sèche est de trois mois environ, soit du 15 mai au 15 août de la même année. L'humidité atmosphérique relative de l'air demeure élevée pendant toute l'année ; soit une moyenne annuelle de l'ordre de 85% avec une faible amplitude de variation, soit de 15 à 20 % [7]. La végétation de la contrée de Kikwit est caractérisée par les forêts galeries et les formations herbeuses.

MATERIEL

Le matériel recherché concerne des échantillons mycologiques collectés lors des visites et prospections organisées par nous-mêmes en compagnie des guides, cueilleurs et ramasseurs. L'ensemble de données de la collecte directe (sur le terrain) et indirecte (marchés de vente) ont constitué la collection morte (de champignons). La récolte des échantillons de notre étude a eu lieu grâce à un nombre d'équipements dont l'appareil de photo numérique, des sachets en plastique IDA pour la conservation des échantillons séchés de champignons.

METHODES

La réalisation de ce travail a nécessité la méthode d'observation sur le terrain complétée par les techniques d'enquêtes et des interviews auprès des différentes personnes ressources. Les approches méthodologiques se présentent de manière suivante:

- délimitation de terrain d'étude;
- récolte des échantillons de champignons et de prise de photos ;
- identifications scientifiques du matériel au laboratoire;
- technique d'enquête et entretien (visite des marchés);
- traitement statistique des données (Past, ACP et le test de corrélation de Pearson)

Le travail de collecte des données a eu lieu pendant la période du 10 novembre 2014 au 10 novembre 2015. Cette période a couvert les deux saisons : la saison des pluies et la saison sèche. La constitution de l'échantillon a été faite par quota avec un taux de sondage de 25% applicable à tous les marchés importants ciblés de la ville. Ainsi, le nombre moyen total des vendeurs, toute saison confondue, étant 381, l'échantillon aléatoire de cette étude est constitué de 95 vendeurs dont 14 pour le marché de Bikobo, 21 pour le Grand marché, 26 pour le marché de Kazamba, 16 pour celui de Pont Kwilu et 18 pour Ville basse. Nous avons eu à faire aussi des inventaires mycologiques approfondis des étals des vendeurs ciblés.

En plus, trois massifs forestiers situés dans un rayon de 45 km, parmi les plus fréquentés et encore assez riches en ressources alimentaires, ont été choisis au hasard, en raison d'un massif forestier pour chaque Secteur et ont fait l'objet de nos propres prospections et visites de terrain, durant la période du 5 janvier au 27 février 2015. Dans chaque village visité, nous avons recouru aux compétences de la systématique « locale », c'est-à-dire aux guides ou mieux aux personnes qui maîtrisent la connaissance et la nomenclature locale des espèces et qui ont des connaissances locales en écologie et en phénologie des espèces alimentaires. Nous avons également fait des interviews semi-structurées avec des groupes de 3 à 15 personnes de plusieurs familles rassemblées à cet effet. Les échantillons des champignons ont été conservés dans les sachets IDA. Grâce à l'appareil de photo de marque canon, nous avons pu prendre des photos des échantillons récoltés. L'identification a été faite par le Professeur Dibaluka et d'autres ouvrages dont celui de [7] [9] [10] [11] [12] [13] [14].

Les résultats obtenus ont été analysés à l'aide de l'Analyse en Composante Principale (ACP ou APC), logiciels Origin version 8 et XLSTAT 2014 au seuil de probabilité de 5% et le logiciel PAST version 3.08/2014 (Cluster analysis).

RESULTATS

■ Inventaire des champignons comestibles dans la région de Kikwit

Cet inventaire a permis de noter 74 espèces de champignons consommés par la population de la région de Kikwit. Le tableau en annexe reprend les noms des espèces, les noms vernaculaires, le substrat, l'habitat, la phénologie, l'abondance et la préférence. De 74, 68 taxons ont été identifiés jusqu'au rend spécifique. Tandis que les 6 autres restent indéterminés. Sur l'ensemble des espèces on compte 24 genres et 16 familles. Mises à part les *Sarcoscyphaceae* qui sont des *Ascomycota*, les autres familles font partie de la Division des *Basidiomycota*. Ces familles se regroupent en six ordres dont le plus représenté est celui des *Agaricales* qui renferment à eux seuls onze familles.

Les familles les plus diversifiées, par importance numérique, sont reprises dans la figure 1. L'analyse de Past (Palaeontological Scientific Trust) appliquée relative au groupement d'espèces étudiées, montre que les espèces se répartissent en cinq groupes. Elle révèle la prédominance des *Marasmiaceae* suivies des *Cantharellaceae*, *Lyophyllaceae* et des *Polyporaceae*, soit 45 espèces. Les genres *Marasmius*, *Termitomyces*, *Cantharellus*, *Lentinus* et *Auricularia* prédominent, soit 40 espèces représentant 54 % d'espèces. Il s'agit des genres les plus diversifiés et les plus fréquents dans la région. Les trois autres groupes de familles ont des valeurs faibles.

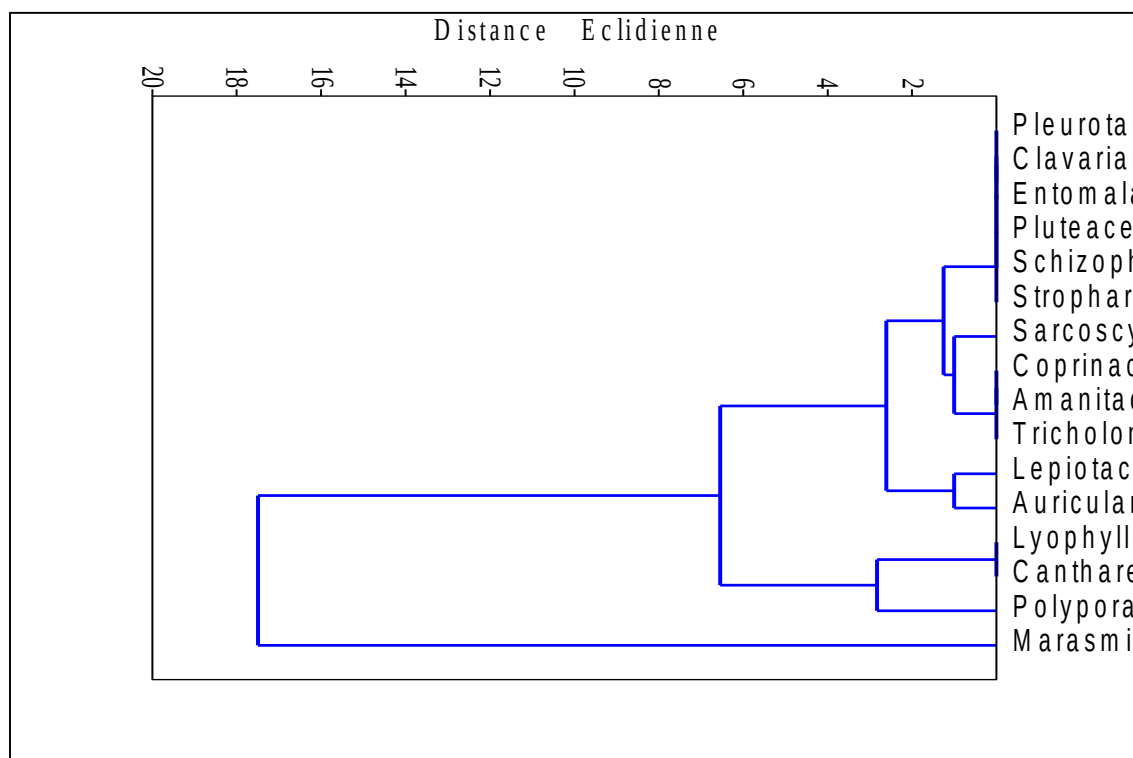


Figure 1. Analyse de groupements d'espèces selon l'importance numérique relative en genres et familles

Notons que la connaissance de la comestibilité d'un champignon se fait par tradition, d'une génération à une autre, généralement de mamans aux filles. La consommation d'un champignon par les mille pattes est une preuve de sa comestibilité.

Substrats, habitats et approvisionnement des champignons

Nous présentons ici les substrats et les habitats des champignons comestibles de la région de Kikwit, leur approvisionnement et leur phénologie. Dans la figure 2 suivantes sont repris les divers substrats et leurs proportions centésimales.

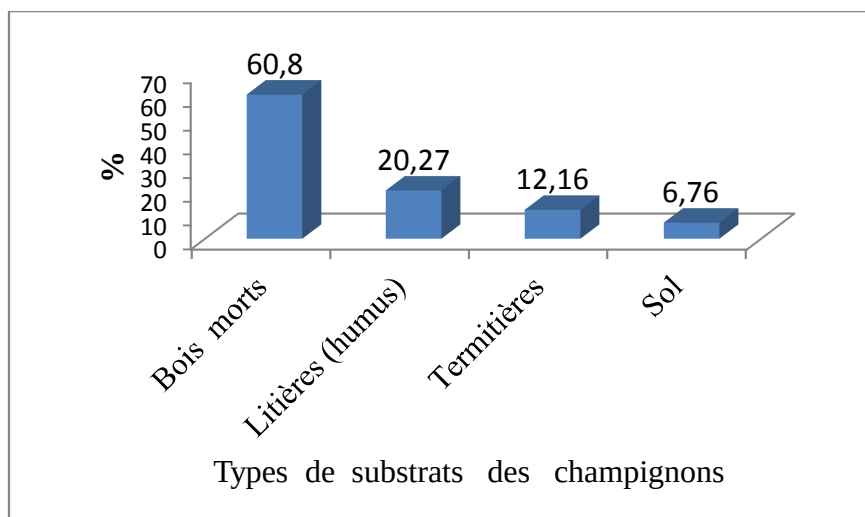


Figure 2. Types de substrats des champignons

L'analyse de la figure 2 indique que les bois morts de la région de Kikwit sont les substrats sur lesquels se développent les plus grands nombre des champignons étudiés, soit 60,80%. Les autres substrats portent peu d'espèces.

En ce qui concerne les habitats, les champignons comestibles de la région d'étude occupent pratiquement tous les systèmes de production. La figure 3 montre bien ces résultats. Il ressort de cette analyse que les forêts et les espaces agricoles constituent des habitats préférentiels des champignons comestibles de la région de Kikwit. En définitive, à part les *Termitomyces* qui se rencontrent aussi bien en forêt qu'en formation herbeuse, les autres sont cantonnés en milieu forestier.

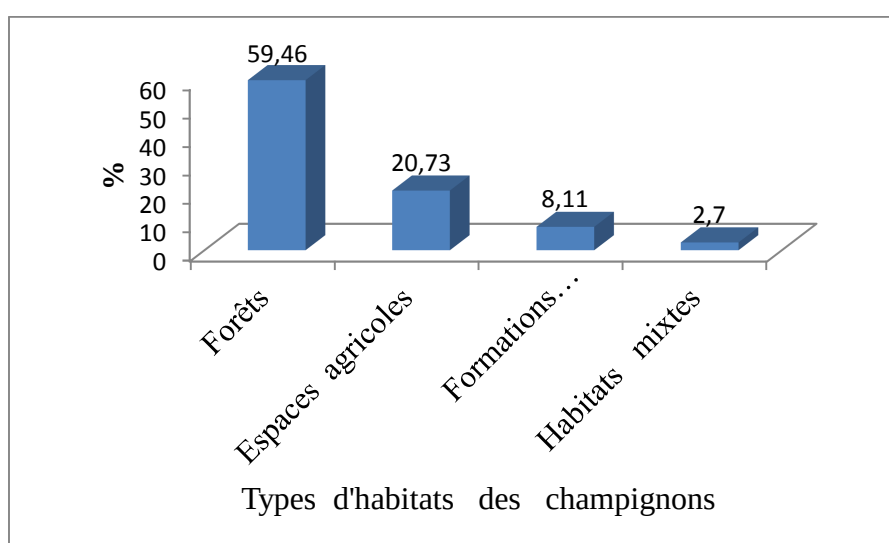


Figure 3. Diversité d'habitats des champignons comestibles de la région de Kikwit

Quant à l'approvisionnement, les champignons comestibles vendus sur les marchés de Kikwit proviennent des différents villages de l'hinterland de cette ville. Les résultats révèlent que les forêts d'approvisionnement des vendeurs se situent entre 15 km et 45 km puis à plus de 45 km de la ville de Kikwit pour respectivement 77 % et 23 % des vendeurs des champignons.

■ Phénologie de la flore mycologique comestible de la région de Kikwit

Le test de Pearson, appliqué entre la phénologie de récolte des champignons et les variations de précipitations et de températures figurent au tableau 2.

Tableau 1. Valeurs propres et pourcentages d'inertie

Axes	Valeurs propres	Variabilité (%)
1	9,94	82,84
2	2,06	17,16

Seul le premier axe factoriel est interprété, car sa valeur propre **9,94** exprime plus de **82,84 %** de l'inertie totale. Cet axe montre une relation positive entre les variables étudiées. Cela révèle que la probabilité pour que les précipitations aient une influence sur la phénologie des champignons est de 82,836 %, ce qui est très significative. La récolte est ainsi propice pendant la saison de pluies. La figure 4 sur la phénologie des champignons indique les mois de récolte abondante. Elle donne les résultats des analyses faites entre les paramètres. Toute fois certaines espèces fructifient avec l'apparition de la lune comme les espèces des *Amanitaceae* et de *Polyporaceae*.

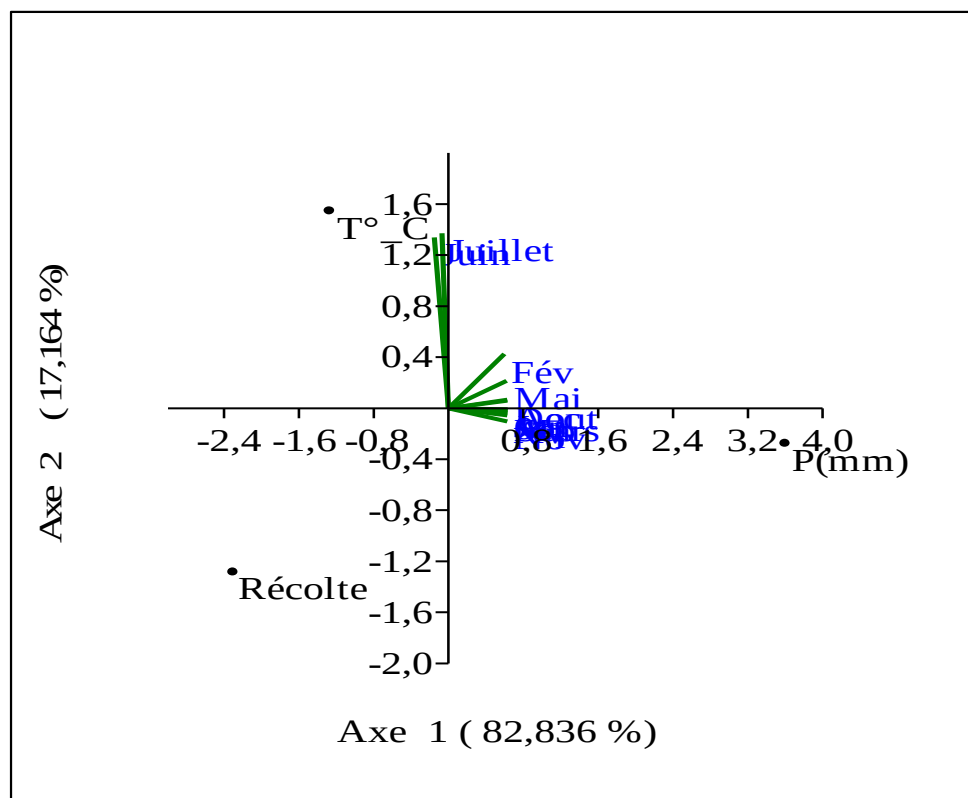


Figure 4. Représentation des paramètres sur l'espace défini par les deux premiers axes de l'ACP.

Néanmoins, il ressort de notre analyse que la probabilité de fructification des champignons dans la nature devient de plus en plus faible. L'analyse de groupement des champignons selon leur abondance, telle que présentée sur la figure 5, indique que 24% seulement des champignons comestibles de la région sont encore relativement abondants dans leurs habitats. La chance de trouver la majorité des espèces de champignons dans leurs habitats est devenue faible, étant donné que leur fructification est faible.

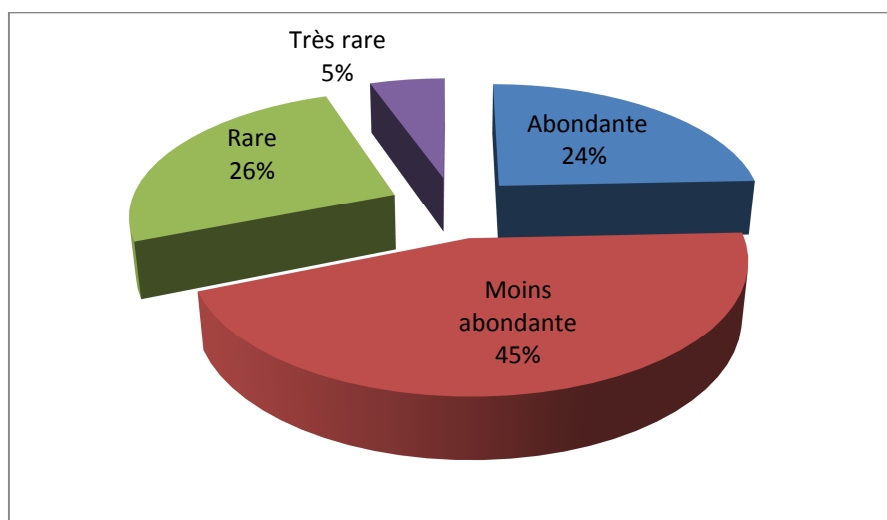


Figure 5. Récolte ou fructification des champignons

▪ Intérêts socioéconomiques des champignons

Toutes les personnes interrogées consomment les champignons, parmi lesquelles 59 % par habitude alimentaire, 5% pour leur valeur nutritionnelle, 28% pour leur valeur gustative et 8% par adaptation au milieu (acculturation). C'est dire que la population de la région de Kikwit est par sa nature très mycophile.

Ainsi, au total 69 % des champignons sont relativement appréciés, parmi lesquels 10 %, soit 23 espèces sont délicieuses, se substituant même à la viande. Les plus remarquables sont : *Termitomyces spp.*, des espèces des *Polyporaceae*, *Cokeina spp.*, *Marasmius buzungolo* Singer, *Marasmiellus inoderma* (Berk.) Singer, *Volvariella volvacea* (Bull.) Singer, *Clitocybe spp.*, dont nous présentons quelques photos.



Photo 1. *Cookeina sp* ; photo 2 : *Lentinus sp* ; photo 3 : *Marasmius buzungolo* Singer ; Photo 4 : *Termitomyces clypeat* ; photo 5 : *Termitomyces mammiformis* ; photo 6 : *Volvariella volvacea* .

Cependant les champignons disponibles et couramment consommés sont les *Auriculariaceae*, *Cantharellaceae*, *Marasmiaceae*, *Polyporaceae*, *Sarcoscyphaceae*.

Les champignons sont une source de revenu pour la population de la région et les marges bénéficiaires pour leur vente sont très élevées. Toutes les espèces de champignons inventoriées sont vendues à l'état frais ou sec, avec une ou plusieurs espèces dans un même tas ou paquet, dans les différents marchés de la ville. Les espèces les plus fréquentes sur les marchés sont respectivement les espèces de *Auricularia spp.*, *Cantharellus sp.* (tshondji), *Cokeina spp.*, *Termitomyces striatus* (Beeli) R. Heim, *T. aurantiacus* (R. H.) R. H., *T. mammiformis* R. Heim, *T. robustus* (Beeli) R. Heim, *Schizophyllum commune* Fr. Signalons aussi que les espèces d'*Auricularia*, celles de *Termitomyces* et *Schizophyllum* sont d'une grande importance à l'échelle nationale et les autres le sont au niveau local et provincial, sauf *Clavulina cristata* (Fr.) Schroet qui a une importance très limitée. Les espèces qui sont commercialement rentables ou qui ont un fort potentiel commercial sont respectivement *Cantharellus sp.*, *Auricularia spp.*, *Termitomyces spp.* et *Schizophyllum commune* Fr.

▪ Menaces sur les champignons

On assiste à une forte pression humaine sur les habitats naturels des espèces exploitées par des pratiques inappropriées: feux et incendies, la cueillette des plus jeunes champignons dont les carpophores ne sont pas bien développés, défrichements culturels, changement climatique, exploitations forestières (la fabrication du charbon), agriculture itinérante sur brûlis, etc. Tous ce qui précède constituent des menaces sur les champignons.

Cependant la minorité des personnes interrogées soulignent la mauvaise gestion des forêts par les chefs des terres et les chefs des groupements.

DISCUSSION

Richesse et diversité spécifique des champignons comestibles

L'inventaire de champignons comestibles révèle une diversité relativement important. Ce qui est comparable à l'étude de [15]. Ce chiffre La population de la région de Kikwit consomme 74 espèces des champignons, regroupées en 16 familles. Les familles prédominantes sont les *Marasmiaceae*, *Cantharellaceae*, *Lyophyllaceae* et les *Polyporaceae*. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus par [15] qui signale que des grandes quantités des champignons sont récoltées et consommées dans la province de Kwilu.

Ecologie et phénologie des champignons

Les champignons comestibles de la région de Kikwit sont majoritairement forestiers et leurs meilleurs substrats sont les bois morts. Ces résultats sont comparables à ceux de Francis Martin (2014) qui souligne que l'abondance et la diversité des champignons sont particulièrement grandes dans les écosystèmes forestiers. Rondet (s.d.) montrent que dans le monde, 80 % des espèces fongiques vivent en forêt. Les champignons sont ainsi hygrophiles, poussant sous les sous-bois des forêts.

Voilà pourquoi leur phénologie est grandement influencée par l'humidité et leur cueillette a lieu pendant les mois pluvieux, surtout les mois de novembre à avril. Ces résultats confirment ceux de [17] qui distinguent deux périodes d'intense prélèvement: de mi-septembre à décembre et de mars à mai. O'Dell et al. cités par [18] soutiennent qu'à l'échelle locale, l'abondance des précipitations serait un excellent indicateur de la diversité et de la structure des communautés fongiques. C'est dire que la disparition des forêts entraîne le passage de l'hygrophilie à l'héliophilie, préjudiciable pour les champignons. Ainsi, plus la forêt est préservée, plus les champignons pourront subsister. Donc, le rôle des forêts est fondamental pour l'existence des champignons.

Approche nutritionnelle et socioéconomique des champignons comestibles

Les résultats ont montré que la population de la région de Kikwit est par sa nature mycophile. La consommation des champignons entrent dans leurs habitudes alimentaires. Aussi la majorité de ces ressources sont d'une grande valeur gustative. Pour confirmer ces propos, Francis [16] montre que dans les pays en développement, les champignons constituent encore des aliments de subsistance importants au sein du régime alimentaire des populations rurales.

Les champignons sont des aliments de grande valeur nutritionnelle. Pour plusieurs chercheurs comme [19] [20], la valeur alimentaire des champignons comestibles sauvages est comparable à celle de la viande et du poisson, leur teneur moyenne en protéines étant d'environ 7 à 48% du poids sec, un bon équilibre en acides aminés et la présence de nombreux minéraux et de vitamines.

Les résultats ont prouvé que la vente de ces PFNL alimentaires sous étude procure des bénéfices mensuels qui excèdent même le salaire d'un domestique, voire même d'un fonctionnaire moyen d'Etat. Plusieurs auteurs dont [21] et [22] confirment bien que les PFNL offrent une opportunité aux ménages paysans pauvres de subvenir à certains besoins

quotidiens tels que l'alimentation, la scolarité et les soins de santé. Le revenu issu de l'exploitation des PFNL permet aux paysans de nouer les deux bouts du mois, affectant positivement le niveau de vie des exploitants.

Impacts de la déforestation sur les PFNL alimentaires

Les distances parcourues, la faible fructification de la majorité des espèces de champignons expliquent la destruction, la rareté et la dégradation des forêts périurbaines de la ville de Kikwit. Les champignons sont actuellement très vulnérables dans la région de Kikwit. Par ailleurs, la déforestation altère les microclimats locaux, contribue aux changements climatiques et interrompent le cycle de vie des ressources alimentaires. [23] souligne qu'en RDC, la plupart de PFNL sont exploités quotidiennement d'une manière intensive par les populations riveraines à qui ils procurent des revenus. Pourtant un intense prélèvement de PFNL comme l'ont observé [24] [22], pourrait influencer sur la disponibilité et la régénération de certaines espèces de PFNL.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette étude identifie, inventorie et caractérise les ressources phytogénétiques sauvages des champignons consommés par les citadins de la ville de Kikwit et de son hinterland pour autant que seule la nature est presque la seule source d'approvisionnement de ces communautés en vivres frais. Des observations directes, des visites, enquêtes et interview menées dans la zone périphérique de la ville de Kikwit en Province du Kwilu ont permis de récolter les données utiles et échanger d'idées avec les acteurs. Les résultats obtenus ont révélé une grande diversité de ces ressources génétiques pour l'alimentation, car, en effet, 74 taxons des champignons entrent couramment dans l'alimentation des communautés limitrophes et de la ville de Kikwit. L'analyse systématique des champignons révèle une diversité spécifique de l'ordre de 61 %, parmi les quels prédominent les espèces des genres *Marasmius*, *Termitomyces*, *Cantharellus*, *Lentinus* et *Auricularia*. Au total 40 espèces des champignons sont relativement appréciées par les consommateurs, les plus délicieux étant les *Termitomyces spp.*, *Cokeina spp.*, *Clitocybe spp.*, *Marasmius buzungolo* Singer, *Marasmiellus inoderma* (Berk.) Singer, *Volvariella volvacea* (Bull.) Singer et les espèces des *Polyporaceae*. La récolte de ces champignons est saisonnière dont la phénologie devra être étudiée et clarifiée afin de disposer des données utiles pouvant servir à d'éventuelles domestications. Du point de vue écologique, les champignons croissent dans des habitats hygrophiles, c'est-à-dire les sous-bois forestier, se développant sur les troncs d'arbres en décomposition ou sur la litière et le sol. Du point de vue nutritionnel, les champignons sont pratiquement les sources en protéines pour les consommateurs. Des études d'analyse de composition chimique des champignons de la région étudiée sont à envisager afin de préciser d'avantage leur importance dans le régime alimentaire des populations qui les consomment. Ainsi, on pourrait alors disposer les bases pouvant servir à des alternatives pour la sécurité alimentaire de ces communautés de la région de Kikwit. Les suggestions découlant de cette étude sont les suivantes :

***A l'Etat Congolais :**

- Sensibiliser et éduquer la population tant des villages riverains que de la ville à une gestion participative pour les produits forestiers non ligneux ;
- Mener des projets de reboisement à base des plantes utiles dans la mesure du possible afin d'assurer la pérennisation de la forêt.

***Aux communautés locales :**

- Préserver des petits massifs forestiers comme des semenciers et habitats des champignons ;
- Mettre en défense les formations herbeuses afin d'élargir la tendance naturelle de la régénération forestière de ce type de végétation ; les écotones paraissent particulièrement bien indiquer à cet objectif.

REFERENCES

- [1] Hladik, CM., A. Hladik, H. Pagezy, O.F Linares, J.A.G. Koppert, et A. Froment, eds. (1996a). L'Alimentation en Forêt Tropicale. Interactions bioculturelles et perspectives de développement. Vol. 1. Les ressources alimentaires : production et consommation. Ed. UNESCO, Paris. 641 p.
- [2] Biloso Moyene A. (2010). Le savoir-faire local dans la valorisation alimentaire de la fougère (*Pteridium centrali-africanum*) à Kinshasa (RD Congo). In: X. van der Burgt, J. van der Maesen & J.-M. Onana (eds), Systématique et Conservation des Plantes Africaines, pp. 333–339. Royal Botanic Gardens, Kew.
- [3] Müller Eva (2011). Les forêts au service de la nutrition et de la sécurité alimentaire. FAO. Rome. 12p.

- [4] Nicolai, H. (1963). Le Kwilu. Etude géographique d'une région congolaise. Ed. CEMUBAC. Bruxelles. 472 p.
- [5] Beauchamp A. (1993). Introduction à l'éthique de l'environnement. Editions Paulines Montréal. 222 p.
- [6] Boa, E.R. (2006). Champignons comestibles sauvages: vue d'ensemble sur leur utilisation et leur importance pour les populations. Produits forestiers non ligneux 17. FAO, Rome. 157 p.
- [7] Fehr, S. (1990). Climatologie de Kikwit, une ville de la région de Bandundu Central au Zaïre. 68 p.
- [8] Masens, 1997) Masens, D.M.Y.B. (1997). Etude phytosociologique de la région de Kikwit (Bdd, RDC). Thèse de doctorat. Bruxelles. ULB. 398 p.
- [9] Djelloul Radia (2014). Cartographie des champignons au niveau du Parc National d'El Kala (Nord Est Algérien). Thèse. Univ. Badji Mokhtar- Annaba. Biologie végétale. Algérie. 260 p.
- [10] Ndolo Ebika, S.T. (2014). Rapport de stage sur les techniques d'identification des champignons au jardin botanique national de Belgique, 16 Septembre – 1 Octobre 2013. Méise, Belgique. Initiative des Champignons et des Plantes du Congo.
- [11] Karun N.C., K.R. Sridhar (2013). Occurrence and distribution of *Termitomyces* (*Basidiomycota*, *Agaricales*) in the Western Ghats and on the west coast of India. – Czech Mycol. 65(2): 233–254.)
- [12] Bâ A., R. Duponnois, Diabaté M., B. Dreyfus (2011). Les champignons ectomycorhiziens des arbres forestiers en Afrique de l'Ouest. Méthodes d'étude, diversité, écologie, utilisation en foresterie et comestibilité. IRD Éditions. Marseille. 268 p.
- [13] Eyi Ndong G.H., J. Degreef & A. de Kesel (2011). Champignons comestibles de forêts denses d'Afrique centrale. Taxonomie et Identification. Abctaxa vol. 10. 262 p.
- [14] Eyi Ndong H.C. (2009). Etude des champignons de la forêt dense humide consommés par les populations du nord du Gabon. ULB.
- [15] Dibaluka, M.S. (2012). Etude des macromycètes de la cité de Kimvula et de ses environs (Bas-Congo/RD Congo) : Diversité et productivité en forêt claire, ethnomycologie et mise en culture d'espèces saprotrophes comestibles. Tome 1. UNIKIN. Thèse. 317 p.
- [16] Martin F., (2014). Tous les champignons portent-ils un chapeau ? 90 clés pour comprendre les champignons. Ed. Quae. Paris 184pp.
- [17] Makumbelo, E., L., F. Lukoki, J. Paulus & N., Luyindula (2007). Stratégie de valorisation des espèces ressources en produits non ligneux de la savane des environs de Kinshasa. L'enquête ethnobotanique, Tropicultura, 25 (1) 51-55.
- [18] Gévry, M.-F. (2010). Évaluation du potentiel en champignons forestiers comestibles dans la Forêt modèle du Lac Saint-Jean. Forêt modèle du Lac-Saint-Jean, Mashteuiatsh, Québec, 51 pages + annexes.
- [19] Thoen, D., G. Parent & T. Lukengo (1973). L'usage des champignons dans le Haut-Shaba. Bull. trimestriel du CEPSE "Problèmes Sociaux Zaïrois". 100-101: 69 - 85. 153.
- [20] De Kesel, A., J.T.C. Codjia & S.N. Yorou (2002). Guide des champignons comestibles du Bénin. Cotonou, République du Bénin, Jardin Botanique National de Belgique et Centre International Eco développement Intégré (CECODI. Impr. Coco-Multimedia: 275 p.
- [21] Lubini, A. (1994). Utilisation des plantes par les Yansi de l'entre Kwilu-Kasaï (Zaïre). In *Proc. XIIIème Plenary Meeting AETFAT*, Malawi, 1, 53-74.
- [22] Toirambe, B. (2007). Analyse de l'état des lieux du secteur des produits forestiers non ligneux et évaluation de leur contribution à la sécurité alimentaire en République Démocratique du Congo. GCP/RAF/398/GER : rapport de consultation. 76 p.
- [23] Degrande, A., Schreckenberger, K., Mbosso, C., Anegbeh, P., Okafor, V. and Kanmegne, J. (2006). Farmers' fruit tree-growing strategies in the humid forest zone of Cameroon and Nigeria. *Agroforestry Systems* 67: 159-175.

ANNEXE

Tableau 1. Les champignons consommés dans la région de Kikwit

Légende : **Substrat :** BM : bois mort; DV : débris végétaux; Ec : écorce; PM : palmier ; TR : terre ; TRM : termitière ; **Habitat :** EA : espace agricole ; F : forêt, FH : formation herbeuse ; P(A) : polyvalent ou autres. **Phénologie :** J : janvier, F : février, Ms : mars, Av : avril, M : mai, J : juin, Jt : juillet, At : août, S : septembre, O : octobre, N : novembre, D : décembre ;SP : saison pluvieuse ; APL : apparition de la lune ; **Abondance :** 1 : très rare ; 2 : rare ; 3 : moins abondante ; 4 : abondante ; **Préférence :** 1 : moins bonne ; 2 : bonne ; 3 : très bonne ; 4 : délicieuse. **Langue :** Kk : kikongo ; Km : kimbalala

Taxons recensés	Noms vernaculaires	Substrats	Habitat	Phénologie	Abondance	Préférence
I. Amanitaceae						
1. <i>Armillaria heimii</i> Pegler	Kinzabi (Kk)	BM	F	APL	4	2
2. <i>Armillaria</i> sp.	Kangonjingonji (Km)	BM	F	APL	4	2
II. Auriculariaceae						
3. <i>Auricularia cornea</i> Ehrenb.	Kikubula (Kk)	BM	F	SP	4	2
4. <i>Auricularia delicata</i> (Mont. Ex Fr.) Henn	Kilebu ya makalu (Kk)	BM	F	SP	4	2
5. <i>Auricularia</i> sp.1	Kilebu ya zela (Kk)	BM	EA	SP	4	2
6. <i>Auricularia</i> sp.2	Kilebu ya kikula (Kk)	BM	EA	SP	4	2
III. Cantharellaceae						
7. <i>Cantharellus</i> aff. <i>brunneus</i> (Cleland) Eyselsh	Kayifobu ya ndombe (Kk)	TR	F	SP	2	2
8. <i>Cantharellus congolensis</i> Beeli	Kayifobu ya jaune claire (Kk)	BM	F	SP	2	2
9. <i>Cantharellus</i> aff. <i>isabellinus</i> Heinem	Tiondji (Kk)	DV	F	SONAv	3	2
10. <i>Cantharellus</i> sp. 1	Kakosukosu (Kk)	PM	EA	SP	3	3
11. <i>Cantharellus</i> sp. 2	Kamashimashi (Km)	TR	F	SP	3	3
12. <i>Cantharellus</i> sp. 3	Kamwambamwamba (Km)	BM	P(A)	SP	3	2
13. <i>Cantharellus</i> sp. 4	Kayifobu ya mpembe (Kk)	TR	F	SP	2	2
14. <i>Cantharellus</i> sp. 5	Meno ya kupola (Kk)	DV	F	SP	3	1
15. <i>Cantharellus</i> sp. 6	Busengi (Kk)	BM	F	SP	3	4
IV. Clavariaceae						
16. <i>Clavulina cristata</i> (Fr.) Schroet	Kanvinvi ya ntoto (Km)	TR	F	JF	3	4
V. Coprinaceae						
17. <i>Coprinus</i> aff. <i>albidofloccococcus</i>	Kamwengimwengi (Kk, Km)	PM	EA	PP	3	3
18. <i>Coprinus</i> sp.	Bungidingoma (Km)	PM	EA	SP	4	4
VI. Entolomataceae						
19. <i>Entoloma</i> sp.	Kabokuboku (Km)	PM	EA	Av	4	3
VII. Lepiotaceae						
20. <i>Macrolepiota africana</i> (Heim) & Heinem	Muhondu ya mbuluku (Kk)	TR	F	SP	2	2
21. <i>Macrolepiota</i> aff. <i>procera</i> Scop.	Muhondu ya ngwadi (Kk)	TR	F	SP	2	2
22. <i>Lepiota</i> sp. 1	Bupemba (Kk)	BM	F	SP	2	4
23. <i>Lepiota</i> sp. 2	Kafubafuba (Km)	TR	F	SP	4	2
VIII. Lyophyllaceae						
24. <i>Termitomyces aurantiacus</i> (R. Heim) R. Heim	Buniengeni (Kk)	TRM	FH	SON	3	4

25. <i>Termitomyces bibasidiatus</i> Mossebo	Bumbamba (Kk)	TRM	P(A)	DJ	2	4
26. <i>Termitomyces clypeatus</i> R. Heim	Busunda (Kk)	TRM	F	JF	3	4
27. <i>Termitomyces mammiformis</i> R. Heim	Bunzenzu (Kk)	TRM	FH	SON	3	4
28. <i>Termitomyces microcarpus</i> (Berk & Broome) R. Heim	Kasangusangu ya kisela (maki ve) (Kk)	TRM	FH	SNDJ	4	4
29. <i>Termitomyces robustus</i> (Beeli) R. Heim	Nkaka ya busunda (Kk)	TRM	F	SP	1	4
30. <i>Termitomyces striatus</i> (Beeli) R. Heim	Bupalanga (Kk)	TRM	P(A)	SON	3	4
31. <i>Termitomyces sp.1</i>	Kanjinjimilonga (Km)	TRM	P(A)	SOND	4	4
32. <i>Termitomyces sp. 2</i>	Kasangusangu ya mfinda nionso (Kk)	TRM	P(A)	SONDJ	4	4
IX. Marasmiaceae						
33. <i>Collybia sp. ou Oudemansiella sp.</i>	Kamabamaba (Kk)	DV	F	AvN	3	1
34. <i>Flavolaschia sp.</i>	Dikedi ya mungwa (Kk)	BM	F	SP	3	2
35. <i>Hemycena sp. 1</i>	Bufulafula (Kk)	A (PM-LN)	EA	SP	2	2
36. <i>Hemycena sp. 2</i>	Nsudi ya babakala (Kk)	DV	F	SP	2	1
37. <i>Marasmiellus inoderma</i> (Berk.) Singer	Kawusuwusu (Kk)	PM	EA	SP	2	4
38. <i>Marasmius arborescens</i> (Henn.) Belli	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
39. <i>Marasmius bekolacongoli</i> (Belli) Singer	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
40. <i>Marasmius brunneolus</i> (Berk & Broome) Pegler	Kanzangalala (Kk)	Ec	F	AvN	2	2
41. <i>Marasmius buzungolo</i> Singer	Kubu (Kk)	DV	F	AvSN	4	4
42. <i>Marasmius haematocephalus</i> (Mont) Fr.	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
43. <i>Marasmius luteostipitatus</i> Mossebo & Antonin	Kasendamangumba (Kk)	DV	F	AvN	2	2
44. <i>Marasmius staudtii v. staudtii</i> Heim	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
45. <i>Marasmius sp. 1</i>	Busunda ya nti (Kk)	PA(PM-LN)	EA	SP	2	3
46. <i>Marasmius sp. 2 (de couleur rose)</i>	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
47. <i>Marasmius sp. 3 (de couleur blanc-gris)</i>	Kanzangalala (Kk)	DV	F	AvN	2	2
48. <i>Marasmius sp. 4 (très petit, jaune-orange)</i>	Kasasa (Kk)	BM	F	AvN	4	2
49. <i>Marasmius sp. 5</i>	Kateyateya (Kk)	BM	F	SP	2	3
50. <i>Marasmius sp. 6 (blanc-gris)</i>	Kawusuwusu (Kk)	Ec	F	SP	2	3
51. <i>Marasmius sp. 7</i>	Kigidakubu (Kk)	DV	F	SP	2	3
52. <i>Mycena sp. 8</i>	Busamba (Kk)	PM	EA	SP	4	4
X. Pleurotaceae						
53. <i>Pleurotus tuberregium</i> (Rumph. Ex Fr.) Singer	Donji (Kk)	BM	F	A	2	2
XI. Pluteaceae						
54. <i>Volvariella volvacea</i> (Bull.) Singer	Bupu (Km)	PM	P (A)	SP	2	4
XII. Polyporaceae						
55. <i>Echinochaete brachypora</i> Mont.	Ludimi ya mbwa (Kk)	BM	F	SP	3	4
56. <i>Echinochaete sp.</i>	Kibidibidi (Km)	BM	F	SP	2	1

57. <i>Lentinus crinitus</i> (L: Fr.) Fr.	Kanvinvi ya nti (Km)	BM	EA	SP	3	1
58. <i>Lentinus sajor-caju</i> (Fr.) Fr.	Buzu (Kk)	BM	EA	APL	3	4
59. <i>Lentinus sp.</i>	Bungiengi (Kk)	PM	EA	SP	3	4
60. <i>Lentinus squarrosulus</i> Mont.	Bupécheur (Kk)	BM	F	APL	3	4
61. <i>Polyporus tenuiculus</i> (P. Beauv.) Fr.	Kikawukawu (Kk)	BM	F	APL	3	4
XIII. Sarcoscyphaceae						
62. <i>Cookeina aff. speciosa</i> (Fr.) Dennis	Makopamakopa ya mpebe (Kk)	BM	F	ND	3	4
63. <i>Cookeina sulcipes</i> (Berk.) Kuntze	Makopamakopa ya blanc rose (Kk)	BM	F	ND	3	4
64. <i>Cookeina sp.</i>	Makopamakopa noir (Kk)	BM	F	ND	3	4
XIV. Schizophyllaceae						
65. <i>Schizophyllum commune</i> Fr.	Bukolokoto (Kk)	BM	EA	SP	4	4
XV. Strophariaceae						
66. <i>Gymnopilus junionus</i> (Fr: Fr.) Orton	Bombi (Km)	P (BM-PM)	EA	SP	1	1
XVI. Tricholomataceae						
67. <i>Clitocybe sp. 1</i>	Kagondugondu (Km)	TR	EA	ND	3	4
68. <i>Clitocybe sp.2</i>	Kibalagisogu (Km)	TR	EA	SP	3	2
XVII. Espèces indéterminées						
69. X1	Bungayi (Km)	DV	EA	NDAvM	3	3
70. X2	Dikasu (Kk)	BM	F	SP	1	1
71. X3	Kamwishingonji (Km)	BM	F	APL	4	4
72. X4	Lenjilenji (Kk)	BM	F	SP	3	1
73. X5	Malaxeur (Kk)	DV	EA	SP	3	3
74. X6	Nduki ya mwana (Kk)	BM	F	SP	2	1

Bases logiques de l'incomplétude

A.-Roger LULA BABOLE¹⁻², Alain MUSESA LANDA³, and Oscar LUNGIAMBUDILA MAMONA³

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

³Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The study presents systematically the formals and theoretical foundations of incompleteness theorem: framework, hypothesis, rules of provability. The recursive functions constitute the operational foundations in the development, the construction and the prove of this theorem. The preparatory theorems and the sense theorem are the socle which establishes the incompleteness.

KEYWORDS: sense theorem, recursive functions, expansivity, recessivity, diagonal argument.

RESUME: L'étude présente systématiquement et méthodiquement les fondements théoriques et formels du théorème d'incomplétude : cadre, hypothèses, règles de prouvabilité. Les fonctions récursives constituent et servent de soubassements opératoires dans le développement, la construction et la preuve dudit théorème. Les théorèmes préparatoires et le théorème du sens sont les socles établissant l'incomplétude.

MOTS-CLEFS: théorème, du sens, fonctions récursives, expansivité, récessivité, argument diagonal.

1 LE SYSTÈME FORMEL DE GÖDEL (SFG)

GÖDEL a eu à prouver ses célèbres résultats sur l'incomplétude en se fondant sur une extension P du système des *Principia Mathematica* auquel on a ajouté les axiomes de l'arithmétique de PEANO. Il est question ici de traduire des énoncés du métalangage de l'arithmétique de PEANO dans le langage objet de l'arithmétique. En effet, on note que les objets du langage sont des nombres, ceux du métalangage sont des assertions sur les nombres.

Les symboles ou signes primitifs de SFG sont composés de :

- (1) de constantes primitives $\ll \neg \gg$, (non), $\ll \vee \gg$ (ou), $(\forall)$ (pour tout), $\ll 0 \gg$ (zéro), $\ll ' \gg$ (fonction successeur, $\ll (\gg$ et $\ll) \gg$ (parathèses), et
- (2) de variables pour tous les types, $x_1, y_1, z_1, \dots$ pour le premier type, x_2, y_2, z_2 pour le deuxième, x_3, y_3, z_3 pour le troisième... x_n, y_n, z_n pour le $n^{\text{ième}}$ type.

Les termes de premier type sont tous les termes a, a', a'', a''' , où a est soit 0, soit une variable de type 1, ou variable d'entier. Les termes de deuxième type sont tous les termes b, b', b'', b''' , ... où b est une variable de type 2 ou variable d'ensemble d'entiers. Les termes de troisième type sont tous les termes c, c', c'', c''' , ... où c est une variable de type 3 ou variable d'ensemble d'entiers¹.

Une expression ayant la forme $a(b)$, où b est un terme de type n et a , un terme de type $n+1$, est une formule simple ou élémentaire. On définit l'ensemble des formules par le plus petit ensemble X satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) X contient toutes les formules simples et
- (2) si $a, b \in X$ et x , une variable quelconque, alors $\neg a$, $(a \vee b)$ et $\forall x a$ sont des formules appartenant à X .

Si n est le nombre de variables libres de a , alors a est dit une formule close si $n = 0$ et que a est une relation si $n > 0$ et pour $n = 1$, on est en présence d'un signe de classe ou prédicat.

Soient $\mathcal{F}$, un ensemble des formules prouvables et f , une formule. On dit que f est prouvable si :

$\exists (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}^n$ tel que :

- $f_n = f$
- $\forall i \leq n$, on a f_i est un axiome ou une conséquence immédiate d'un ou de plusieurs f_j ($j < i$)

Les axiomes donnés par GÖDEL, dans le cadre de sa métamathématique, reprennent les axiomes de PEANO, les axiomes de la logique d'où on déduit toutes les tautologies, les axiomes sur le quantificateur universel et les axiomes de compréhension, ainsi que les axiomes d'extensionnalité.

2 AXIOMES DE SFG

GÖDEL a formulé les axiomes de SFG sous forme des schémas. Ceux-ci utilisent les constantes du système, les opérateurs propositionnels et des variables syntaxiques.

Les axiomes de SFG ainsi formulés sont toutes les propositions obtenues à partir des schémas suivants en remplaçant les variables syntaxiques qui y figurent par des expressions correspondantes de SFG.

I. Toutes les formules résultant d'un des schémas suivants sont des axiomes (Schémas correspondant aux axiomes de PEANO) :

$$1. \quad \neg x'_1 = 0$$

Zéro n'est successeur d'aucun entier.

$$2. \quad x'_1 = x'_2 \rightarrow x_1 = x_2$$

Si les successeurs de deux nombres entiers sont égaux, ces nombres sont égaux.

$$3. \quad (y_1(0) \wedge \forall x_1 y_1(x_1) \rightarrow y_1(x'_1)) \rightarrow \forall_{x_1} y_1(x_1)$$

Schéma d'induction, si une partie A de $\mathbb{N}$ contient 0 et est stable par s , alors A est égale à $\mathbb{N}$, l'application s est donc injective.

II. Toutes les formules résultant des schémas suivants où p, q et r des formules sont des axiomes²:

$$1. \quad (p \vee p) \rightarrow p$$

$$2. \quad p \rightarrow (p \vee q)$$

¹La théorie des types de RUSSELL : dans la théorie des types, il est attribué à chaque variable un domaine de signification, son type logique ; ces types sont numérotés à partir de 1, et une proposition n'est signifiante que si et seulement si le type logique de chacun de ses termes est strictement inférieur à ceux des termes auxquels ce terme s'applique. La notion de prédicat qui s'applique à lui-même est ainsi déclarée non signifiante.

²Pour ce qui regarde les axiomes 1-4 pour les propositions, il a été montré par P. BERNAYS qu'aucun d'entr'eux n'est conséquence des trois autres. Cfr. P. BERNAYS, "Axiomatische Untersuchung" des Aussagenkalküls der P.M., Math. Zeitschrift, 25, 1926.

3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$

III. Toutes les formules résultant d'un des schémas suivants sont des axiomes :

1. $\forall_x a \rightarrow sub(a, x, c)$
2. $\forall_x (b \vee a) \rightarrow b \vee \forall_x a$

Où x est une variable quelconque, b est une formule ne contenant pas x comme variable libre et c est une relation métathéorique.

IV. Les formules résultant des schémas suivants sont des axiomes :

1. $\exists y (\forall x (y(x) \equiv a))$

Où a est une formule sans occurrences libres de y et ne contient pas x comme variable libre. Cet axiome est dit axiome de compréhension³. Ce schéma correspond à l'axiome de réductibilité de RUSSELL et WHITEHEAD et à l'axiome de sélection⁴ de la théorie des ensembles.

2. $\forall x_1 (y_1(x_1) \leftrightarrow y_2(x_1)) \rightarrow y_1 = y_2$

C'est l'axiome d'extensionnalité⁵. Deux prédicats, qui se vérifient des mêmes objets, permettent d'être considérés comme identiques. En somme, ce schéma indique qu'une classe est entièrement caractérisée par ses éléments.

La prouvabilité des expressions ou formules dans le système SFG et le système étendu repose sur les règles inférentielles que sont le modus ponens et la généralisation. Ainsi, une formule c est une conséquence immédiate des formules a et b , si a est la formule $(b \rightarrow c)$ ou si a est $\forall x a$ où x est une variable quelconque. De même que l'ensemble des formules prouvables est formé d'un plus petit ensemble X tel que :

- Les axiomes de cet ensemble sont dans X
- Si $a, b \in X$, alors les conséquences immédiates de a et b sont dans X .

³Le schéma d'axiomes de compréhension dit que tous les éléments d'un ensemble a satisfaisant une formule du premier ordre à une variable libre, avec paramètres si possible, forment un ensemble. Soit un énoncé $A(x, x_1, \dots, x_k)$ sans paramètres et a au moins une variable libre x . On obtient : $\forall x_1, \dots, x_k \forall x \exists z \forall y \dots (y \in z) \leftrightarrow (y \in a \text{ et } A(x, x_1, \dots, x_k))$

Il s'avère que cet énoncé découle du schéma de substitution appliqué à la relation $x = y$ et $A(x, x_1, \dots, x_k)$

⁴L'axiome de sélection peut être formulé comme suit :

Si un prédicat R est défini pour tous les éléments d'un ensemble E_n , il existe un sous – ensemble de E_n qui contient tous les éléments de E_n possédant la propriété R et ceux – là seulement.

Suivant ce schéma, si la proposition a contient la variable libre x , on peut la considérer comme si elle applique un prédicat R à l'objet. On peut dire que le prédicat définit un certain ensemble.

Alors l'équivalence établie par ce schéma montre clairement l'existence de l'ensemble qui contient tous les objets auxquels s'applique le prédicat R (et ceux – là seulement).

L'axiome de sélection peut être formulé autrement :

$\forall x \forall y \forall z \dots \forall m \exists n \forall x [(x \in n)(x \in m) \exists (x, y, z \dots) + (x \notin n)(x \notin m) + \neg \exists (x, y, z \dots)]$

Cette formule n'est pas du premier ordre car le premier quantificateur $\forall E$ pour sur les fonctions propositionnelles, ce qui revient à dire qu'une fonction propositionnelle arbitraire peut être substitué à $\exists$. Par sa formulation, l'axiome de sélection exige que toutes les fonctions propositionnelles particulières obtenues en mettant de manière successive absolument au lieu de $\exists$ toutes les fonctions propositionnelles disponibles, puissent être à la fois réalisées.

Si l'on a par exemple une fonction $\exists (x, y)$, l'instance particulière correspondante de l'axiome de sélection sera :

$\forall y \forall m \exists n \forall x \dots ((x \in n)(x \in m) \exists (x, y) + (x \notin n)(x \notin m) + \neg \exists (x, y))$,

qui est une proposition du premier ordre si $\exists$ est une fonction proposition du premier ordre. Cfr. Jean LARGEULT, *OpLogique mathématique*, Textes, Paris : Armand Colin, 1972.

⁵ L'axiome d'extensionnalité de ZERMELO sera plus tard remplacé par l'axiome d'extensionnalité de FRAENKEL. Dans sa formulation actuelle, cet axiome qui est généralement attribué à FRAENKEL, apparaît pour la première fois dans SKOLEM (1926). On pense que deux ensembles sont égaux si et seulement si, ils ont les mêmes éléments. En théorie des ensembles, cet énoncé s'écrit comme suit :

$\forall x \forall y (\forall z (z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \rightarrow x = y$.

3 HYPOTHÈSE POSÉE AU SFG

Nous supposons que SFG soit ω – cohérent. Cela signifie qu'un système formel est ω - consistant si et seulement si il ne contient aucune formule $A(x)$ de telle manière que toutes les formules $A(1), A(2), \dots$, soient prouvables et la formule $\neg(\forall x) A(x)$ le soit également.

Donc, ce système ne contient aucune *expression du second type*⁶ telle que, à la fois ;

1) Toutes les propositions

$y_1(x_1)$ sont prouvables dans SFG

2) La proposition

$\neg \forall x_1 y_1(x_1)$ est aussi prouvable dans SFG

Et il ne contient aucune *expression prédicative*⁷ à un argument ax telle que, à la fois.

1) Toutes les propositions fermées du type

Ce qui revient à dire que toutes les propositions obtenues en remplaçant dans ax , la variable x par un chiffre quelconque sont, prouvables dans SFG.

2) La proposition fermée⁸

$\neg ax_1$ est ainsi prouvable dans SFG

Puisque SFG est ω – cohérent, il est également cohérent⁹

Admettons que cohérence vaut existence, ce qui revient à la considérer valablement dans le monde algébrique, qui est un monde d'équations. Ce monde récessif est cher à HILBERT. La cohérence des systèmes fautifs, par exemple $SFG + \neg \text{Coh}(SFG)$ pose de sérieux problèmes quand SFG est une théorie cohérente. Plus précisément, il s'agit de problèmes liés à l'observance de la loi et non pas de son esprit. Il résulte que la cohérence est une forme primaire de la rectitude formelle.

A cela s'ajoute la notion de Σ_n^0 - (ou Π_{n-1}^0) *fidélité*.

Cela signifie que tout théorème clos de la classe en question est vrai. D'où, il y a lieu d'affirmer ce qui suit :

i) La Π_1^0 - fidélité est en effet la cohérence.

ii) La Σ_1^0 fidélité équivaut donc à la Π_{n+1}^0 - fidélité, ce qui signifie en particulier que la 0-cohérence est effectivement la cohérence tout court. Il s'ensuit que la $n+1$ -cohérence est strictement plus forte que la n -cohérence et cela s'est confirmé pour $n = 0$ et le résultat peut alors se généraliser.

Mais il est à remarquer que la 1- cohérence de SFG entraîne la cohérence de SFG et la réciproque est fausse¹⁰.

⁶ Une *expression fonctionnelle* est une expression qui peut représenter une fonction, ici, l'expression du deuxième type comprend, $y_1, y_2, y_3 \dots$

⁷ Une *expression prédicative* est une expression qui peut servir à représenter un prédicat.

⁸ Une *proposition fermée* est une proposition ne contenant pas de variables libres. Il y a des cas où une proposition quelconque peut devenir une proposition fermée quand on la lie par des quantificateurs toutes les variables libres qui y sont contenues. Une proposition non fermée est dite ouverte. Signalons que la catégorie des propositions contient à la fois les propositions ouvertes et les propositions fermées.

⁹ Il est à remarquer que la condition ω – cohérent est moins générale que la condition être cohérent.

¹⁰ A. MIQUEL, dans son article « les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL » a construit artificiellement des théories cohérentes et même récursives qui ne satisfont pas la propriété 1-cohérence.

4 RÈGLES DE PROUVABILITÉ DE SFG

1. Règle de la conséquence

A

$A \rightarrow B$.

•

• •B

Si A et $(A \rightarrow B)$ sont des assumptions, il y a lieu de dériver B

2. Règle pour le quantificateur universel : $\forall x$

A .

•

• $\forall A$

Suivant ce schéma, si A est une assumption contenant la variable x^{11} , il y a lieu de dériver la proposition $\forall A$

3. Règle pour le quantificateur existentiel $\exists x$

$A \rightarrow B$
 $\exists(x)(A \rightarrow B)$

Ce schéma nous enseigne que si A est une assumption contenant la variable x et que ce schéma ne peut être appliqué que si la proposition ne contient pas x et si cette variable n'est pas liée dans A.

Ces trois règles définissent la relation de *conséquence immédiate* dans SFG.

5 REPRÉSENTATION DES PROPRIÉTÉS MÉTATHÉORIQUES DANS SFG

Partant de l'arithmétisation, GÖDEL traduit au moyen de l'arithmétique récursive un certain nombre d'énoncés métathéoriques.

Pour établir l'existence des propositions indécidables dans SFG, il y a lieu de montrer qu'il est possible de représenter dans SFG certaines propriétés métathéoriques.

A cet effet, GÖDEL se sert de la théorie des fonctions récursives et il montre :

- 1) d'une part que les propriétés et opérations métathéoriques employées sont *récursivement représentables*.
- 2) d'autre part que tout prédicat récursif est *représentable* dans SFG.

6 LES FONCTIONS RÉCURSIVES ET REPRÉSENTATION

Le terme de récursivité désigne le concept mathématique précis qui correspond à l'idée intuitive d'effectivité ou de calculabilité. Pour GÖDEL, cette notion est la formalisation à donner à l'exigence d'effectivité dans l'arithmétique

¹¹Pour marquer cette distinction, RUSSELL et WHITEHEAD actualisent de nouveau la distinction établie par PEANO entre variable réelle et variable apparente. Ainsi, est dite variable réelle, toute variable déterminant la valeur de la fonction. Cela concerne toutes les variables qui figurent dans des fonctions qui ne sont pas quantifiées. Mais, dans le cas où elle est liée par la quantification universelle, la variable devient apparente, puisqu'en ce moment elle ne caractérise plus la valeur de la fonction, l'assertion n'étant plus fonction de x, mais elle est fonction de la fonction elle-même, c'est-à-dire elle est donc universellement quantifiée, et la variable perd son pouvoir discriminant. Pourtant, il convient de préciser que ce caractère apparent de la variable tombe sous la portée d'une quantification indiquant totalement la maîtrise ayant trait à l'ambiguïté de la variable. En effet ce caractère de généralité n'est pas modifié par l'idée de quantification existentielle. La raison est que le choix « d'au moins une » s'étend aussi sur le domaine complet des valeurs à telle enseigne qu'il faut souligner que $(\exists x)(\emptyset x)$ soit une proposition générale, dans laquelle la variable n'est qu'apparente.

contextuelle. Donc, les constructions métathéoriques doivent être récursives. Alors que le concept de fonction récursive formalise la notion d'effectivité, celui d'ensemble récursivement énumérable formalise une autre notion : celle d'ensemble engendré par un procédé systématique à partir des données initiales [1].

6.1 DÉFINITIONS

On dira qu'une fonction arithmétique $\emptyset(x_1, \dots, x_n)$ est récursivement définie en fonction des fonctions $\mu(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ et $\psi(x_1, \dots, x_{n+1})$, si $\forall (k, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned}\emptyset(0, x_2, \dots, x_n) &= \mu(x_2, \dots, x_n) \\ \emptyset(k+1, x_2, \dots, x_n) &= \psi(k, \emptyset(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Une fonction arithmétique est récursive s'il existe une suite finie des fonctions arithmétiques vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $(x_1, \dots, x_n) = \emptyset$
- (2) $\forall i: \emptyset_i$ est
 - a) Une fonction constante ou
 - b) Une fonction successeur
 - c) Une fonction récursivement définie en fonction de deux fonctions arithmétiques précédentes ou
 - d) Une fonction obtenue d'une fonction précédente par substitution d'une des fonctions à une variable de l'autre fonction.

Il est à noter que le degré d'une fonction récursive $\emptyset(x_1, \dots, x_n)$ est la taille minimale d'une telle suite. Il est une sorte de fonction caractéristique de la relation récursive.

Un prédicat $R(x_1, \dots, x_n)$ est dit récursif, s'il existe une fonction récursive $\emptyset(x_1, \dots, x_n)$ telle que $R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \emptyset(x_1, \dots, x_n) = 0$

7 THÉORÈMES PRÉPARATOIRES

On établit les fonctions et les prédicats récursifs par l'application de quelques procédés et définitions moyennant les opérateurs logiques les quantificateurs et la fonction minimum [6].

- I. Toute fonction (ou prédicat) obtenue, à partir d'une fonction (ou prédicat) récursive, par substitution d'une variable ou par une fonction récursive, est récursive.

Illustrons cela par des exemples :

1. $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1 \wedge x_2)$
2. $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_2) + x_1 \wedge (x_3 + 2) + 7$

- II. Si R et S sont des prédicats récursifs, alors $\neg R$ et $(R \vee S)$ sont des prédicats récursifs. Il en résulte que si ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions récursives, la fonction suivante l'est également :

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \psi_1(x_1, \dots, x_n) \text{ si } R \\ &\psi_2(x_2, \dots, x_n) \text{ sinon}\end{aligned}$$

Preuve

Première partie

Soit c_k représentant toutes les fonctions constantes égales à k , pour tout nombre des variables et soient α, β les indicatrices respectives des ensembles ci-dessous :

$$\{0\}, \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

On dit que les indicatrices α et β sont récursives. Cela signifie donc que :

1. $\alpha(0) = C_1()$
2. $\alpha(k + 1) = C_0(k)$
3. $\beta(0, x) = C_0(x)$
4. $\beta(k + 1, x) = \alpha(x)$

D'où, on déduit les prédicats $\neg R$ et $R \vee S$ à partir des prédicats R, S et des fonctions Ψ_1 et Ψ_2 .

Deuxième partie

La fonction recherchée est égale à $(\alpha \circ \Psi) \wedge \Psi_1 + (\alpha \circ \alpha \circ \Psi) \wedge \Psi_2$ où Ψ est une fonction arithmétique telle que :

$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n) = 0$ et cela pour tout entier naturel.

III. Si les fonctions $\emptyset(x)$ et $\psi_1(y)$ sont récursives alors le prédicat $\emptyset(x) = \psi_1(y)$ est récursif.

Preuve

Soit γ la fonction indicatrice de $\{(x, y)/x \neq y\}$.

1. D'abord, on construit une fonction $x \rightarrow x - 1$ appelée x_{-1} telle que

$$\begin{aligned} x_{-1}(0) &= 0 \\ x_{-1}(k + 1) &= k \end{aligned}$$

Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned} x_{-1}(0) &= C_0() \text{ et} \\ x_{-1}(k + 1) &= Id(k) \end{aligned}$$

2. Ensuite, on établit que

$\gamma(0, x) = \alpha(\alpha(x))$, sachant que $(\alpha \circ \alpha)$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \gamma(k + 1, x) &= C_1(x), \text{ si } Id(x) = 0 \\ &= \gamma(k, x_1(x)) \text{ sinon} \end{aligned}$$

3. Finalement, on exhibe en effet que

$$\phi(x) = \Psi_1(y) \leftrightarrow \gamma(x, y) = 0$$

IV. Si la fonction $\emptyset(x)$ et le prédicat $R(y)$ sont récursifs alors les prédicats S, T et la fonction $\psi(x, y)$ ci-dessous définis le sont aussi :

- a) $S(X, Y) \leftrightarrow \exists x(x \leq \emptyset(x) \wedge R(x, Y))$,
- b) $T(X, Y) \leftrightarrow \forall x(x \leq \emptyset(x) \rightarrow R(x, Y))$,
- c) $\psi(X, Y) \leftrightarrow \varepsilon x(x \leq \emptyset(x) \rightarrow R(x, Y))$,

où $\varepsilon_x F_x$ ¹² est considéré comme le plus petit nombre x tel que $F(x)$ et 0 le cas échéant lorsque la variable x est bornée, l'opération ε est seulement récursive primitive.

Preuve

Considérons la fonction θ telle que

$$\theta(0, y) = C_0(y)$$

¹² Le domaine des fonctions définissables ou moyen de l'opérateur Min recouvre le domaine des fonctions récursives générales. Pour définir la récursivité générale KLEKNE s'est servi de l'opérateur Min correspondant à la notion intuitive de plus petit nombre qui réalise une propriété.

$$\theta(k+1, y) = \theta(k, y) \text{ si } \neg R(k+1, y) \text{ où } \theta(k, y) \neq 0 \\ = k \text{ sinon}$$

Il nous faut préciser que ϕ vaut en effet 0 jusqu'au premier k_0 , quand on sait bien qu'elle est fonction de k et, puis elle vaut k_0 après. En clair, cette fonction est récursive d'après le théorème préparatoire II. Il faut seulement considérer dans le cas d'espèce Ψ et S . Nous aurons en effet

$$\Psi(x, y) = \theta(\phi(x), y) \\ S(x, y) = R(\Psi(x, y), y)$$

Il en résulte que le prédicat T est obtenu suivant les mêmes procédés que le prédicat S , à la seule différence de prendre $\neg R$ en lieu et place de R .

Il est à souligner que ces théorèmes préparatoires au théorème de GÖDEL permettent de démontrer que les fonctions $x + y$, $x \wedge y$ et x^y et les prédicats $x < y$ et $x = y$ sont rékursifs.

Mentionnons en effet que la notion de représentabilité permet de lier le concept de récursivité au SFG.

7.1 L'UTILISATION MÉTATHÉORIQUE DES FONCTIONS RÉCURSIVES

La théorie des fonctions rékursives est un outil technique grâce auquel on peut exprimer, sous forme arithmétique, certains raisonnements métathéoriques. Ici on énonce les règles d'un système formel sous forme récurrente. Ainsi, les propriétés métathéoriques sont établies de proche en proche, en commençant par des cas élémentaires pour aboutir aux cas généraux, en cela qu'il s'agisse des propriétés relatives à certaines catégories d'expressions ou qu'il s'agisse de propriétés relatives à certains types de preuve (raisonnements par induction structurale).

Donc les fonctions rékursives sont les bien indiqués pour exprimer les propriétés métathéoriques et rendre parfaitement compte des fonctions et des prédicats rékursifs [6].

Il faut alors établir, dans ce cas, une correspondance entre les éléments du système formel étudié et les entiers. Pour ce faire, la méthode de l'arithmétisation réalise donc une telle correspondance.

Notons qu'une opération, applicable à une certaine catégorie d'objets, est dite *représentable rékursivement*, si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces objets et une certaine classe d'entiers ou toute la suite des entiers, et trouver une fonction réursive F telle que, lorsqu'on applique cette opération et cette fonction à des éléments correspondants, on trouve des éléments correspondants.

Notons alors que la fonction F est une *représentation réursive* de cette opération ou qu'elle la *représente rékursivement*.

Notons qu'une propriété, applicable à une certaine catégorie d'objets, est dite *représentable rékursivement*, si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre ces objets et une certaine classe d'entiers ou toute la suite des entiers et trouver un prédicat rékursif R tel que, lorsque cette propriété est vérifiée de certains objets, le prédicat R est vérifié des entiers correspondants.

Notons alors que le prédicat R est donc une *représentation réursive* de cette propriété ou qu'il la *représente rékursivement* [6].

8 THEOREME

Tout prédicat rékursif est représentable dans SFG. La preuve de ce théorème intègre la fonction $\beta(x, y, i)$, une fonction réursive primitive $\beta: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout $(x, y, i) \in \mathbb{N}^3$ par $\beta(x, y, i) = x \bmod ((i+1)y+1)$ où $x \bmod q$ désigne le reste de la division euclidienne de x par q (avec $q > 0$) et ayant la caractéristique suivante : pour toute suite finie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers x et y tels que $\beta(x, y, i) = a_i$ pour i allant de 1 à n .

8.1 ENONCÉS TECHNIQUES DE L'INCOMPLÉTUDE [7]

• L'expansivité et la récessivité

Une propriété des entiers est dite *expansive*, quand elle peut s'écrire $\exists x_1 \dots \exists x_k A[x_1, \dots, x_k]$, où A est un énoncé d'arithmétique qui utilise des quantificateurs bornés $\forall x < p$, $\exists x < p$; ces énoncés sont donc $\sum_1^0$. La classe duale (propriétés *récessives*, énoncés Π_1^1), est formée des énoncés $\forall x_1 \dots \forall x_k A[x_1, \dots, x_k]$, où A est à quantificateurs bornés.

Notons qu'une propriété expansive est donc « approximable » par des essais systématiques. En clair, cela veut dire que plus on essaye, plus on a de chances de la vérifier, elle réfère à un type particulier de potentialité. A l'opposé, signalons que la récessivité est le « jusqu'ici ça va ». Elle est donc une propriété qui s'amenuise avec les essais.

La preuve est expansive. Cela signifie donc que plus on fait d'essais, plus on a de théorème, alors que la cohérence est récessive, plus on a de chances de trouver une contradiction. Remarquer que « l'incomplétude dit au fond que récessif et expansif ne coïncident pas et ne peuvent coïncider, à aucun prix ».

En informatique, une propriété qui est exprimée à l'aide de quantificateurs bornés est algorithmiquement décidable. Ici, il existe un algorithme pour dire si $A[x_1, \dots, x_k]$ est vraie ou fausse pour chaque choix de valeurs des parenthèses $x_1, \dots, x_k$. Donc, la vérification d'une quantification bornée $\forall x < p A[x]$, se pose en effectuant un nombre fini de vérification pour les valeurs $x=0, p-1$.

Si SFG est un système « raisonnable » d'arithmétique, alors $A[n_1, \dots, n_k]$ est décidable dans SFG. Cela signifie que pour chaque valeur $n_1, \dots, n_k$ des paramètres $x_1, \dots, x_k$, l'énoncé ou sa négation est prouvable parce qu'un système d'arithmétique raisonnable est censé contenir ce qu'il reflète en terme des calculs formels.

Dans un langage fondé sur 0, 1, +, x, =, < quelques axiomes remplissent cette tâche. Peu importe la liste, on s'intéresserait à un système qui ne contient pas ce minimum vital. La décision dans SFG se fait dans le même sens que la décision algorithmique, car la décision dans SFG recopie pas à pas et de manière formelle, les étapes de l'algorithme.

On pourrait dire : si SFG est contradictoire, alors il « en fait trop », car il prouve à la fois A et sa négation.

Une propriété expansive $\exists n_1 \dots \exists n_k A[n_1, \dots, n_k]$ est algorithmiquement semi-décidable ; ce qui signifie qu'il existe une semi-algorithme (algorithme qui ne donne pas toujours de réponse) rendant la réponse « oui » quand l'énoncé est vrai, et ne répond à rien sinon.

Ce semi-algorithme est facile à trouver quand on énumère les valeurs $n_1, \dots, n_k$, ainsi pour $k=2$, on a : (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (0,4), ..., on tente successivement à réaliser toutes les possibilités.

On finira parfaitement par tomber sur le bon choix, s'il existe alors l'algorithme pour A va permettre de conclure.

Admettons que la propriété soit fausse, l'algorithme ne va rendre au retour aucune réponse. Ainsi, il est « semi » partiel. Cela vaut également pour la prouvabilité, s'il y a un choix de valeurs $n_1, \dots, n_k$ qui valident A , alors A est prouvable dans SFG pour ce choix et la règle logique du quantificateur existentiel fait passer de $A[n_1, \dots, n_k]$ à $\exists x_1 \dots \exists x_k A[x_1, \dots, x_k]$.

Avec un système formel, le langage demeure d'en faire trop. Supposons que SFG soit contradictoire, il existe une possibilité plus tordue qui dit que SFG peut être cohérente et prouver alors des énoncés expansifs faux, c'est-à-dire $SFG \vdash \neg Coh(SFG)$, qui est cohérente, si SFG l'est ; là on a affaire au deuxième théorème d'incomplétude et cela prouve un énoncé expansif faux ; donc la contradiction de SFG.

Quant au dual, les propriétés récessives ne sont pas visiblement algorithmiques, même « semi ». De façon raisonnable, un énoncé récessif vrai est prouvable. En clair, le théorème d'incomplétude donne à cet effet un contre-exemple : l'énoncé de GÖDEL, récessif et vrai, n'est pas prouvable.

Retenons présentement qu'un énoncé récessif prouvable dans SFG est forcément vrai, si SFG est cohérente. Notons que s'il est faux, sa négation, énoncé expansif et vrai, serait prouvable dans SFG et SFG serait donc contradictoire.

- De la classification des prédicats

1. Les prédicats du premier ordre

Pour $n \geq 1$, les énoncés $\Sigma_n^0(\Pi_n^0)$ sont des énoncés ayant une alternance n et commençant par un groupe existentiel (universel).

Un énoncé d'alternance n peut être perçu au choix comme Π_n^0 ou Σ_m^0 , pour $m > n$. En particulier, un énoncé à quantificateurs bornés est à la fois Σ_1^0 et Π_1^0 . Cela signifie qu'il est expansif et récessif.

Ainsi apparaît une troisième hiérarchie, celle des Δ_n^0 qui traduit des ensembles admettant les deux formes, Σ_1^0 et Π_1^0 . Si les ensembles Δ_n^0 sont des ensembles récursifs ou décidables par un algorithme, alors les Σ_1^0 sont dits les ensembles semi-récursifs. Ils peuvent être identifiés par un semi-algorithme ou encore un ensemble récursivement énumérable (*r.e*) dans ce cas.

En effet, un ensemble semi-récursif non vide se présente comme l'image d'une fonction récursive ou calculable. Mais il est à remarquer que la hiérarchie des Δ_n^0 n'est pas une hiérarchie formelle¹³. Car elle suppose deux écritures équivalentes.

Il est essentiel de retenir que par codage, chaque classe $\Sigma_n^0(\Pi_n^0)$ a un élément universel ou complet. Pour $n = 1$ par exemple, la démontrabilité formelle dans un système cohérent d'arithmétique, est complète, c'est-à-dire tout ensemble Σ_1^0 peut être factorisé à travers la démontrabilité. Ce qui implique de définir cet ensemble comme suit : $A[n]$ est vrai si $A[\bar{n}]$ est prouvable, du moins le système est 1-cohérent ; s'il est seulement cohérent, il faut prendre la variation à la ROSSER.

Par la diagonalisation, chaque classe est distincte de sa duale. Il en résulte que si $f(m, n)(m \in Fn)$ est une énumération Σ_1^0 , des ensembles Σ_1^0 , alors l'ensemble

$\Pi_1^0\{n; n \notin Fn\}$ n'est pas Σ_1^0 . D'où le théorème de **TURING** ou le premier théorème d'incomplétude, si la prouvabilité est utilisée comme un élément universel.

2. Les prédicats du second ordre

En admettant des quantificateurs sur les prédicats, la logique est formulée au second ordre.

Quelques précisions s'imposent donc :

Nous avons deux types de hiérarchie

1. *La hiérarchie projective*, cela signifie donc que les quantificateurs au premier ordre sont utilisés par des nombres naturels, tandis qu'au second ordre, ils sont utilisés sur les ensembles d'entiers naturels. On classe le résultat en Σ_n^1 et Π_n^1 ($n \geq 1$), où n est le nombre d'alternances de quantificateurs du second ordre. En effet, la classe Δ_1^1 valant $\Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$, ou ensembles perarithmétiques, est déjà strictement plus grande que tous les Σ_n^0 et Π_n^0 . Noter qu'un ensemble dit hyperarithmétique non arithmétique typique comprend les nombres de GÖDEL d'énoncés arithmétiques vrais.
2. *La hiérarchie logique*, cela veut dire que les quantificateurs du premier ordre ne sont pas numériques. Notons que faute de mieux Σ^n , Π^n , sont les alternances au second ordre. La hiérarchie logique apparaît plus fine que la précédente qui est décalée d'une case.

Elle répond à la métamathématique, alors que la précédente est plutôt ensembliste.

Les deux hiérarchies sont mieux comprises à travers la définition de DEDEKIND des entiers naturels qui dit que : « le plus petit ensemble contenant 0 est clos par rapport au successeur S ». La relation est traduite par un quantificateur sur un prédicat unaire X , à savoir :

$$x \in N: \leftrightarrow \forall x((x(0) \wedge \forall y(x(y) \rightarrow X(Sy))) \rightarrow X(x))$$

Un énoncé Σ_1^0 ou $\exists n A[n]$ utilisant une quantification numérique $\exists n$ est exprimé au second ordre en $\exists x (x \in N \wedge A[x])$, et donc il est Π_1^1 . De manière analogue, les énoncés récessifs sont Σ^1 . En général, un énoncé Π_n^1 est écrit sous Π^{n+1} .

¹³Cette équivalence peut être immédiate (cas d'une implication entre deux Σ_1^0 , admettant deux formes prénexes, $\forall \exists$ et $\exists \forall$, ce qui la rend immédiatement Δ_2^0) ou non prouvable (cas d'un ensemble a priori semi-récursifs, donc le caractère récursif, Δ_1^0 , dépend d'une preuve de décidabilité).

8.2 LES TECHNIQUES DE L'INCOMPLÉTUDE [7]

Le point fixe : RUSSELL

L'antinomie de RUSSELL est la version du théorème de CANTOR appliquée à « l'ensemble de tous les ensembles » et qui engendre une antinomie : si $a = \{x; x \notin x\}$, alors $y \in a \leftrightarrow y \notin y$, donc $a \in a \leftrightarrow a \notin a$. Dans les systèmes « normaux », à déduction non artificiellement bridée, cela conduit à la contradiction.

Remarquer que le point fixe logique ou l'incohérence est le même que le point fixe du λ -calcul. En ce sens, le point fixe logique évite la contradiction par une boucle infinie des calculs.

Cette déduction naturelle de PRAWITZ admet une notion de normalisation, mais celle-ci ne converge pas. Au fond, le processus de normalisation de l'autonomie de RUSSELL, c'est le point fixe du λ -calcul.

D'où on établit la relation :

Incohérence $\sim$ non terminaison

Les logiques « normales » sont pour l'essentiel le temps de normalisation. Du point de vue d'un système formel, il n'y a pas de différence entre un algorithme dont on ne peut pas prouver la terminaison et une boucle du genre de celle induite par l'autonomie de RUSSELL.

L'autonomie de RUSSELL se décompose en deux parties, $a \in a \vee a \notin a$ et $a \notin a \vee a \in a$. Elle est contradictoire que *modulo* on applique la règle de contraction, c'est-à-dire le remplacement d'une disjonction $A \vee A$ par A .

Finalement, pour ce qui regarde le méta, rien ne distingue un système d'un méta-système. Dans la diagonalisation, la fonction de deux arguments $f(x,y)$ est essentiellement du type $f(x)$ où l'indice indique une position « méta » par rapport à x .

Le point fixe : GÖDEL

Le codage de la syntaxe indique des fonctions récursives et propriétés expansives du genre Sub (m,n) tel que Sub $([A], [q]) = [A_{[q]}]$ représentant au niveau des codes ce qui résulte de la substitution du terme qui code l'entier q , dans l'énoncé A . Rigoureusement, on devrait préciser la variable pour laquelle doit être effectuée la substitution, prenons, y_0 .

Ainsi, on va introduire Dem (m,n) , tel que Dem $([A], [D])$ si D est une preuve de A , etc. enfin Coh $(_{SFG})$, la Cohérence de SFG (propriété récessive) s'exprime comme $\forall x \neg \text{Dem}(\ulcorner 0 \neq 0 \urcorner, x)$.

En vue d'obtenir l'énoncé de GÖDEL, il faut constituer $\forall x \neg \text{Dem}(\text{Sub}(y_0, y_0), x)$, c'est-à-dire un énoncé $A[y_0]$, et pour $G := A[\ulcorner TA \urcorner]$, donc G exprime sa non-prouvabilité.

L'argument diagonal

La construction de l'énoncé de GÖDEL repose sur un argument diagonal. On construit tout d'abord la formule à une variable libre $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) \equiv \forall z [z = \text{sub}(x, x) \Rightarrow \neg \text{Dem}T(z)]$$

Ce qui veut dire que la formule de code x , appliquée à son propre code, n'est pas prouvable dans SFG, et si l'on applique cette formule à l'entier $\ulcorner \Delta \urcorner$, alors on a $G = \Delta(\ulcorner \Delta \urcorner)$, une formule qui dit d'elle-même qu'elle n'est pas prouvable dans SFG.

L'argument diagonal consiste à partir de fonctions $g(z)$ et $f(x,y)$, à former $h(x) := g(f(x,x))$. Si h prend la forme $h(x) = f(x,a)$, alors on a $h(a) = f(a,a) = g(f(a,a))$. Donc $h(a)$ est un point fixe de g , ce qui est vrai.

Notons que la formule $f(m,n)$ étant le code de $A_n[\overline{m}]$ et g étant la non-prouvabilité, alors le point fixe est un énoncé disant : « je ne suis pas prouvable ». Il est à remarquer que le premier théorème d'incomplétude montre que $g(.)$ n'est pas calculable ou récursif.

Ainsi, il convient de souligner que l'antinomie de RICHARD sous-tend, à certains égards, le théorème de GÖDEL : « le plus petit entier non définissable en moins de 100 symboles », qui est défini à nettement moins de 100 symboles. Pour sortir de l'antinomie de RICHARD, on dit que le mot « définir » n'est pas bien défini. A cet effet, on doit préciser le langage. Donc, le théorème de GÖDEL peut être perçu comme une version « corrigée » de RICHARD. GÖDEL fait donc référence expressément au paradoxe de RICHARD.

Supposons que SFG soit récursivement axiomatisable, SFG prouve toutes les formules Σ_0 vraies dans N , donc toutes les formules Σ_1 vraies dans N , et qu'elle est Σ -cohérente.

- $G = (\neg \Delta)$ est une formule close, équivalente à la négation d'une formule Σ_1 ;
- Si G était prouvable, G étant Σ_1 ne pourrait être vraie, car alors elle serait prouvable, et cela contredirait la cohérence de SFG. la formule G serait donc vraie dans $\mathbb{N}$, ce qui voudrait dire, par construction de G , que la formule G ne serait pas prouvable, c'est une contradiction. Donc G n'est pas prouvable.
- Si G était prouvable dans SFG, par Σ – cohérence, elle serait vraie, or elle est fausse d'après ce qui précède. Donc, G n'est pas prouvable.

Il faut donc retenir que le véritable contenu du théorème est dans la non-prouvabilité de G .

Le premier théorème d'incomplétude de GÖDEL s'énonce comme suit :

Si SFG est une théorie récursivement axiomatisable, cohérente, et qui prouve toutes les formules Σ_0 vraies dans $\mathbb{N}$, alors il existe une formule G , négation d'une formule Σ_1 , qui est vraie dans $\mathbb{N}$, mais non prouvable dans SFG.

Il est à remarquer que la formule G en question est équivalente à une formule universelle $\forall x H(x)$, où H est Σ_0 . Cette formule était vraie, pour chaque entier n (représenté par $s... s0$). $H(n)$ est vraie, donc prouvable étant Σ_0 . On a ainsi distingué : « vérité et prouvabilité », un énoncé « universel $\forall x H(x)$, qui n'est pas prouvable dans SFG alors que pour chaque entier n , $H(n)$ est prouvable dans SFG.

• Une preuve partielle du premier théorème d'incomplétude

La preuve par GÖDEL, de son premier théorème d'incomplétude, utilise essentiellement deux ingrédients : l'énoncé de GÖDEL est équivalent, via codage, à un énoncé affirmant sa propre non prouvabilité dans une théorie cohérente considérée et l'argument diagonal.

Mais l'énoncé de GÖDEL n'est pas paradoxal. Il est vrai dans $\mathbb{N}$, car s'il était faux, il serait prouvable. Or cet énoncé est de complexité logique suffisamment simple pour que sa prouvabilité, dans une théorie capable de coder l'arithmétique, entraîne sa vérité dans $\mathbb{N}$. Donc il est vrai dans $\mathbb{N}$, ainsi, il n'est pas prouvable, par définition de l'énoncé.

La négation de l'énoncé de GÖDEL n'étant non plus prouvable, il faut pour cela une hypothèse de cohérence plus forte, à la gödelienne. ROSSER a utilisé une astuce pour modifier l'énoncé aux fins de la cohérence.

La preuve de GÖDEL repose sur l'argument suivant : l'énoncé étant vrai, sa négation est fausse.

Supposons que $\mathbb{N}$ est modèle de la théorie, cela suffirait pour que la théorie ne soit pas prouvable. Mais GÖDEL a construit un énoncé d'une complexité logique suffisamment faible pour qu'une hypothèse de cohérence beaucoup moins forte suffise. Donc, de tels énoncés faux ne peuvent être prouvables, et cela peut s'exprimer syntaxiquement.

« Les théorèmes de limitation, écrit-LADRIERE, montrent précisément que la formalisation de la métalangue d'un système à l'intérieur de ce système n'est que très partiellement réalisable » [6].

La preuve des théorèmes de GÖDEL repose sur le théorème du sens que nous examinons dans les lignes qui suivent.

9 THÉORÈME DU SENS (OU LEMME DE GÖDEL)

Tous les prédicats et toutes les fonctions, sauf le prédicat Dem, sont représentables dans SFG.

A tout prédicat récursif $R(k_1, k_2, \dots, k_n)$ à n variables des nombres naturels, il existe n arguments dans SFG dont le nombre de GÖDEL est r ayant les variables libres $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ telle que, pour n -tuplet $k_1, k_2, \dots, k_n$ de nombres naturels, on ait les énoncés suivants :

$$Rk_1k_2 \dots k_n \rightarrow \text{Dem} [\text{Subr Ngd} (u_1) \text{ Ngd} (u_2) \dots \text{Ngd} (u_n) \text{ Ngd} (Nk_1) \text{ Ngd} (Nk_2) \dots \text{Ngd} (Nk_n)]$$

et

$$\neg Rk_1k_2 \dots k_n \rightarrow \text{Dem} [\text{Neg Sub } r \text{ Ngd}(u_1) \text{ Ngd}(u_2) \dots \text{Ngd} (u_n) \text{Ngd}(Nk_1) \text{Ngd}(Nk_2) \dots \text{Ngd} (Nk_n)]$$

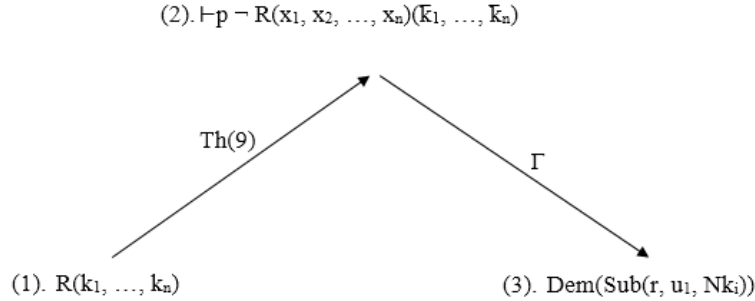
En d'autres termes, on a :

$$(i). \quad R(k_1, k_2, \dots, k_n) \rightarrow \text{Dem}(\text{Sub}(r, u_i, N(k_1)))$$

$$(ii). \quad \neg R(k_1, k_2, \dots, k_n) \rightarrow \text{Dem}(\text{Neg}(\text{Sub}(r, u_i, N(k_1))))$$

où $\text{Sub}(r, u_i, N(k_1))$ est le résultat de la substitution des variables $u_1, u_2, \dots, u_n$ par les nombres $N(k_1), N(k_2), \dots, N(k_n)$ respectivement.

Notons que le théorème du sens affirme clairement que tous les prédicats récurrents sont exprimables dans le système SFG, par des arguments et directement de l'application du théorème V et de la traduction par Γ , tel que cela est illustré par le schéma suivant :



(1). $R(k_1, \dots, k_n)$ est un prédicat récurrent (vrai de $k_1, k_2, \dots, k_n$) ;

(2). $\neg R(k_1, \dots, k_n)(u_1, \dots, u_n)$ est sa représentation dans SFG ;

(3). $\text{Dem}(\text{Sub}(r, u_i, N(k_i)))$ est l'arithmétisation par Γ de l'énoncé métathéorique

$$\vdash \neg R(x_1, \dots, x_n)(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \text{ où } \Gamma(\neg R(k_1, \dots, k_n)(u_1, \dots, u_n))$$

Les deux énoncés figurant dans le lemme de GÖDEL n'appartiennent pas au SFG. Ce sont donc des énoncés métathéoriques formulés à partir de l'arithmétique récurrente.

Soit $A(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ l'expression prédictive associée au prédicat R .

Et soit $A(N(k_1), N(k_2), \dots, N(k_n))$ la proposition fermée obtenue en remplaçant dans l'expression prédictive qui précède les variables $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ par les chiffres $N(k_1), N(k_2), \dots, N(k_n)$ représentant dans SFG les entiers $k_1, k_2, \dots, k_n$.

On affirme dans ce lemme ce qui suit :

Si le prédicat R est vérifié dans des nombres entiers $k_1, k_2, \dots, k_n$, la proposition fermée $A(N(k_1), N(k_2), \dots, N(k_n))$ est prouvable dans SFG. En d'autres termes,

Si l'énoncé $R(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est vrai (dans l'arithmétique intuitive) la proposition représentant cet énoncé dans SFG, est démontrable dans SFG.

Si cet énoncé est faux, la proposition qui la représente dans SFG est indémontrable dans SFG.

Preuve

Démontrons ce lemme pour tous les prédicats R ayant la forme $\mu_0 = \emptyset(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\emptyset$ récurrent. Ce lemme vaut pour tous les prédicats récurrents Q .

En effet, Q étant récurrent et ψ la fonction récurrente associée, on a :

$$Q(\mu_1, \dots, \mu_n) \leftrightarrow R(0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

où le prédicat R est défini par

$$R(\mu_0, \dots, \mu_n) \leftrightarrow \mu_0 = \emptyset R(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Et le lemme de GÖDEL étant vrai pour le prédicat R , il existe r vérifiant les deux énoncés figurant dans le lemme de GÖDEL; et $\text{Sub}(r_0, \mu_1)$ est donc convenable et d'après le schéma de substitution, il vérifie ces deux énoncés pour le prédicat Q .

Supposons le prédicat R tel que défini par $\mu_0 = \emptyset(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\emptyset$ récurrent. Prouvons le Lemme par récurrence sur le degré de $\emptyset$.

Si $\emptyset$ est de degré 1, alors l'un des deux prédicats à n arguments suivants peut convenir :

$$(\mu_0 = f^n 0) \wedge (\mu_1 = \mu_1) \dots (\mu_n = \mu_n)$$

$$(\mu_0 = f\mu_1) \wedge (\mu_2 = \mu_2) \dots (\mu_n = \mu_n)$$

Si $\emptyset$ est de degré $m > 1$, alors on a de deux prédicats récursifs u et ψ de degrés inférieurs par substitution ou définition récursive.

$$1^{\text{er}} \text{ Cas : } \emptyset = \psi(u(y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, u_{n_2})$$

Soit r un prédicat à n_1 arguments associés donc à $u_0 = \psi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Et soit s un prédicat à n_2 arguments associés à $y_0 = u(y_{n_1}, \dots, y_{n_2})$ par hypothèse d'induction.

Nous présentons un prédicat ayant $(n_1 + n_2)$ arguments associés à $\mu_0 = \psi(\mu(y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, u_{n_2})$. Donc, on a l'expression prédicative suivante :

$$\forall_x (Sub(s(x, y_0)) \rightarrow Sub r(x, x_1))$$

D'où les deux énoncés du Lemme sont vérifiés pour le prédicat R , étant donné qu'il signifie que $\emptyset = \mu_0$.

2^{ème} Cas

La définition récursive montre que

$$\emptyset(0, u_2, \dots, u_n) = \mu(u_2, \dots, u_n)$$

$$\emptyset(k+1, u_2, \dots, u_n) = \psi(k, \emptyset(k, u_2, \dots, u_n), u_2, \dots, u_n)$$

Soit r un prédicat à $n+1$ arguments associés à $\mu_1 = \psi(k, l, u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Et soit s un prédicat à n_2 arguments associés à $\mu_1 = \mu(u_2, \dots, u_n)$ par hypothèse d'induction.

Nous présentons un prédicat ayant n arguments correspondant à $\mu_0 = \psi(k, u_2, \dots, u_n)$.

Donc, on a l'expression prédicative suivante :

$$(\exists A)(\exists k)(A(k, u_0) \wedge [\forall u \equiv Sub s(u, u_1)) \vee \exists (y, z)(A(y, z) \wedge x = Sub r(y, z, k, l))])$$

D'où les deux énoncés du Lemme sont vérifiés pour le prédicat R .

Ce lemme est la clef des théorèmes d'incomplétude.

D'après GÖDEL, ce théorème (du sens) bien sûr est une conséquence du fait que dans le cas d'un prédicat récursif R , on peut décider pour tout n -uplet des entiers, et sur la base des axiomes du système P , si le prédicat R vaut ou non.

Partant du lemme de GÖDEL, on établit que tout prédicat récursif est représentable dans SFG. De même, on peut affirmer que toute fonction récursive est représentable dans SFG. Il ya lieu de faire correspondre à toute fonction ψ à n arguments, un prédicat R à $(n+1)$ arguments. Et si la fonction ψ est récursive alors le prédicat R l'est aussi.

Remarquer que l'expression du théorème du sens affirme que le système SFG décrit correctement les nombres naturels connus. La compréhension de cet énoncé est donc le pivot central de la preuve du théorème de GÖDEL.

En effet, la preuve du lemme de GÖDEL (ou théorème du sens) repose sur les procédés de substitution et de définition récursive qui s'expriment et se prouvent dans le cas échéant non seulement pour SFG mais pour un ensemble de systèmes obtenus de SFG, en ajoutant aux axiomes de ce système, un ensemble k formules ou des hypothèses ou encore des postulats propres à la théorie déterminée.

Aussi disons-nous que les théorèmes d'incomplétude s'appuient aussi sur une autre hypothèse, celle à l'effet que SFG est ω -cohérente. Cela signifie que SFG est cohérente, si et seulement si, aucune formule $F(x)$ de SFG n'est telle que $\vdash_P F(0), \vdash_P F(0'), \vdash_P F(d'), \vdash_P F(d''), \dots$ et $\vdash_P \neg \forall F(x)$.

Prenant en compte les définitions des 45 propriétés (fonctions et prédicats récursifs) du système établi, il y a lieu d'énoncer cette condition, étant donné qu'il n'y a de tel que :

$$\forall n \text{Dem}_K(Sub(a, x, N(n))) \wedge \text{Dem}_K(Neg(Gen(x, a)))$$

On peut alors prouver qu'un système ω -cohérent est de fait cohérent [3].

Astuces et conditions de preuve de GÖDEL

Le mécanisme de démonstration de GÖDEL est exposé à partir de son mémoire [4]. Nous suivons ici les fils conducteurs de LADRIERE et d'autres approches démonstratives de MENDELSON (NEIL KENNEDY), DECONINCK MATTHIEU et J.-Y. GIRARD.

1. Le système formel pris en compte par GÖDEL est à la limite près celui des *Principia Mathematica* de RUSSELL et WHITE HEAD. Ce système est nommé SFG. Dans SFG on représente tous les concepts et toutes les relations de la théorie des nombres. Le SFG est supposé cohérent, du point de vue syntaxique.

2. L'arithmétisation de SFG peut s'effectuer comme suit :

Si Prop est une proposition de SFG, alors l'énoncé métathéorique Prop est prouvable dans SFG et s'exprime formellement comme un énoncé arithmétique qui, à son tour, est représenté par une proposition de SFG.

3. Soient, dans SFG, toutes les propositions contenant une variable individuelle qui est susceptible d'être un chiffre.

Elles sont en effet au plus dénombrables.

L'ensemble de ces propositions est arrangé au moyen d'une relation ordinatrice R^* et sa $n^{\text{ième}}$ proposition est désignée par $R^*(n)$.

La relation R^* est donc *représentable* dans SFG au moyen d'une expression R jouant le rôle d'un prédicat.

4. Si $\forall xa$ est une des propositions appartenant à l'ensemble des propositions ainsi arrangées. On désigne par $[\forall xa; n]$, la proposition b qui est obtenue en substituant de la variable individuelle a , par l'entier n . ce qui donne en effet :

L'énoncé métathéorique $b \leftrightarrow [\forall xa; n]$ est représentable dans SFG.

5. On désigne par $Dem\ n$ l'énoncé métathéorique qui signifie que la proposition dont le ndg est n est prouvable dans SFG.

Soit la classe Cl des entiers qui est définie par l'équivalence suivante :

$$(n \in Cl) \leftrightarrow \neg Dem\ [\forall xr; n].$$

Déduisons que la propriété d'appartenance à la classe Cl est représentable dans SFG par s , une expression prédictive et cela au moyen de laquelle il est possible de former une proposition $\forall xc$ ayant une variable individuelle. La proposition signifie que x appartient à la classe Cl .

Notons que la proposition $\forall xc$ appartient à l'ensemble des propositions ayant une variable individuelle, et elle occupe un rang de cet ensemble. Supposons en effet que r soit ce rang. Donc on désigne cette proposition par $R^*(r)$. Ce qui donne $\forall xb \leftrightarrow R^*(r)$.

Il en résulte que l'énoncé métathéorique ne fait pas partie du SFG.

6. La proposition $[\forall xr; r]$ représente l'entier r fait partie du SFG. Mais, la proposition $[\forall xs; r]$ veut dire que l'entier r appartient à la classe Cl . Elle signifie cependant que la proposition $(\forall xs; r)$ ayant le nombre entier r appartient à la classe Cl .

Donc, la proposition obtenue en remplaçant la variable x de $\forall xr$ n'est pas démontrable dans SFG.

En d'autres termes, la proposition $[\forall xr; r]$ affirme sa propre *indémontrabilité*. Donc elle est *indécidable*.

7. Si $[\forall xr; r]$ est prouvable, alors il est possible de déduire, dans SFG $[\forall xs; r]$, qui affirme que r appartient à la classe Cl , ou encore, en vertu de la définition de Cl , $\neg Dem\ [\forall xr; r]$ qui veut dire que la proposition $[\forall xr; r]$ n'est pas prouvable dans SFG. D'où, la contradiction.

Et si $[\forall xr; r]$ est indémontrable, ce qui veut dire que $\neg[\forall xr; r]$ est prouvable, alors il est possible de déduire, dans SFG, $\neg[\forall xs; r]$ c'est-à-dire r n'appartient pas à Cl ou partant de la définition de Cl , $\neg\neg Dem[\forall xr; r]$ est équivalente à $Dem[\forall xr; r]$ qui affirme qu'elle est prouvable dans SFG.

Supposons que SFG soit cohérent, cela conduit à une contradiction, car il n'est pas possible de prouver à la fois dans SFG une proposition et sa négation. D'où SFG renferme, au moins en son sein, une proposition *indécidable*.

La métathéorie du système formel est formulée donc dans une langue de base. Pour ce qui regarde le système formel, l'arithmétique récursive est perçue comme une théorie intuitive.

La preuve de GÖDEL tient compte de paramètres suivants :

- Le système formel gödelien contient une formalisation de l'arithmétique récursive.
- Grâce à la méthode d'arithmétisation, la métathéorie du système formel s'exprime au moyen de l'arithmétique récursive.
- Cette métathéorie est formalisée dans le système lui-même formel.

En bref, sur la base de l'arithmétisation, GÖDEL interprète partiellement son système dans sa métathéorie.

Remarquons que « Le théorème de GÖDEL, plus précisément sa preuve, nous dit exactement ce que WEYL (et Wittgenstein) avait saisi : la métathéorie n'est pas plus expressive que la théorie, car on peut l'encoder dans la théorie, sans perte de déductibilité (les lemmes de représentation). En plus, la cohérence, codée dans la théorie, permet de dériver G, ce qu'elle ne permet pas de faire au niveau méta-théorique. La méta-théorie de PA n'est donc qu'une sous-théorie de PA, modulo un codage. L'exact contraire de ce qu'espérait HILBERT. La preuve du théorème de normalisation de GIRARD, en ménageant de façon essentielle, métathéorie et théorie, dans une preuve de cohérence de l'analyse (en tant qu'arithmétique de l'ordre), cassera ultérieurement le prétendu rôle fondamental de cette distinction aussi commode qu'artificielle » [5].

10 CONCLUSION

La métathéorie s'évertue à chercher les conditions optimales de formalisations des théories scientifiques et des propriétés syntaxiques ou sémantiques des langages formalisés. En effet, le théorème d'incomplétude décrit une propriété particulière, l'incomplétude d'une théorie : l'arithmétique de PEANO. Sa démonstration exige qu'on se situe dans une métathéorie qui est aussi l'arithmétique de PEANO, considérée fondamentalement comme un système formel beaucoup plus faible. En construisant une formule indécidable dans un système formel qui contient l'arithmétique, GÖDEL recourt à la diagonalisation pour prouver l'indécidabilité ou l'incomplétude des théories logiques ou mathématiques.

REFERENCES

- [1] H. Benis – Sinaceur, « Récursivité », *Encyclopédie Philosophique universelle. Les Notions philosophiques*, Tome 2, Philosophie occidentale ; M – Z. pensées asiatiques, conceptualisation des sociétés traditionnelles. Tables analytiques, Paris :PUF,pp.2188-2191, (1990).
- [2] K. GÖDEL, E. NAGEL, J.R. NEWMANN et J.-Y. GIRARD : *Le théorème de GÖDEL*. Sources du savoir, Paris : Le Seuil, 1989.
- [3] J. Ladriere, et Neil Kennedy, *Recherches logiques et philosophiques sur le concept de métalogue*, inédit, Mémoire de Maîtrise en Philosophie/Université du Québec à Montréal, août 2006.
- [4] K. GÖDEL, Uder Formale Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwardter Systeme, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, pp. 174-176,1931.
- [5] Giuseppe Longo, *Introduction aux théorèmes d'incomplétude : de Gödel à Kruskal-Friedman*, *Revue de synthèse (Paris)*, 4^e s, n°1, janvier-mars, pp.111-138,1999.
- [6] J. Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.
- [7] J.-Y. Girard, *Le Point aveugle*, Tome 1, *vers la perfection*, Hermann, 2007.

Incomplétude et vérité

A.-Roger LULA BABOLE¹⁻²

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The provability of a formal system is an insufficient criterion to translate properly the truth notion of logico-mathematic. The incompleteness is well understanding by its reference in interpretation and truth concept is one of the result. Taking into account the level of language -object language and metalanguage- allow skirting interns contradictions and establishing the logic consistence of the formal system.

KEYWORDS: Incompleteness, truth, provability, language, metalanguage, metatheory, formal system.

RÉSUMÉ: La prouvabilité dans un système formel est un critère insuffisant pour traduire convenablement la notion de vérité logico-mathématique. L'incomplétude se comprend mieux en sa référence à une interprétation et le concept de vérité en est le résultat indiqué. La prise en compte des niveaux de langage -Langage objet et métalangage- permet de contourner les contradictions internes et établit donc la consistance logique du système formel.

MOTS-CLEFS: incomplétude, la vérité, la prouvabilité, le langage, le métalangage, la métathéorie, le système formel.

INTRODUCTION

La métathéorie hilbertienne se donne l'arithmétique pour prouver que l'arithmétique est cohérente.

Quand bien même GÖDEL ne l'a pas explicitement déclaré, l'incomplétude est mieux comprise en référence à une interprétation et le concept de vérité qui en découle.

1 SYSTÈME FORMEL DE TARSKI (SFT)

Le SFT se caractérise comme suit : [1]

- Il contient des moyens suffisants permettant de formaliser l'arithmétique ordinaire ;
- Il contient des axiomes de la logique des propositions, des axiomes relatifs aux quantificateurs et des règles de dérivation;
- Il contient la théorie de types (et en particulier les axiomes de réductibilité et de détermination) ou des axiomes qui correspondent à la théorie des ensembles de ZERMELO.

Pour ce système formel, il y a lieu de tenir compte de certaines propositions qui en font partie.

Une classe *cl* des propositions de SFT est dite *cohérente*, si elle ne comprend pas à la fois une proposition et sa négation. Elle est dite *complète*, si, quelle que soit la proposition *A* de SFT, la classe *cl* comprend soit *A* soit sa négation.

- Supposons que $Cl - Pr$ soit la classe de toutes les propositions de SFT et $Cl - Dr$ la classe des propositions démontrables de SFT ; si l'on construit un prédicat Vri relatif à SFT et soit $Cl - Vr$ et la classe de proposition vraie de SFT.
- Il s'en suit qu'on construit le prédicat Vri tel que $Cl - Vr$ comprenne les propriétés suivantes :
- La classe $Cl - Vr$ comporte tous les axiomes de SFT et est fermée par rapport à l'application des règles de conséquence immédiate pour SFT. Donc $Cl - Dr$ fait partie de la classe $Cl - Vr$.
- La classe $Cl - Vr$ est cohérente
- La classe $Cl - Vr$ est complète avant l'incomplétude.

2 LE THÉORÈME DE TARSKI

Le théorème de TARSKI affirme que la vérité arithmétique n'est pas définissable en arithmétique. L'auteur précise donc qu'il n'y a pas d'énoncé Arithmétique $V[n]$ tel que l'équivalence $V[\overline{A}] \leftrightarrow A$ soit vraie pour tout énoncé clos A , c'est -à-dire énoncé sans variables libres. En clair, la vérité est, d'après TARSKI, hyperarithmétique sans être arithmétique. On pourrait assimiler cela à la sémantique formelle de prédicats de vérité bornés. Cela se déduit d'une diagonalisation triviale. Ce qui signifie que, dans le théorème d'incomplétude, on remplace "prouvable" par "vrai". On donnerait ainsi l'impression que GÖDEL a tenté de *définir la vérité* par la prouvabilité et a cru, dans ce cas, obtenir une contradiction du genre de l'antinomie de RUSSELL¹.

2.1 VÉRITÉ VS PROUVABILITÉ

Le lien entre vérité et prouvabilité est établi par un théorème de complétude qui a été prouvé en 1930 par GÖDEL².

En logique du premier ordre, le théorème de complétude établit un lien entre la théorie de la démonstration et la théorie des modèles. En effet, la logique du premier ordre est apparue en isolant les principes logiques de la partie de l'arithmétique de PEANO ne contenant pas de quantification sur les ensembles de nombres naturels (arithmétique de PEANO de premier ordre). Mais on notera que, pour chaque formule de premier ordre non prouvable du point de vue logique, GÖDEL construit un modèle arithmétique assez simple, dans lequel la formule est fausse. Cela veut dire que si une formule du premier ordre est, du point de vue logique, valide, c'est-à-dire vraie dans tous les modèles, alors elle est aussi prouvable du point de vue formel.

Alors que GÖDEL montre dans son premier théorème d'incomplétude que le phénomène décrit sur la complétude pour la logique du premier ordre ne vaut plus pour la logique du second ordre ou logique obtenue en permettant aussi la quantification sur les ensembles d'individus, et que la partie mathématique de l'arithmétique de PEANO de premier ordre est incomplète.

D'une manière générale, le théorème d'incomplétude établit que dans tout système formel non-contradictoire qui contient l'arithmétique de PEANO, il existe des formules qui sont vraies mais indémonstrables dans le système. Aussi montre-t-il que la consistance ou la non-contradiction d'un système formel contenant au moins l'arithmétique de PEANO de premier ordre, ne peut être établie en utilisant seulement les principes logiques qui sont formalisés dans le système formel. La cohérence d'un système ne peut pas être démontrée à l'intérieur de ce système lui-même.

Pour TARSKI donc « aucune théorie déductive ne peut être complète si, à l'intérieur des frontières, la théorie de l'addition et de la multiplication des nombres entiers, peut être établie et si en même temps, certaines présuppositions supplémentaires concernant, entre autres, la consistance de la théorie donnée sont satisfaites. La portée de ce résultat s'étend à de nombreuses théories [2] ».

La logique binaire classique nous apprend qu'une proposition est nécessairement vraie ou fausse, alors que dans l'étude syntaxique des systèmes formels, on sait que toute proposition sensée y est nécessairement prouvable, réfutable ou

¹ L'antinomie de RUSSELL (1902) rapporte que le seul barbier d'un village rase toutes les personnes du village qui ne se rasent pas d'elles-mêmes. Qui rase le barbier ? ou autre version ensembliste de l'antinomie de RUSSELL : $\{x/x \notin x\} \in \{x/x \notin x\}$ ssi $\{x/x \notin x\} \notin \{x/x \notin x\}$.

² K. GÖDEL, Sur la complétude du système logique, 1929. En 1930, dans sa thèse de doctorat GÖDEL prouve la complétude de la théorie de la quantification de FREGE, réduite au premier ordre..

indécidable. Il en résulte que les doubles inférences, prouvable $\leftrightarrow$ vrai et réfutable $\leftrightarrow$ faux ne peuvent pas se tenir en toute généralité.

Puisqu'on ne peut pas considérer un système axiomatique qui prouverait des propositions fausses ou qui réfuterait des propositions vraies ; une seule possibilité reste et tient, à savoir :

Prouvable $\rightarrow$ Vrai Vrai $\nrightarrow$ Prouvable
mais

Réfutable $\rightarrow$ Faux Faux $\nrightarrow$ Réfutable

D'où, le résultat des identités suivantes exprimant qu'au contraire de la vérité, la prouvabilité ne commute pas avec la négation. Ce qui, en effet, donne :

$\neg$ Vrai = fausse $\neg$ Prouvable = réfutable v indécidable
mais

$\neg$ Faux = vrai $\neg$ Réfutable = prouvable v indécidable

TARSKI soutient fermement que "le concept de vérité ne coïncide jamais à celui de démontrabilité, car toutes les propositions démontrables sont vraies, mais il existe des propositions vraies qui ne sont pas démontrables" [6]. La comparaison entre la notion formelle de preuve et le concept de vérité est en effet une réalité. Les résultats trouvés au niveau du premier théorème d'incomplétude établissent clairement ce décalage.

La notion de preuve dans le métalangage du calcul des classes se formule dans les sciences déductives. En effet, les méthodes déductives du métalangage sont réduites à 1) la substitution, 2) le modus ponens ou « détachement », 3) l'introduction de quantificateur universel. Ainsi la règle de substitution exige de formaliser préalablement les variables en considérant $\text{Sub}(x, n, m)$, qui est la formule obtenue de x en substituant la variable $\bar{x}_n$ à la variable $\bar{x}_m$. La formalisation des règles (1) à (4) exige la prise en compte de la notion intermédiaire de conséquence du $n^{\text{ième}}$ degré. Si X est un ensemble de fonctions proportionnelles ($x \in x \supset F$

$P(x)$), une conséquence du n -ième degré de X s'établit comme suit :

$X \in \text{Con}_n(X) \equiv (n=0 \wedge x \in X)$

$\forall (n > 0 \wedge X \in \text{Con}_{n-1}(X))$

$\forall (n > 0 \wedge \exists y \exists k \exists l (FP(y) \wedge y \in \text{Con}_{n-1}(X) \wedge x = \text{Sub}(y, k, l)))$

$\forall (n > 0 \wedge \exists y \exists z (FP(y) \wedge y \in \text{Con}_{n-1}(X) \wedge \neg \wedge y \in \text{Con}_{n-1}(X) \wedge \neg \wedge y \wedge x \in \text{Con}_{n-1}(X)))$

$\forall (n > 0 \wedge \exists y \exists k (FP(y) \wedge y \in \text{Con}_{n-1}(X) \wedge X = \bar{V} \wedge \bar{x}_k \wedge y))$

$\forall (n > 0 \wedge \exists y \exists k (FP(y) \wedge \bar{V} \wedge \bar{x}_k \wedge y \in \text{Con}_{n-1}(X) \wedge x = \text{Sub}(y, k, l)))$

La conséquence du n -ième degré de X fait relèver ce qui suit :

Nous avons pour chaque terme de la disjonction un cas :

- Tous les éléments de X sont des conséquences ;
- Les conséquences du $n-1$ -ième degré sont aussi des conséquences n -ième degré ;
- Une formule, obtenue d'une conséquence par substitution, est une conséquence (règle 1) ;
- Une formule, obtenue de conséquences par détachement, est une conséquence (règle 2) ;
- Une formule, obtenue d'une conséquence par généralisation, est une conséquence (règle 3) et
- Une formule, obtenue d'une conséquence par élimination d'un quantificateur, est une conséquence (règle 4).

Donc, il y a lieu d'affirmer que X est une conséquence logique des formules proportionnelles dans X , $x \in \text{Con}_n(X)$, si et seulement si, il existe un entier naturel n tel que x est la n -ième conséquence de X , $\exists x (x \in \text{Con}_n(X))$. Si X est vide, alors x est prouvable.

Etant donné que la vérité est un prédicat qui ne s'applique qu'aux énoncés ; ici sont pris en considération les énoncés prouvables du calcul des classes, les x tels que $x \in S \wedge x \in \text{Con}(\emptyset)$. Comme il est dit plus haut, le théorème de GÖDEL se traduit par un décalage entre les ensembles vrais V_r et démontrables, Dem :

THEOREME 1. Si $X \subseteq V_r$ alors $\text{Con}(X) \subseteq V_r$ En particulier, $\text{Con}(V_r) \subseteq V_r$.

THEOREME 2. V_r est un ensemble non contradictoire et déductivement clos

THEOREME 3. Tous les énoncés démontrables sont vrais, cela signifie que $\text{Dem} \subseteq V_r$.

THEOREME 4. Il existe des énoncés vrais indémontrables, cela veut dire que $\text{Dem} \neq V_r$.

Le théorème 4 se déduit d'une proposition qui dit qu'un certain énoncé et sa « négation, en l'occurrence l'énoncé $\forall \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{c} \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ » et sa négation $\neg \forall \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{c} \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ » n'appartiennent ni l'un ni l'autre à Dem .

TARSKI démontre l'analogue des théorèmes de GÖDEL avec son concept de vérité :

- (I) Si le langage-objet avec le métalangage ML a les ressources nécessaires pour définir une interprétation de ML dans lui-même, alors il est impossible de définir un prédicat de vérité pour L dans ML ,
- (II) S'il est possible de définir un prédicat de vérité de L dans ML ; et si le prédicat de démontrabilité Dem est interprétable dans L , il existe un énoncé vrai mais qui est indémontrable.

La preuve de ces méta – méta théorèmes s'établit par une correspondance biunivoque entre les expressions du langage L et les entiers naturels, de sorte qu'une proposition, qui porte sur des expressions de L (qui sont typiquement les propositions du métalangage) est une proposition qui porte sur des entiers. En vertu des hypothèses (I), si toutes les propositions portant sur des expressions de L (ou toutes les propositions de ML) sont traduisibles dans L ; en vertu des hypothèses (II), si la notion de prouvabilité est traduisible dans L . Pour la preuve, la correspondance biunivoque entre les expressions de L et les entiers naturels se donne par la suite $\emptyset_n = (\emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3, \dots)$. Cela signifie que $\emptyset_n$ est corrélé à un entier n . Puisqu'on peut définir l'arithmétique dans le calcul des classes d'ordre infini. Donc les énoncés de L sont corrélés à des classes. La preuve de (I) s'adapte au fond à l'antinomie du menteur et procède comme suit. Si un prédicat de vérité pour L est définissable dans ML .

Pour chaque entier naturel x (x étant une variable de classe dans le calcul des classes), l'expression « $\emptyset_x \notin V_r$ » est une expression du métalangage, en vertu des hypothèses (I), « $\emptyset_x \notin V_r$ » est traduisible dans L par une certaine expression arithmétique $\varphi(x)$ pour chaque entier naturel x de sorte que $\emptyset_x \notin V_r \equiv \Psi(x)$ (*).

Etant donné que $\Psi(x)$ est une expression du calcul des classes, il existe un entier k tel que $\emptyset_k$ est le nom de $\Psi(x)$.

En remplaçant x par k dans l'équivalence (*), nous avons $\emptyset_k \notin V_r$ (**). Mais « $\emptyset_k$ » est le nom d'une proposition équivalente à $\Psi(k)$, par la convention (T), nous avons $\emptyset_k \notin V_r \equiv \Psi(k)$.

D'où, contradiction avec (**). Donc, si le langage-objet d'un métalangage ML est suffisamment puissant pour traduire ML , alors ML ne peut pas définir un prédicat de vérité pour L sans être contradictoire. On peut modifier l'argument aisément pour montrer (II) en remplaçant V_r par Dem . En effet, soit l'expression $\emptyset_x \notin \text{Dem}$. En vertu des hypothèses (II), on peut traduire $\emptyset_x \notin \text{Dem}$ par une expression numérique $\theta(x)$ de sorte que $\emptyset_x \notin \text{Dem} \equiv \theta(x)$ (#). par la correspondance $\emptyset$ et le fait que $\emptyset(x)$ soit une expression du calcul des classes, il existe l tel que $\emptyset_l$ est l'énoncé de $\theta(x)$. Substituant x par l dans (#), nous avons $\emptyset_l \notin \text{Dem} \equiv \theta(l)$ (##), car il existe un prédicat de vérité pour ce langage, nous obtenons $\emptyset_l \in V_r \equiv \theta(l)$. Ainsi $\emptyset_l \notin \text{Dem} \equiv \emptyset_l \in V_r$ par (##). Pourtant $\text{Dem} \subseteq V_r$ dans ce langage en vertu du théorème 3. Il résulte que l'énoncé $\emptyset$ est vrai mais non prouvable ($\emptyset_l$ est également indécidable parce que $\neg \emptyset_l \notin \text{Dem}$).

En rapport avec le métalangage, on déduit qu'une façon d'interpréter (I) consisterait à dire que la métathéorie doit être *essentiellement* plus riche que sa théorie objet, afin d'éviter la contradiction. Quand bien même le métalangage est intégralement reproduit dans le langage-objet et le prédicat de démontrabilité est traduisible dans le langage-objet, il existe d'après (II), un énoncé vrai qui est indémontrable³. Mais, en ce qui concerne la métamathématique, le prédicat de démontrabilité est traduisible dans le langage-objet, lorsque celui-ci contient la théorie des nombres. Dans une certaine

³Pour éviter que ML soit contradictoire par (I), on supposera que ML est suffisamment riche pour que le prédicat V_r ne soit pas traduisible dans L .

perspective, on peut dire que la définition tarskienne de la vérité ne pouvait pas être correcte. Ce résultat attribué à TARSKI montre sa propension à faire les poubelles [3].

En conséquence, il n'est pas indiqué de penser que la complétion d'une théorie cohérente soit forcément hyperarithmétique ou pure. Nous pouvons avoir des modèles tels que Δ_2^0 qui sont « non standards », Puisqu'ils vérifient un certain nombre de choses fausses. Nous pouvons Souligner par ailleurs que les théorèmes de TARSKI se prouvent à l'aide du théorème du point fixe.

Il est à remarquer que la différence entre vrai et prouvable ne faisait pas partie du paysage des années 1930. La plupart des nuances qui y sont faites sont postérieures à l'incomplétude. Nous tenons à faire remarquer également que la règle de *Modus Ponens* établit une dualité entre preuves de A et preuves de $\neg A$. Donc une telle dualité suggère une forme de complétude « interne » ayant la forme « A et prouvable ssi $\neg A$ n'est pas prouvable » et cela sans se référer à la vérité. Alors qu'avec la complétude, on pourrait définir la vérité comme la prouvabilité. On le sait, pour le premier théorème d'incomplétude, G n'est pas démontrable, bien que sa négation $\neg G$ ne le soit pas de manière rigoureuse. Cela montre que si T est 1- cohérente, ou en remplaçant G par la variante de ROSSER, qui n'est ni prouvable ni réfutable [3].

2.2 THÉORÈME SUR LA VÉRITÉ

TARSKI donne une définition proprement logique de la vérité inaugurant ainsi la sémantique formelle en posant deux conditions : une théorie-T, ou une définition de la vérité pour un langage donné, doit tout d'abord être matériellement adéquate.

Une théorie -T doit ensuite être formellement correcte, c'est-à-dire portée sur un langage, dont la structure syntaxique est déjà spécifiée. TARSKI définit la vérité en terme de « satisfaction ». La vérité est conçue strictement de façon extensionnelle.

Chaque courant de pensée, chaque science particulière a sa propre conception du concept « vrai ». Mais une question revient à l'esprit : quelle est la bonne conception de la vérité ?

L'expression « la bonne conception de la vérité » est, d'après TARSKI, utilisée en un sens presque mystique, fondée sur la convention que chaque mot a une seule signification « réelle » et que toutes les conceptions concurrentes cherchent véritablement à saisir cette signification unique. Supposons que cette idée soit fondée et s'aperçoit que toutes les conceptions, qui posent problème, sont contradictoires entre elles [6].

Il y a lieu de remarquer qu'en présence du concept de « vérité », il n'y a pas un seul et même concept, mais une pluralité de concepts différents désignés sous un seul et un même mot. Il en résulte qu'il n'existe aucune conception de vérité, présentée jusqu'à nos jours sous une forme intelligible et univoque.

Par le théorème sur la vérité, TARSKI montre comment celui-ci découle de la généralisation sémantique du théorème de GÖDEL. En effet, le théorème sur la vérité se conçoit comme suit:

La théorie du prédicat vrai relatif au système formel de TARSKI n'est pas formalisable dans le système formel de TARSKI lui-même. Ce qui signifie en d'autres termes qu'aucune classe définissable des propositions du SFT (fermées ou non) appartenant à la classe CI-Vr n'est complète.

En effet, si la théorie du prédicat vrai est formalisable dans SFT alors il existe dans SFT une expression prédicative Q ri telle que pour toute proposition A de SFT, a étant le ndg de A,

Ce qui revient à dire que

$Q \text{ ri } N_a \leftrightarrow A$ est prouvable dans SFT

Dans ces conditions, il est possible de montrer à la limite que la classe CI-Vr des propositions vraies de SFT a les mêmes propriétés que la classe être une *classe définissable*, CI-Df.

A étant en effet une proposition de SFT, il se dégage que l'équivalence indiquée ci-haut se décompose en deux implications, à savoir :

1) $Q \text{ ri } \longrightarrow A$

2) $A \longrightarrow Q \text{ ri}$

L'examen de cette équivalence nous amène à dire que si $A \in \text{Cl-Vr}$, alors $\text{Qri Na} \in \text{Cl-Vr}$ aussi, car la classe Cl-Vr est fermée par rapport à l'application de la règle de conséquence.

Et si $A \notin \text{Cl-Vr}$, alors $\text{Qri Na} \in \text{Cl-Vr}$, car $\text{Qri Na} \notin \text{Cl-Vr}$. Etant donné que Cl-Vr est une classe complète, donc $\text{Qri Na} \in \text{Cl-Vr}$. De ce fait, suivant l'implication 2) $A \in \text{Cl-Vr}$ aussi. D'où contradiction.

Et on sait que Qri Na est la proposition de SFT représentant l'énoncé : la proposition A appartient à la classe Cl-Vr. Donc, elle correspond à A. D'où la classe Cl-Vr est définissable dans SFT. Du fait qu'elle est contenue en elle-même, elle se trouve bien vérifiée dans les propriétés de la classe Cl-Vr. Et la classe Cl-Vr étant incomplète, il existe au moins une proposition indécidable dans Cl-Vr, ce qui n'est pas possible. Car, en vertu de l'hypothèse, Cl-Vr est une classe complète.

2.3 LANGAGE ET MÉTALANGAGE

Pour définir le concept de la vérité et de toute étude sur le problème sémantique en général, TARSKI estime qu'il faut écarter le langage sémantiquement clos, car il confond en son sein de termes sémantiques.

Il faudra procéder en la distinction de deux niveaux du langage⁴. Le premier niveau est le langage. Ce langage est le langage habituel. On définit la vérité à partir des propositions de ce langage.

Le deuxième langage est le métalangage, qui est celui qui décrit et parle du langage-objet. Les termes par lesquels doit se construire la définition de la vérité sont contenus dans ce langage [6]. En clair, nous soulignons que la nécessité de séparer le langage du métalangage surgit dans le paradoxe de RICHARD, simplifié ensuite par BERRY⁵.

Le métalangage peut devenir un langage-objet pour un autre métalangage dans la mesure où, les propositions de ce métalangage deviennent l'objet d'études d'un autre métalangage. D'où, la nécessité de construire un nouveau métalangage.

A son tour, le nouveau métalangage peut aussi devenir un langage-objet pour un autre métalangage plus élevé. Ainsi, il est possible d'avoir une hiérarchie infinie des langages.

Pour TARSKI, le vocabulaire du métalangage est plus caractérisé par les conditions établies, sans lesquelles une définition de la vérité pourrait être considérée comme matériellement adéquate, c'est-à-dire l'équivalence (T) ainsi annoncée : « P » est vrai si P⁶.

La définition de la « Vérité » et toutes les équivalences, qui y sont impliquées, sont formulées dans le métalangage. Ces deux expressions « P » sont des instances différentes. Cela signifie que le « P » est un terme du métalangage, tandis que P du langage-objet. Puisque c'est le terme du métalangage qui explique celui du langage-objet, force nous est d'affirmer que le langage-objet est inclus dans le métalangage.

D'ailleurs, ce point de vue est soutenu par TARSKI lorsqu'il affirme : « Le métalangage doit contenir le langage-objet en tant que l'une de ses parties » [6]. Telle est donc la condition nécessaire pour établir la preuve de l'adéquation matérielle de la « vérité ». Si le métalangage doit pouvoir inclure en son sein le langage-objet, il sera donc nécessaire que le métalangage soit assez riche pour pouvoir permettre de construire un nom pour chaque proposition du langage-objet.

Retenons que le métalangage doit contenir aussi des termes ou des expressions logiques notamment des expressions du genre « si et seulement si, si...alors », etc. Son vocabulaire n'aura pas contenu des termes indéfinis sinon ceux dont la définition éclaire le sens. Cela signifie que « les termes sémantiques (relatifs au langage-objet) ne soient introduits dans le métalangage qu'au moyen de définition » [6].

⁴ RUSSELL émet donc l'hypothèse d'une hiérarchie de langages $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \dots$ à telle enseigne que chaque langage de la hiérarchie permette d'exprimer ce que son prédécesseur ne peut que montrer, cela signifie que $\mathcal{L}_n - 1$ ne peut que montrer. Remarque que RUSSELL prend vraiment au sérieux l'idée d'un métalangage.

⁵ Supposons que n soit le plus petit entier naturel tel que on ne puisse le définir en moins de 100 mots. Mais on précise que cet entier ne peut être défini en moins de 100 symboles élémentaires dans le langage de signature S, donc cette expression est une expression relevant du métalangage et non du langage de signature S ; dans ce cas, il n'y a plus de paradoxe.

⁶ La relation logique entre proposition et son nom s'établit comme suit : Par « exemple la voiture est blanche » on peut remplacer cette proposition par P et son nom par la lettre « q ». TARSKI estime que les deux expressions doivent être équivalentes : p est vrai si et seulement si « q » et cette équivalence s'appelle Equivalence de la forme « T », A. TARSKI, Logique, Sémantique, Métamathématique, pp. 272-273.

En clair, la définition explique le sens clair et univoque (dépourvu d'ambiguïté). Pour qu'une définition de la « vérité » dans le métalangage soit satisfaite, elle doit donc être à la fois matériellement adéquate et formellement correcte, pour pouvoir se vêtir de la condition de richesse essentielle » [6].

Il en résulte que le métalangage doit être essentiellement plus riche que le langage-objet.

Donc il doit contenir des variables de type logique supérieur au type des variables du langage-objet.

Mais à supposer que la condition de richesse essentielle ne soit pas remplie, on peut habituellement montrer qu'une interprétation du métalangage dans le langage-objet est possible. Cela signifie qu'un terme donné du métalangage peut être mis en relation avec un terme bien défini du langage-objet, de telle manière que les propositions susceptibles d'assertion, dans un langage, se trouvent correspondre aux propositions susceptibles d'assertion dans l'autre. Tel est le point de vue de TARSKI [6].

Par la richesse essentielle, on comprend évidemment qu'il n'est pas possible de pouvoir interpréter le métalangage dans le langage-objet. Les noms et les expressions du langage-objet appartiennent au métalangage et non au langage-objet. Mais cela n'empêche pas que ces termes et ces expressions soient interprétés en termes du langage-objet.

Aussi TARSKI va-t-il préciser que la condition de richesse essentielle est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour pouvoir définir de manière satisfaisante la vérité dans le métalangage.

Il ajoute donc en disant que « Si le métalangage remplit la condition « de richesse essentielle », la définition de la « vérité » peut être définie en lui » [6].

Le développement d'une théorie de la vérité dans un métalangage qui ne remplirait pas la condition tenterait une définition de la « vérité » relevant du domaine sémantique et serait utopique sinon une entreprise vaine.

Dans un langage formalisé, les théorèmes sont les seules propositions qui peuvent s'affirmer. D'après TARSKI, « les seuls langages à structure spécifiée sont les langages formalisés de divers systèmes de la logique déductive, éventuellement enrichis par l'introduction de certains termes non logiques » [6]. Selon TARSKI, le métalangage peut démontrer tous les biconditionnels de la forme « p est vrai si et seulement p », dans lesquels on perçoit que p est borné à des énoncés du langage-objet. Etant donné que le prédicat de vérité pour L peut être traduit dans ML mais pas dans L.

En 1975, KRIPKE a élaboré une théorie formelle de la vérité utilisant une logique trivalente [4]. L'approche Kripkéenne montre que les énoncés paradoxaux ne sont ni vrais ni faux. Cela amène à une théorie de la vérité qui établit que le prédicat de vérité pour L peut être exprimé dans L même.

D'après KRIPKE, un langage est capable de contenir fondamentalement sans contradiction le prédicat de vérité dans ce langage, ce qui est donc impossible suivant l'approche tarskienne de la vérité.

Notons que la théorie kripkéenne de la vérité, différente de celle de TARSKI, permet à la « vérité » d'être l'union de toutes les étapes de la définition. En vertu de cela, pour KRIPKE, « "la neige est blanche" est vrai » est bien défini, comme aussi « "la neige est blanche" est vrai », et ainsi de suite, mais « cet énoncé est vrai » ou « cet énoncé n'est pas vrai » n'ont donc pas de conditions. Selon KRIPKE, ce sont des énoncés dénués de fondement (*ungrounded*) [4].

La notion de vérité, d'après HINTIKKA, ne veut pas dire une correspondance directe à la réalité, mais elle signifie la consistance des schémas descriptifs dans lesquels les descriptions de mondes possibles se moulent. Elle se formalise suivant la règle impérative d'univocité, c'est-à-dire un seul et même symbole va représenter la même proposition [7]. Il est donc possible de comparer la proposition et la réalité. Cependant une telle comparaison est typologique et principielle. Dans ce sens, la non-contradiction est la règle fondamentale de la consistance. Ce qui revient à affirmer que dans aucune description de monde possible, on ne peut pas avoir la proposition p en même temps que sa proposition (non p). C'est là une position de principe qui ne concerne pas seulement un ensemble propositionnel descriptif mais qui touche à tout genre de description du monde.

En clair, il nous revient de dégager que les théories de la vérité de TARSKI et KRIPKE sont incontournables, voir même indispensables dans l'appréhension de toutes les autres théories formelles de la vérité. TARSKI définit le concept de « vérité » par un autre concept sémantique, à savoir celui de *satisfaction*. Pour lui, la satisfaction est une « relation existant entre n'importe quelle catégorie d'objets et certaines expressions dites » fonctions propositionnelles » [5].

Ces expressions sont du genre : « x est logicien », « x est disciple de y », etc. Notons que la fonction propositionnelle possède des variables *libres* et la proposition est définie comme « une fonction propositionnelle qui ne contient aucune variable libre » [5]. TARSKI définit la « satisfaction » en ayant recours à la récursivité. Et suivant cette procédure, on commence par indiquer les objets satisfaisant, les fonctions propositionnelles les plus simples et après celles les plus

complexes. On devra établir par la suite les conditions dans lesquelles les objets concernés satisfont une fonction composée. En général, on définit la "satisfaction" par application à des propositions [5].

Deux cas de propositions sont à considérer : une proposition est satisfaite par tous les objets ou ne l'est par aucun. Ainsi, TARSKI définit la vérité comme suit : « une proposition est vraie, si elle est satisfaite par tous les objets et elle est fausse dans le cas contraire » [5].

Donc, la fonction propositionnelle $f(x)$ caractérise une classe composée d'objet X qui satisfait F . De même, le prédicat (x,y) caractérise un ensemble de couples d'individus (x,y) satisfaisant R . La satisfaction concerne des objets, des couples d'objets ou de triples d'objets, etc. Partant de la satisfaction des formes propositionnelles élémentaires, de proche en proche, il serait possible de préciser la satisfaction des formes propositionnelles complexes. La vérité est définie récursivement sur base de la structure syntaxique des formules.

3 CONCLUSION

L'idée essentielle qui se dégage est qu'il existe des formules vraies qui sont non prouvables. On distingue ici nettement la prouvabilité de la vérité. Toute formule appartenant à un système formel n'est pas nécessairement déductible des axiomes de ce système. Retenons que le concept « vérité » ne renferme pas un seul concept, mais une pluralité de concepts différents et désignés par un seul et un même mot. Ainsi, chaque courant de pensée, chaque science particulière a sa conception de la « vérité ». Quoiqu'il en soit, il n'y a pas de théorie de vérité qui prime.

La vérité est définie dans les propositions du langage objet et les termes qui la définissent appartiennent au métalangage. Au fond, le métalangage n'existe pas en soi ; il est toujours déjà et nécessairement lié à une langue naturelle, c'est-à-dire un langage-objet.

REFERENCES

- [1] Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.
- [2] A. Tarski : *La complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires*, vol.2, Paris : Armand Colin, 1974.
- [3] K. GÖDEL, E. NAGEL, J.R. NEUMANN et J. -Y. GIRARD, *Le théorème de GÖDEL. Sources du savoir*, Paris : Le Seuil, 1989.
- [4] S.A. Kripke, "Outline of a Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72, pp. 690-716, 1975.
- [5] A. Tarski : *Logique, Sémantique, Métamathématique*, Trad. Sous la direction de G. Granger, Paris, Armand Colin, vol2, 1974.
- [6] A. Tarski, « La conception sémantique de la vérité », *logique, Sémantique, Métamathématique*, T.2, Paris : Armand-colin, pp265-305, 1974.
- [7] NGWEY Ng. Nd, « Le critère quineen d'engagement ontologique. Un instrument méthodologique d'analyse de langages », *Problèmes de méthodes en philosophie et sciences humaines en Afrique*, (Collection Recherches Philosophiques Africaines, n°9). Actes de la 7^{ème} Semaine Philosophique de Kinshasa, tenue du 24 au 30 avril 1983, Faculté de Théologie Catholique, Kinshasa, pp.131-145, 1986.

Incomplétude et Réfutabilité

A.-Roger LULA BABOLE¹⁻²

¹Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

²Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: Of the point of view mathematical-logic, the researches specify the intrinsic limits connected on knowledge apprehensions. In regard of POPPER's refutability, the incompleteness misses a significant come-back in the way of knowledge apprehend. In fact, it releases a significant insufficiency of induction and that of verification. So it will subvert an universal character of certainty. The rational truth and the true rationality are linked in a metasystem. They are depending on a system which will be in the same time empirically proved and logically assured.

KEYWORDS: incompleteness, refutability, universal language, truth, falsifiability, coherence.

RÉSUMÉ: Du point de vue logico-mathématique, l'étude indique l'insuffisance et les limites intrinsèques liées à l'appréhension des connaissances. Au regard de la réfutabilité à la POPPER, l'incomplétude marque un retournement significatif dans la manière d'appréhender les connaissances. En fait, il se dégage une insuffisance notoire de l'induction ainsi que celle de la vérification. D'où, se trouve sapé le caractère universel de la certitude. La vérité rationnelle et la vraie rationalité sont liées à un méta-système. Elles ne dépendent pas d'un système qui serait à la fois empiriquement démontré et logiquement assuré.

MOTS-CLEFS: incomplétude, réfutabilité, langage universel, vérité, falsifiabilité, cohérence.

INTRODUCTION

L'épistémologie poppérienne des propriétés « falsifiables » ou propriétés « réfutables » ou encore propriétés « récessives » concerne les lois générales qui sont sujettes à des vérifications partielles et soumises à des tests illustrant les expériences particulières. Elles sont en effet vérifiées jusqu'à une certaine décimale près.

L'incomplétude logique de GÖDEL, telle que perçue par Karl POPPER, a opéré sur le plan logico-mathématique, un retournement épistémologique décisif. En clair, on insiste sur l'insuffisance de l'induction et l'insuffisance de la vérification. Donc on a sapé le caractère universel de la certitude que l'une et l'autre certitude a pu apporter [1]. La vérité rationnelle et la vraie rationalité sont liées à un méta-système. Elles sont indépendantes d'un système qui serait à la fois empiriquement démontré et logiquement assuré.

Le leitmotiv de GÖDEL construisant la proposition G sur le paradoxe du menteur, est un grippage et un dérapage non accidentel mais intrinsèquement liés au fonctionnement logique [1].

1 CONCEPT POPPÉRIEN DE RÉFUTABILITÉ

Pour POPPER, un énoncé est empiriquement informatif, si et seulement s'il est testable ou falsifiable, autrement dit, il est en contradiction avec au moins un énoncé de base. Cela signifie qu'il n'y a pas lieu de concevoir une situation empirique telle

que la réalisation soit impossible, si l'énoncé est vrai. On suppose, d'après Einstein, que la proportionnalité des masses gravitationnelle et inertielle contredit un nombre infini d'énoncés qui décrivent les événements observables, quand bien même l'essai de mettre en évidence a échoué, c'est-à-dire l'hypothèse est donc corroborée. Alors on peut se dire que l'énoncé « tous les actes sont motivés par un intérêt », est donc irréfutable. Cela veut dire qu'on ne peut exclure aucun exemple d'action ayant l'apparence altruiste. De l'avis de HEMPEL, il n'est pas soutenable d'affirmer que la réfutabilité n'est pas une propriété close par déduction. Cependant, on voit que l'énoncé : « tous les cygnes sont blancs » est falsifiable pour la simple raison qu'il « interdit » que soit vérifié, ou corroboré, l'énoncé : « il ya un cygne noir au parc de sceaux en janvier 1984 ». Cela implique alors l'énoncé. « Tous les cygnes schizophrènes sont blancs », qui n'est pas testable, du moins du fait que l'on n'aura pas dans ce cas défini un comportement qui puisse être précisément observé et permette de reconnaître la schizophrénie d'un cygne. D'où, il résulte que tout énoncé impliquant les tautologies est par excellence irréfutables.

POPPER souligne en outre qu'un énoncé universel peut être falsifiable autant qu'un énoncé singulier : « il ya un corbeau blanc au Zoo de Moscou en 1984 », et également un énoncé existentiel ou à quantificateurs emboîtés, si le quantificateur existentiel est borné. Alors on a : « Tous les hommes sont mortels » n'est pas un énoncé falsifiable. Dans ce cas, on construit cet énoncé sous la forme : $\forall x \exists y (x \text{ My})$, ce qui signifie que « Pour tout homme, il existe un temps y après lequel il n'est plus vivant ». Au fond, il est déductible de l'énoncé falsifiable : « tous les hommes meurent avant 200 ans ». On s'aperçoit qu'on pourrait rendre « scientifique » tout énoncé, puisque tout énoncé étant déductible d'une théorie testable, il faudra que la scientificité puisse s'obtenir par un renforcement de ce genre. Cela signifie donc que la théorie ainsi renforcée est déjà à corroborer.

Mais il est à remarquer que, pour POPPER, les énoncés n'en sont pas pour autant dénués de sens. Il ya lieu d'y déceler une valeur heuristique et si possible, ces énoncés peuvent devenir testables.

A l'inverse, il est à remarquer également qu'une théorie, qui est falsifiable, peut être rendue, dans certains cas, irréfutable suivant l'usage de « stratégies immunisantes ». Autrement dit, si la déclaration disant que cet oiseau blanc ne saurait être un corbeau, du fait que la noirceur appartient à l'essence du corbeau, ou fait partie de la définition du « corbeau », alors les corbeaux non noirs sont considérés comme des structures logiquement impossibles, et sont donc exclus de la classe des « falsificateurs potentiels » de l'énoncé : « Tous les corbeaux sont noirs ». En rapport avec la nouvelle classe, égale à l'ensemble vide, l'énoncé précédent est déclaré irréfutable.

La commodité de « se lier les mains » spécifie les conditions précises pour lesquelles il conviendrait de regarder une théorie comme réfutée, lorsqu'on y décrit au moins un falsificateur potentiel. Au demeurant, des « stratégies dictatoriales » ne doivent pas se disposer face à la nature permettant d'obtenir quoi que ce soit.

Pour POPPER, l'asymétrie entre la réfutation et la vérification explique donc la semi-décidabilité des énoncés strictement universels, non déductibles et ayant une conjoncture finie d'énoncés singuliers, mais dont la négation se laisse déduire d'au moins un énoncé singulier.

Par ailleurs, la « falsifiabilité » pourrait dire : « ce dont on peut démontrer empiriquement la fausseté ». En clair, POPPER note à cet effet qu'aucune théorie n'est falsifiable, étant donné qu'une question empirique ne saurait être résolue par une preuve concluante. Aussi souligne-t-il que tout énoncé synthétique est conjectural, il va toujours transcender le « donné », puisque tous les termes universels sont ici disproportionnels. Il en résulte que, dans pareils cas, une assertion, qui porte sur la falsification d'une hypothèse, est, elle aussi, considérée comme hypothétique. Donc elle prête à discussion. Par exemple, il faut tester le résultat en le répétant. Aussi la réfutation d'une conjonction conduit-elle au problème de DUHEM, c'est-à-dire elle ne permet pas de décider de manière mécanique lequel des énoncées conjoints est faux.

Mais, suivant l'anti-conventionnalisme, il faut reconnaître qu'aucun d'entre eux n'est à être considéré *a priori* comme étant à l'abri de la mise en cause.

En tout état de cause, il apparait clairement logique de souligner que, selon l'opinion de POPPER, plus une hypothèse est générale et précise, plus elle exclut des tas de choses possibles, plus son « degré de falsifiabilité » est grand. Pour lui, les énoncés sont donc irréfutables. Ils peuvent être rendus falsifiables, si l'on restreint le concept de probabilité. Cela signifie donc qu'on va interdire les occurrences prédictibles et reproductibles ayant les écarts systématiques par rapport à la loi qui est énoncée.

Dans la plupart du temps, POPPER emploie de façon indifférente « réfutable » et « falsifiable ». Mais il est à remarquer que « réfutable » a un sens plus large compris comme une théorie pouvant être réfutée logiquement, si elle est incohérente ou inter théoriquement », si elle contredit une théorie « acceptée » [2].

Remarquer que la réfutation est une notion de nature syntaxique à ne pas confondre avec celle de falsification, qui est de nature sémantique. La falsification est une procédure consistant à établir la fausseté d'une proposition A en établissant la

fausseté d'une proposition B qui est déductible de A. Du point de vue formel, la falsification est une procédure inverse de celle de la réfutation. Cela signifie que la réfutation procède par déduction de prémisses supposées valides à la négation d'une proposition, alors que la falsification est un procédé remontant de la négation d'une proposition à la non-validité des prémisses [3].

Pour POPPER, une théorie est dite « falsifiable », c'est-à-dire réfutable empiriquement, si et seulement si, elle implique la négation d'au moins un énoncé d'observation possible pris comme un « énoncé de base ».

L'approche de POPPER ressemble à une mise en perspective de l'ontologie de HILBERT selon le champ complet du discours scientifique [4]. Il s'agit d'un positionnement anti-essentialiste. Cela signifie donc que les lois scientifiques ne tombent pas du ciel. La raison est cependant que GÖDEL réfute les points de vue de HILBERT. Donc il réfute a fortiori le popperisme le démarquant de façon substantielle.

Pour POPPER, le théorème de GÖDEL est irréfutable. Donc, dans sa perspective, il n'est en aucune manière « falsifiable ».

On voit dès lors que l'ontologie hilbertienne du test montre son asymétrie. On a d'un côté le test qui est absolu, et en face, on a la loi qui est relative et testable. Donc on est en présence d'une ontologie du récessif. Au cas où la qualité du test pourrait être mise en cause, c'est-à-dire, si la loi teste le test au moment où le test teste la loi. Cela signifie qu'on se trouve dans un monde beaucoup plus ouvert où tout peut être remis en cause.

La falsifiabilité et la cohérence constituent, d'après POPPER, les conditions nécessaires pour rendre compte des énoncés de base empirique. En effet, la cohérence est la condition la plus générale à laquelle un système doit satisfaire, empirique ou non empirique, s'il doit être d'un usage quelconque. De plus, un système empirique doit satisfaire à une condition supplémentaire : il doit être falsifiable [5].

2 THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE ET THÈSE DU LANGAGE UNIVERSEL (LU)

POPPER estime que la thèse du LU « née réfutée » était incompatible avec le théorème d'incomplétude. Aux dires d'Alain BOYER, « CARNAP fut le premier philosophe à reconnaître l'immense importance des découvertes de GÖDEL. Il fit de son mieux pour les faire connaître au monde philosophique. Il serait donc plutôt surprenant que le résultat de GÖDEL n'ait pas produit, sur les principes du cercle (de vienne), l'effet qu'il aurait dû produire, en ce qui concerne le langage et le domaine de la science (principes selon moi sont clairement métaphysiques et bien trop maintenus) [7].¹

D'après CARNAP, le théorème de GÖDEL montre clairement qu'un langage unifié ne serait pas assez universel même pour la théorie des nombres. Cela signifie que « bien que nous puissions construire un langage dans lequel toutes les assertions de la théorie peuvent être, aucun langage ne suffit pour prouver toutes les assertions qui peuvent être prouvées (dans un autre langage) ».

De même, TARSKI pense que tout langage « universel » est paradoxal. Selon POPPER, « une science unifiée dans un langage unifié, est vraiment un non-sens, ai-je le regret de dire, et ceci est démontrable, puisqu'il a été prouvé, par TARSKI, qu'aucun langage cohérent de ce type ne peut exister. Sa logique lui est extérieure. Pourquoi pas sa métaphysique ? » [7] D'après encore POPPER, les théorèmes d'incomplétude et de CHURCH réfutent la thèse de WITTGENSTEIN stipulant que « l'énigme (Das Rätsel) n'existe pas. Si une question peut être posée, elle peut aussi recevoir une réponse ». Il y a lieu de préciser que toute énumération effective de méthodes de résolution des problèmes est incomplète. Autrement dit, il y a des problèmes qu'on peut se poser sans trouver de résolution. Cela veut dire que ces problèmes ne sont pas « dénués de sens » mais insolubles [8].

A. BOYER remarque à ce sujet, qu'un LU devrait contenir les négations des expressions bien formées, entre autres les existentielles non bornées. En clair, il s'agit d'une pierre philosophale etc. Elles sont donc non réfutables. Leur acceptation au sein du « langage de la science » pose problème. Ainsi, on croirait qu'il y'a une connexion entre grammaticalité et scientificité. La tendance est de voir la formalisation ne pas être ni (toujours) nécessaire ni (jamais) suffisante. A cet effet,

¹ Cette thèse a été publiée par R. CARNAP dans *Logical Syntax*, 1932. Elle s'inscrit en faux contre l'idéographie non ambiguë de FREGE. Quant au débat FREGE-HILBERT sur les définitions du langage unitaire et univoque, on voit POPPER s'opposer à FREGE voir *Unended Quest*, p.29. Sur l'impossibilité de formuler les hypothèses scientifiques dans un langage « purement nominaliste », voir aussi *Conjectures and réfutations*, p.268, signalé par A. Boyer, *Introduction à la lecture de Karl Popper*, Paris : Presses de l'Ecole Normale Supérieure, 1994.

POPPER souligne ceci : « il semble presque que tout se passe comme si le symbolisme devenait une valeur en soi, qu'on doit vénérer pour sa sublime « exactitude » : une nouvelle expression de la vieille quête de la certitude, un nouveau rituel symbolique, un nouveau substitut de religion [9]. Il est à remarquer à ce propos, que le philosophe ou le mathématicien, chacun à son compte, croit que les problèmes de l'induction ou de la nécessité, peuvent entièrement trouver des solutions dans un formalisme ; telle est l'illusion du *more geometrico* que POPPER note sur l'existence d'une connexion entre grammaticalité et scientificité.

Par ailleurs, CARNAP ne considère pas que le théorème d'incomplétude remette en cause le programme de recherche formaliste de HILBERT et se réserve en ces termes. « A l'heure actuelle (1937), on ne sait pas encore si le but de HILBERT de construire une preuve de cohérence dans un métalangage finitiste, peut être atteint en dépit du résultat de GÖDEL » [7].

3 RÉFUTABILITÉ ET VÉRITÉ

Les attentes des savants au sujet des théories scientifiques sont formalisées à partir des observations. Ainsi, certaines régularités rencontrées sont anticipées par ces théories en la croyance qu'il s'agit là des lois de la nature. Dans « Connaissance objective », POPPER s'évertue et s'insurge contre la manière dont les croyances naissent et aussi contre la manière dont les théories scientifiques ont pu naître. Pour lui, c'est un problème qui relève de l'induction. En clair, c'est la répétition d'observations faites autrefois qui amène à ces croyances formalisées d'être considérées comme des théories.

La philosophie de HUME s'est plus préoccupée de ce problème dont il faut, d'après POPPER, revisiter les contours épistémologiques. Il résume donc ce problème par la question suivante : « sommes-nous justifiés à raisonner à partir de cas dont nous avons l'expérience sur d'autres cas, dont nous n'avons pas l'expérience ? »

En effet, la réponse de HUME est négative. Il estime qu'il n'y a rien de nécessaire ni même de plus probable à ce que les mêmes causes produisent les mêmes effets. Pour HUME, l'application à donner à cette croyance est à chercher par la coutume ou l'habitude et le mécanisme d'association des idées qui sont nécessaires à la vie [6].

POPPER se donne pour tâche de comprendre les conditions qui rendent possible la connaissance notamment le progrès de cette dernière. Ce mystère s'explique par la manière qui fait que l'homme ne connaissant rien d'autre que des expériences finies et limitées, peut être en mesure de connaître, de progresser dans cette connaissance et de se dire capable d'énoncer les lois universelles ou d'en avoir l'exigence d'au moins.

POPPER est plus intéressé par les lois de la nature déjà élaborées que par le mécanisme de l'induction lui-même. Il a donc traduit, en termes logiques, le problème de HUME. A cet effet, POPPER a transformé l'expression « dont nous avons l'expérience » par celle « les énoncés expérimentaux ». Il s'agit là des énoncés singuliers qui deviennent des événements observables. Et l'expression « les cas dont nous n'avons aucune expérience » par celle « les théories explicatives universelles ».

De plus, il importe de souligner que les théories explicatives universelles ne peuvent faire l'objet d'une « vérité » dont les événements observables appréhenderaient le contenu. En effet, ces théories explicatives universelles sont soit vraies, soit fausses. Il en résulte une autre reformulation du problème que pose HUME sur l'induction :

« Peut-on, par le fait d'admettre la vérité de certains énoncés expérimentaux, justifier, soit l'affirmation qu'une théorie universelle est vraie, soit l'affirmation qu'elle est fausse ? ».

POPPER s'accorde donc à cette reformulation. En clair, selon son point de vue, « Le fait d'admettre la vérité de certains énoncés expérimentaux nous autorise parfois à justifier l'affirmation qu'une théorie explicative universelle est fausse ».

Devant une pluralité de théories explicatives, POPPER estime qu'il y a lieu d'opérer une sélection ou du moins un choix de certaines d'entre elles. A ce sujet, il dit qu'« il peut arriver que nos énoncés expérimentaux nous permettent de réfuter certaines des théories concurrentes ».

Pour POPPER, et contrairement à HUME, il n'est pas question de décider de la vérité ou de la fausseté des énoncés expérimentaux. Cela signifie qu'il est hors contexte d'examiner les descriptions singulières des événements observables. Le point de vue de POPPER ne consiste pas à traiter, à la manière de HUME, des cas futurs ou singuliers dont l'expérience ne nous confère que des lois universelles et des théories concurrentes qui sont déjà établies.

De cette reformulation, il en résulte d'abord qu'on doit considérer les théories comme conjecturales. Cela veut dire qu'elles sont des suppositions. Autrement dit, il faut considérer que toutes les théories sont des hypothèses, qui sont toutes susceptibles d'être renversées ». Le bouleversement subi par la théorie de NEWTON, surtout établi par les découvertes

d'EINSTEIN, illustre bien cette affirmation de POPPER. Par conséquent, il en découle ensuite que nous pouvons mieux soutenir la fausseté de nos théories.

D'après POPPER, on est donc en présence de la méthode critique. Elle permet de faire avancer la connaissance scientifique suivant une sélection par élimination des théories grâce à la réfutabilité. Elle décrit la manière dont progresse la science. De sorte qu'on ait des théories concurrentes qui se présentent comme des solutions à un problème, et par la réfutation des théories comme moyen de diminuer ou de trancher. La réfutation d'une théorie pour une autre ne suffit pas et n'assure pas le progrès. On doit absolument admettre qu'une nouvelle théorie non seulement réussit là où l'ancienne théorie, a connu l'échec.

Si la nouvelle théorie n'est pas réfutée, elle sera « éventuellement vraie ». Ce qui constitue le tour de force de POPPER. En fait, cette vérité n'est pas celle qui va caractériser la valeur scientifique de la nouvelle théorie scientifique. Sa valeur va se montrer à l'égard du scientifique parce qu'il se peut qu'elle soit fausse à son tour. On remarquera que cette valeur devient intéressante en tant qu'objet de nouveaux tests, de nouvelles tentatives de réfutations. Cela constitue un moteur de progrès étant donné qu'elle est réfutable.

D'une manière concrète, on réalise qu'une expérience de pensée purement abstraite peut être instructive sans avoir recours à l'expérience. D'après HUME, l'habitude joue un rôle important dans la perception de l'expérience. Ainsi pour POPPER, il est possible de faire surgir l'attente d'un phénomène plutôt que la répétition, puisqu'elle présuppose la ressemblance, présuppose déjà un point de vue, une attente. En clair, il s'agit d'une théorie scientifique qui, suivant le point de vue de POPPER, n'est pas seconde par rapport à l'observation des faits. Cela n'est pas une simple adhésion passive ou aveugle à une croyance. POPPER précise que la connaissance est dite objective, quand elle est susceptible d'être critiquée. Ici, il est question d'une démarche rationnelle, celle-ci est une méthode critique et non une croyance. « Seule, écrit-il, une théorie que l'on formule...peut être objective...et c'est cette objectivité qui rend la critique possible » [9].

POPPER souligne que l'objectivité est dotée d'une méthode qui ne peut pas se résumer à observer ni à expérimenter, mais qui peut constituer essentiellement à formuler des théories réfutables. En effet, « La méthode scientifique, poursuit-il, c'est la méthode des conjectures audacieuses et des tentatives ingénieuses et rigoureuses pour les réfuter » [9].

Pour POPPER, le privilège qu'a la théorie sur le monde observé et la réfutabilité des théories scientifiques, ne font pas suite au relativisme et à la vérité de toute recherche de vérité. L'élément dominant de la discussion critique sur les théories scientifiques est donc l'idée de découverte de théories explicatives vraies. L'auteur écrit : « nous justifions nos préférences en faisant appel à l'idée de vérité, la vérité joue le rôle d'une idée régulatrice. Nous testons pour la vérité, en éliminant la fausseté [9].

Une épistémologie fondée sur les expériences d'observations immédiates faisant « tabula rasa » de toute présupposition, produit une désintégration complète. HANSON emprunte le chemin de POPPER et estime le qualificatif de subjectiviste à remplacer par autre chose. Il considère que la connaissance objective ne relève ni d'un pur formalisme ni d'une illusion d'un accès immédiat aux choses, mais elle concerne les théories scientifiques. L'objectivité sert à bâtir une connaissance objective qui est « une théorie de la connaissance dans laquelle, le sujet connaissant, l'observateur, joue un rôle certes significatif, mais finalement très restreint.

D'après POPPER, l'objectivité de la connaissance scientifique est entreposée dans les bibliothèques. En effet, elle résulte du réseau de discussion sur ces théories et sur les problèmes mis en évidence et en relation avec elles. A ce propos, POPPER écrit : « la connaissance ou la pensée, au sens objectif, consiste en des problèmes, des théories et des arguments en tant que tels. La connaissance, en ce sens objectif, est totalement indépendante de la prétention de quiconque à la connaissance, elle est aussi indépendante de la croyance ou de la disposition à l'assentiment de qui que ce soit. La connaissance, au sens objectif, est une connaissance sans connaisseur ; c'est une connaissance sans sujet connaissant » [9].

L'objectivité est donc le résultat d'un processus. Elle met aux prises des hypothèses théoriques sur la structure du monde. Ces hypothèses théoriques elles-mêmes sont indépendantes des individus vivant et pensant qui les ont produites. En fait, POPPER instaure une démarcation franche entre les contributions personnelles liées à la production des connaissances scientifiques, et les problèmes relatifs à la structure des divers produits de la science [9]. Quand bien même les théories sont produites par les scientifiques, elles deviennent finalement autonomes.

De l'opinion de POPPER, l'étude consacrée aux « produits » scientifiques semble s'avérer plus importante que celle relative à la production elle-même. Cela vaut en effet quand on se met à comprendre le fonctionnement de la science des scientifiques et de leurs méthodes d'études [9]. De toute évidence, l'objectivation part donc des effets plutôt que des causes. Pour POPPER, le mouvement consistant à partir des effets, est celui que devrait privilégier une étude scientifique et non téléologique relativement axée sur la connaissance scientifique.

Par ailleurs, POPPER reconnaît qu'il n'est pas facile de saisir la notion de connaissance sans sujet connaissant. Au fond, pour lui, tout livre intelligible contient la connaissance objective, que son contenu soit vrai ou faux, utile ou inutile. Donc, dans ce cas, sa lecture est à la rigueur accidentelle.

En clair, les théories scientifiques ont la potentialité d'être comprises qu'un savoir ou une connaissance scientifique renferme une vérité qui est fondamentale, et qui va les distinguer de simples pages avec l'encre. Il en résulte que la connaissance objective émerge de la connaissance objective, parce que de nouveaux buts créant de nouveaux problèmes apparaissent. POPPER affirme en effet que « ce n'est pas nous qui créons la distinction entre nombres pairs et impairs : c'est une conséquence intentionnelle et inévitable de notre création » [9]. Ce qui laisse dire que ce monde est un produit dû à l'activité humaine. Sur ce point, POPPER souligne que le monde transcende en même temps ses créateurs.

La possibilité de trouver un fondement stable à l'objectivité scientifique est de mise et pose de sérieux problèmes. En effet, POPPER remarque clairement que l'objectivité scientifique est produite par les hommes de science et par elle-même. Elle se voit gagner continuellement par la remise en cause des connaissances préalables. Pour ce faire, il est impératif d'assumer l'intersubjectivité et le caractère dynamique de l'objectivité scientifique aux fins de faire adhérer les nouveaux scientifiques à la nouvelle théorie ainsi créée.

4 CONCLUSION

Concluons avec Edgar MORIN que l'échec du formalisme hilbertien marque l'insuffisance et les limitations intrinsèques des systèmes formels. En ce sens, l'effondrement du rêve formalisateur a conduit à réhabiliter le langage ordinaire égorgeant des complexités qui sont éliminées par les systèmes formels. Il en résulte que les systèmes formels théoriquement puissants et riches ne peuvent pas éliminer l'indécidable et le contradictoire.

Dans ce et en vue de son opérationnalité et de sa fonctionnalité, il suffit, pour ce faire, de disposer d'une pensée complexe qui comporte le non-formalisable, le non-logifiable ainsi que le non-théorémisable. D'où, il sied de souligner que la pensée, même mathématique ne peut s'enfermer dans la logique, mais elle doit plutôt l'emporter à titre de bagage. De toute façon, la pensée doit être trans-logique. Donc, la pensée progresse en transgressant.

REFERENCES

- [1] E. Morin : *Logique et contradiction* (atelier sur la contradiction), Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Étienne, Paris : Université de Paris V, 19-21 mars 2009.
- [2] A. Boyer, « Falsifiabilité », *Encyclopédie Philosophique Universelle. Les notions philosophiques*, Tome I, Paris : PUF, p.951-953,1990.
- [3] Jean Ladrière, « Réfutation », *Encyclopédie Philosophique Universelle. Les notions philosophiques*, Tome II. Paris : PUF, pp.203-224,1990.
- [4] J.- Y. Girard, *Le Point aveugle*, Tome 1, vers la perfection, Hermann, 2007.
- [5] Karl R. Popper : *La logique de la découverte scientifique*, Collection bibliographie scientifique, Paris : Payot, pp 90-94.
- [6] K.R. Popper : *La connaissance objective*, Paris : Flammarion, 1998.
- [7] A. Boyer : Introduction à la lecture de Karl Popper, Paris : Presses de l'Ecole Normale Supérieure, 1994.
- [8] K. R. POPPER: *The Open Universe*, Hutchinson, 1982, p.40.
- [9] K. POPPER : *La logique de la découverte scientifique*, cité par A. BOYER, voir 7.

UN PREALABLE INDISPENSABLE SUR LE CALCUL DU MULTIFLOT

Fernand MAMANYA TAPASA

Université Pédagogique Nationale, Département de Mathématique et Informatique, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: In this article, we added to the mathematical definition of multifold problem issue suggested in the literature, the constraint of safeguarding that forms a condition to multifold calculation in a road network.

KEYWORDS: Multifold problem, complement, Conservation.

RÉSUMÉ: Dans cet article, nous avons ajouté à la définition mathématique du problème du multiflot proposée dans la littérature, la contrainte de la conservation qui constitue un préalable au calcul du multiflot dans un réseau de transport.

MOTS-CLEFS: Problème du multiflot, Complément, Conservation.

1 INTRODUCTION

Bentz, C[3], soutient que dans la littérature, les problèmes de flot et du multiflot en mode classique ont fait l'objet d'articles, mémoires et thèses de doctorats du fait de son intérêt pratique et théorique. Ce sont des problèmes aux applications industrielles nombreuses, notamment dans la conception et l'exploitation de réseaux de télécommunication, de réseaux de transport routier,... Malgré ces nombreuses études, on n'est pas parvenu à la généralisation parfaite du problème de flot. Le principe de la conservation de multiflot ou principe de la stabilité de multiflot n'est pas vérifié[6]. Il devient alors difficile sinon impossible de calculer le multiflot. La vérification de ce principe étant supposée comme préalable indispensable pour un réseau de transport pouvant faire circuler le flot ou le multiflot.

En outre, ces nombreuses applications font appels aux variables floues ou imprécises, l'application en mode flou de ce problème permet une interprétation proche de la réalité. Bozhenyk et al.[5], soutiennent que le problème de flot flou est moins étudié. Kaur[8], proposent un nouvel algorithme pour résoudre le problème du plus court chemin en environnement flou. C'est la méthode de comparaison des nombres flous. Bagherian[7], propose une approche du réseau résiduel flou pouvant supporter le flot du coût minimum. Han[9], présentent le concept de la fonction maximum d'écoulement et applique la théorie de l'incertitude au problème de flot maximal.

Au regard de ces deux approches (déterministe et flou), nous proposons redéfinir dans cet article, le problème du multiflot en mode déterministe et en mode flou pour arriver à sa parfaite généralisation.

L'objectif principal dans cet article est de prouver que le principe de la conservation s'applique bien au problème de flot et à celui du multiflot. Cette application fait du problème du multiflot une généralisation parfaite du problème de flot dans un réseau de transport.

Notre contribution dans cet article est d'avoir ajouté à la définition mathématique classique du multiflot en mode déterministe et à celle du mode flou, la contrainte supplémentaire, préalable au calcul du multiflot qui rend possible le principe de la conservation de multiflot.

La structure de cet article se présente de la manière suivante :

Section 2 : Présentation du problème de flot

Section 3 : Présentation du problème de multiflot

Section 4 : Introduction de la contrainte supplémentaire.

Une conclusion sanctionne la fin de cet article.

2 PROBLÈME DE FLOT

Considérons le réseau de transport $R=(X, K, C)$ où X est l'ensemble des nœuds du réseau, $K=X \times X$, le produit cartésien de X dont les éléments sont des arcs (chaines) et C l'ensemble des capacités des arcs de R .

Soit deux nœuds de R : P_1 et P_N et appelons P_1 entrée et P_N sortie de R . Soient E_i , l'ensemble des communications du réseau partant du point P_1 et E'_i , l'ensemble des communications du réseau qui finissent au point P_N . Comme tous les arcs (arêtes) sont valus positivement, R est un réseau de transport.

Le problème de flot consiste à déterminer la quantité des matières optimale circulant entre la source S_1 et le puits P_N en transitant par plusieurs points. Une fonction $f = x(k_{ij})$, définie sur l'ensemble K satisfaisant aux conditions :

$$\sum_{k_{ij} \in E_i} x(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E'_i} x(k_{ji}) = 0, \forall i \neq 1, N \quad (1)$$

$$x_1 = \sum_{k_{ij} \in E'_i} x(k_{ij}) = -x_N, i=1 \text{ ou } i=N \quad (2)$$

$$0 \leq x(k_{ij}) \leq c(k_{ij}), k_{ij} \in K \quad (3)$$

s'appelle **flot** du réseau R (compatible avec la fonction $c(k_{ij})$, $k_{ij} \in K$ et dirigé de P_1 vers P_N (Karima[4], Mamanya[6]).

Nota : Si les ensembles P ou C sont flous, la fonction $f = \tilde{x}(k_{ij})$, définie sur l'ensemble $\tilde{K}$ satisfaisant aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_{ij} \in E_i} \tilde{x}(k_{ij}) - \sum_{k_{ji} \in E'_i} \tilde{x}(k_{ji}) = 0, \forall i \neq 1 \text{ ou } i \neq N \\ \tilde{x}_1 = \sum_{k_{ij} \in E'_i} \tilde{x}(k_{ij}) = -\tilde{x}_N, i = 1 \text{ ou } i = N \\ 0 \leq \tilde{x}(k_{ij}) \leq \tilde{c}(k_{ij}), k_{ij} \in \tilde{K} \end{array} \right. \quad (4)$$

s'appelle **flot flou** du réseau $\tilde{R}$ (compatible avec la fonction $\tilde{c}(k_{ij})$, $k_{ij} \in \tilde{K}$ et est dirigé de P_1 vers P_N).

Le nombre $x_1 = -x_N$ s'appelle valeur du flot $x(k_{ij})$, $k_{ij} \in \tilde{K}$.

(1) et (4) indiquent que la somme de flots sortant à un nœud égale à la somme de flot entrant en ce même nœud, sauf pour les sommets entrée et sortie du réseau. C'est le principe de la conservation de flot.

La relation (3) indique que la valeur du flot est toujours supérieure ou égale à 0 et ne dépasse pas la valeur de la capacité de l'arc. En cas de nombres flous triangulaires, la relation (6) est vérifiée si la valeur modale du flot flou est inférieure ou égale à la valeur modale de la capacité.

Dans la pratique, le flot peut signifier le temps, le coût, la quantité du carburant consommée entre deux arêtes en transitant sûrement sur d'autres, l'état de route,...

3 PROBLÈME DU MULTIFLOT

Le problème du multiflot est une application du problème de transport où plusieurs types de produit doivent être transportés des sources de ces produits à des destinations précises à travers un réseau, par exemple routier. Chaque route a une capacité de transport, et il y a des demandes associées à chaque paire de source-destination.

Quand il s'agit d'un seul type de produit, d'une seule source et d'une seule destination, le problème est facile à résoudre. C'est celui de flot. Mais déjà avec deux types de produits, deux sources et deux destinations, le problème devient difficile et complexe. C'est celui du multiflot qui s'énonce de la manière suivante :

Soit $G = (P, K, C)$ un graphe orienté ou non où P est un ensemble formé par n sommets et K un ensemble formé de m arêtes (ou arcs). A chaque arête (arc) est attribué une capacité c_{ij} qui décrit la borne supérieure du flot sur cet arc ; $x_{ij} \leq C_{ij}$.

Soit L une liste des paires (sources s_i , destinations p_i) des sommets de G (avec $s_i \neq p_i, \forall i$). Ces paires sont appelées des **liaisons** et les s_i et p_i sont appelés **terminaux**. Tout sommet extrémité d'une liaison est appelé **sommet terminal**. G est appelé **graphe support**.

De plus, nous considérons des flots de k types de produit distincts entre des paires de nœuds origine - destination. Le flot du type de produit k sur un

arc $(k_{ij}) \in K$ s'écrit par $x_{ij}^{(k)}, k \in \{1, \dots, |K|\}$.

Le problème du multiflot consiste à déterminer les quantités optimales de flots de k types de produits circulant entre s_i et $p_i, s_i \neq p_i$.

On a donc :

$$(\text{Opt } Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K C_{ij} x_{ij}^{(k)} \quad (7)$$

$$s/c \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K x_{ij}^{(k)} \leq C_{ij}, i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

$$(Costa[6], Karima[4], Potts[7], Mamanya[5]) \quad (9)$$

Si de plus, P ou C est flou, alors les relations de (7) à (9) deviennent:

$$(\text{Opt } Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \tilde{c}_{ij} \tilde{x}_{ij}^{(k)} \quad (10)$$

$$\text{Sous condition: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K \tilde{x}_{ij}^{(k)}, i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n \\ \tilde{x}_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0 \quad (12)$$

Dans la définition mathématique de l'un ou de l'autre mode, on ne fait pas allusion au principe de la stabilité de multiflot. Ces deux définitions sont incomplètes et méritent d'être complétées. La section suivante répond à cet objectif.

4 INTRODUCTION DE LA CONTRAINTE SUPPLÉMENTAIRE

En ajoutant à la définition mathématique du mode déterministe ou classique, la contrainte supplémentaire :

$$\sum_{k=1}^K x_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^K x_{ji}^{(k)} = 0, \forall i=2,3,\dots, n-1. \quad (12)$$

On obtient

$$(\text{Opt } Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K C_{ij} x_{ij}^{(k)} \quad (13)$$

Sous conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K x_{ij}^{(k)} \leq C_{ij}, i = 1, \dots, n \text{ et } j=1, \dots, n \quad (14) \\ \sum_{k=1}^K x_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^K x_{ji}^{(k)} = 0, \forall i=2,3, \dots, n-1. \quad (15) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (16) \end{array} \right.$$

Et, en mode flou, on obtient :

$$(\text{Opt } Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \widetilde{C}_{ij} \widetilde{x}_{ij}^{(k)} \quad (17)$$

sous conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K \widetilde{x}_{ij}^{(k)} \leq \widetilde{C}_{ij}, i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, n \quad (18) \\ \sum_{k=1}^K \widetilde{x}_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^K \widetilde{x}_{ji}^{(k)} = 0, \forall i=2,3, \dots, n-1. \quad (19) \\ \widetilde{x}_{ij} \geq 0 \quad (20) \end{array} \right.$$

(11) montre que la somme des flots entrant en un sommet égale à la somme des flots sortants en ce même sommet. Sauf pour les sommets sources et puits. Ce qui prouve la conservation du multiflot flou.

5 CONCLUSION

Cet article vient de doter le problème du multiflot d'une définition complète conduisant à la généralisation et au calcul du multiflot dans un réseau de transport. C'est par l'ajoute d'une condition supplémentaire à la définition proposée par Bentz [3], karima[4], Mamanya[5], Potts [7] que le calcul de la détermination du multiflot peut avoir un sens dans un réseau de transport. Le problème étant maintenant bien circonscrit, nous invitons les chercheurs :

- à l'appliquer dans les différents domaines de la vie où ce problème intervient,
- à redéfinir le problème de la multicoupe associé au problème du multiflot dans un réseau de transport.

REFERENCES

- [1] Bagherian, M. A Fuzzy Residual Network Approach to Minimum Cost Flow problem with Fuzzy parameters, ARPN Journal of Science and Technology, Vol., No. 10, 2012.
- [2] Bozhenyuk, A., Gerasimenko, E and Rozenberg, I. The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost flow Finding n Fuzzy network, a forthcoming article, Russia.
- [3] Cédric Bentz : Résolution exacte et approchée de problème de multiflot entier et de multicoupe : Algorithmes et complexité, thèse de doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2006.
- [4] Karima – Marcus. Multiflots, métrique et graphes h – panfaits : Les cycles impaires dans l'optimisation combinatoire, thèse de doctorat, université Joseph – Grenoble 1, 1996.
- [5] Mamanya Tapasa, F. Etude du Multiflot dans un Réseau de Transport. Cas de la ville province de Kinshasa, mémoire de DEA, Université Pédagogique Nationale, R.D.C, 2012
- [6] Marie Christine Costa. Multicoupe et multiflots entiers, Lausanne 2007.
- [7] Renfrey Potts, Robert: Flows in Transportation Network Academic Press, New York and London, 1972, pp24–31.

Incidence de la monnaie sur le PIB en République Démocratique du Congo : Une approche empirique de vérification de l'hypothèse de neutralité monétaire

[Impact of the currency on the GDP in Democratic Republic of Congo : An empiric approach of verification of the monetary neutrality hypothesis]

Janvier EGUDRA NYADRI

Faculté des Sciences Economiques et de Gestion,
Université de Kisangani,
RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the ***Creative Commons Attribution License***, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: La neutralité de la monnaie est une hypothèse de prédilection des économistes du courant libéral, selon laquelle la quantité de monnaie existante n'affecte pas l'économie (production, revenu, investissement, épargne, prix relatifs). Cette hypothèse est mise en rude épreuve suite aux pertinentes conclusions de l'analyse de John Maynard Keynes très dominantes après la deuxième guerre mondiale, considérant que toute offre ne rencontre pas nécessairement sa propre demande.

A la lumière de ce débat, la présente étude s'est interrogée sur la validité de cette hypothèse théorique en RDC, en partant des conclusions de la nouvelle synthèse néoclassique. Il s'est agi d'analyser le rapport entre les séries annuelles : PIB et de masse monétaire réels, sur une période s'étalant de 1960 à 2013 en vue d'inspecter les effets des chocs d'impulsion monétaire sur la production en RDC. Cette étude fondée sur l'hypothèse de non neutralité monétaire de l'inspiration keynésienne, est conduite au moyen du modèle vectoriel autorégressif VAR avec restrictions spécifié dans le cadre de cointégration et utilisé pour de séries non stationnaire et cointégrées, appuyé par la technique documentaire.

L'estimation du modèle VAR par la détermination du Lag maximum, illustre que le paramètre associé à la production, décalée d'une période est statistiquement significatif. C'est-à-dire, en admettant une possibilité de se tromper à 5%, la production demeure significativement fonction positive de la variation de masse monétaire. Ce résultat confirme donc l'hypothèse de base, et permet d'affirmer que la monnaie n'est pas neutre en RDC de 1960 à 2013.

KEYWORDS: Masse monétaire (MM), Neutralité de la monnaie, Produit Intérieur Brut (PIB).

1 PROBLEMATIQUE

L'étude de la monnaie ainsi que son incidence sur l'économie est l'une des plus vieilles préoccupations des chercheurs en science économique. Cette préoccupation apparaît à nos jours comme la principale anxiété indéniable à la politique monétaire, qui est l'une des formes les plus anciennes de l'intervention des pouvoirs publics au sein de l'activité économique, pour autant que l'on date souvent ses premières manifestations du début des années 1837 (Mallik et Chowdhury, 1999).

Malgré cette ancienneté, les jugements les plus divers ont toujours été portés sur son efficacité quasi-miraculeuse pour les classiques, à l'affirmation par les Keynésiens de son inutilité quasi-totale pour remédier aux principaux maux économiques se traduisant par les déséquilibres des fondamentaux macroéconomique abrégés dans le carré magique de Nicholas Kaldor. Le fondement de cette divergence des vues entre ces deux écoles est principalement dû à l'hypothèse de la neutralité monétaire qui, dans son acception néoclassique considère que la monnaie n'aurait pas, au moins à long terme,

d'influence sur l'activité réelle ; toute augmentation de la masse monétaire en circulation ayant pour seule conséquence une hausse proportionnelle du niveau général des prix (Irving Fisher, 1909).

Autant dire, la neutralité monétaire consiste en l'absence d'effets de la masse monétaire sur l'économie dans son ensemble. Ce qui revient à considérer que la quantité de monnaie existante n'affecte pas l'économie (production, revenu, investissement, épargne, prix relatifs (Goodfriend et King, 2000)).

Les études empiriques récentes révèlent que l'accroissement de la quantité de monnaie par les pouvoirs publics pour stimuler l'activité entraîne dans la plupart des pays l'augmentation des encaisses réelles des agents ; cela a pour effet de leur permettre davantage d'achats. La demande augmente donc fortement, et l'offre doit s'y adapter. Mais à court terme, l'offre ne peut pas s'adapter (car les facteurs de production sont pleinement employés, et il est impossible d'augmenter la production) ; les prix augmentent donc (car il y a peu de produits sur le marché), ce qui a pour effet de réduire la valeur réelle des encaisses.

Plusieurs recherches ont abordé cette question de l'interaction entre les secteurs monétaire et réel de l'économie dans plusieurs pays, principalement Africains. Parmi ces travaux, il y en a qui ont planché le rapport entre l'inflation et la croissance économique, et ont dans l'ensemble approuvés les effets antinomiques de l'hyperinflation sur le niveau du PIB. Néanmoins, une faible inflation a été révélée comme élément stimulateur de la croissance économique dans la plus part d'économies étudiées (Tun Way, 1959 ; Paul Krugman et al, 1997 ; Thirwall et Barton, 1971 ; Syarel Diawel, 1970)

D'autres se sont préoccupés du rapport entre l'inflation et le chômage. Les résultats de ces études suggèrent largement l'opportunité d'un arbitrage par les pouvoirs publics, entre ces deux objectifs de nature contra-cycliques, en vue de réaliser la performance économique, selon que l'on soit dans la visée de la stabilité de prix ou de la relance économique pour réaliser le plein emploi. Toutefois, une contre lecture de l'un des analystes dans cette tendance démontre que l'arbitrage est possible seulement à court terme, d'autant plus qu'à longue période, les agents économiques ne sont pas victimes d'illusion monétaire, et finissent par ajuster leur comportement en réponse aux comportements des instruments cibles de la politique économique. Et donc, toute politique d'expansion de la masse monétaire ne finit que par générer l'inflation à long terme (William Phillips, 1957 ; F. Perroux, 2005 ; G. Koenig, 2000 ; Bernanke et Mishkin, 2000).

En RDC, l'histoire de l'expansion de la production intimement liée à la politique monétaire s'est caractérisée par les phases essentielles ci-après : la période 1960 à 1966 a été d'abord marquée par la guerre civile très meurtrière qui a désorganisé la vie économique du pays. L'éclatement du pays en plusieurs pouvoirs sécessionnistes a rendu peu fiable les données économiques, du reste, très contestables sur la période ; une phase de croissance de production allant de 1967 à 1974 avec un taux de croissance réel du PIB de 7% en moyenne ; une phase de crise de 1975 à 1980 avec un taux de croissance économique de 0,8 % ; une phase qu'on qualifierait de déclin économique à partir des années 1990¹.

Cette dernière phase est marquée par les caractéristiques ci-après : l'indice des prix à la consommation a augmenté en moyenne de 28% entre 1997 et 2000 et en 2001 il est tombé à 99%, alors qu'au Cameroun la moyenne de hausses a été de 2,8 % entre 1997 et 1999 et en 2001 il a atteint 6 % et pour le Gabon il s'est observé un taux moyen de 2 % entre 1997 et 2000 (KIKANDI KIUMA, D.E.A. 2004). Tous ces indicateurs, bien qu'ils portent sur une courte période, montrent que le Cameroun et le Gabon présentent des meilleures performances. La guerre qui, de surcroît, a sévi en RDC a aggravé la situation.

En effet, depuis les années 1980, l'économie de la RDC est entrée dans une phase de crise structurelle profonde qui se traduit par la baisse systématique de tous les indicateurs économiques tels que le taux de croissance annuelle, le produit intérieur brut (PIB), les indicateurs de production dans l'agriculture et l'industrie. Cette crise s'est particulièrement aggravée depuis l'année 1990 avec les réformes politiques et l'arrêt du financement extérieur par le biais de la coopération bilatérale ou multilatérale.

Sur les plans monétaire et financier, l'objectif déclaré de la BCC s'est figé à obtenir et de maintenir la stabilité des prix à travers l'ajustement de l'offre de monnaie à sa demande². Pour mettre en œuvre cette politique, l'institut d'émission devrait

¹ Rapport de la BCC, index d'informations générales sur le cadrage macroéconomique, Kinshasa 2000.

² Rapport du Comité de Pilotage de la Politique Monétaire de la BCC, consulté le 13 juillet 2010 in magazine économique sur www.bcc_drc.org.

régulièrement déterminer le cadre de pilotage à travers lequel la politique monétaire est mise en œuvre au cours de l'année. A partir de ce cadre, elle décide la mesure dans laquelle il convient de resserrer ou d'assouplir les conditions monétaires.

Les résultats partiellement discutables issus de la mise en œuvre de la politique monétaire attestent d'une part l'inefficacité des mécanismes de transmissions des chocs monétaires sur l'économie congolaise. L'inélasticité des taux d'intérêts des banques commerciales produit des effets inattendus de la monnaie sur l'économie réelle. Pourtant, la politique monétaire menée par la BCC était censée se répercuter sur le niveau de prix comme objectif principal, ainsi que sur le niveau de la production intérieure en vue d'enclencher le cycle d'une croissance économique durable et structurée sans produire d'effets pervers au sein de l'économie.

Ce faisant, l'exploration de la littérature renseigne dans la plupart des cas sur les effets de la monnaie sur les autres grandeurs macroéconomiques suivant les objectifs de chaque recherche. Ainsi, en complément de cette revue de littérature, la présente étude entend se pencher sur la vérification de l'hypothèse de la neutralité monétaire au sein de l'économie de la RDC. Il s'agit concrètement d'analyser la répercussions des chocs d'impulsions monétaires sur l'économie étudiée, mieux le rapport entre les séries annuelles de PIB et de masse monétaire réels, sur une période s'étalant de 1960 à 2013 en vue d'en déduire l'impact.

A cet effet, l'objectif de la présente étude consiste à démontrer comment les chocs d'impulsion monétaire ont-ils affectés le volume des productions en RDC de 1960 à 2013. Le fondement théorique de l'étude étant puisé de la synthèse de l'analyse néoclassique, il est admis au titre d'hypothèse, que toute modification du volume de la masse monétaire serait fonction positive du volume de la production nationale. Cette hypothèse est opérationnalisée à travers l'analyse du rapport entre les agrégats monétaires et réels représentés par les variables ou séries annuelles de PIB réel (y_t) et d'agrégat monétaire (m_t) sur une période s'étalant de 1960 à 2013.

2 METHODOLOGIE

La vérification de cette hypothèse est faite au moyen du modèle vectoriel autorégressif VAR avec restrictions spécifié dans le cadre de cointégration et utilisé pour de séries non stationnaire et cointégrées.

Cette approche économétrique est convoquée à ce niveau en vue de capturer les interdépendances entre ces deux séries temporelles : PIB réel (y_t) et la monétaire (m_t) de 1960 à 2013. Elle a été appuyée par la technique documentaire, qui a permis, grâce à la consultation des différents ouvrages, mémoires, articles de revues, notes des cours, différents rapports de la BCC et autres publications ayant trait à l'étude, d'accéder aux informations relatives à la politique monétaire menée au sein de l'économie de la RDC.

3 PRESENTATION DES RESULTATS

Les résultats que nous présentons à ce niveau sont des séries annuelles issues des statistiques de la Banque Centrale du Congo et de l'institut national des statistiques. Une chronique (voir tableau n°01 en annexes) relative aux facteurs déterminants de notre modèle, à savoir : le PIB réel (y_t) et la masse monétaire réelle (m_t) de 1960 à 2013.

4 ANALYSE DES RESULTATS

4.1 DÉTERMINATION DU DEGRÉ D'INTÉGRATION DES VARIABLES À NIVEAU³

4.1.1 TEST DE STATIONNARITÉ DE DICKEY FULLER AUGMENTÉ (ADF TEST)

Les tests de stationnarité permettent de vérifier si une série est stationnaire ou non. Il y a deux types de test différents : les tests de stationnarité, comme le test KPSS, pour lesquels l'hypothèse nulle H_0 est que la série est stationnaire, et les tests de racine unitaire comme le test de Dickey-Fuller, le test augmenté de Dickey-Fuller (ADF), ou encore le test de Phillips-Perron (PP) pour lesquels l'hypothèse nulle est que la série a été générée par un processus présentant une racine unitaire, et donc, qu'elle n'est pas stationnaire.

XLSTAT propose le test KPSS, le test de Dickey-Fuller et sa version augmentée ainsi que le test de Phillips-Perron. Pour ce qui nous concerne, nous examinons l'ordre d'intégration de nos deux variables le PIB réel (y_t) et la masse monétaire réelle⁴ (m_t) par les tests de racine unitaire comme le test de Dickey-Fuller. Il est à noter que lesdits tests sont conçus sous l'hypothèse que le terme d'erreur, dans la régression suit une distribution normale.

Ainsi, nous devons corriger le processus générateur des données en vérifiant la significativité du Lag dans cette régression aussi bien celle du terme constant que du trend, ainsi que l'absence d'auto corrélation (**Procédure de Campbell et Perron**).

En appliquant cette procédure, nous avons trouvés les résultats ci-après :

Variables	ADF test	Stationnarité à niveau			Stationnarité en différence			Décis°
		Tendance	Constance	Sans	Tendance	Constance	Sans	
PIB réel	-2,5534**	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	I(1)
MM réelle	-6,2644***	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	I(1)

Les signes (**), (***) représentent respectivement la stationnarité des variables au seuil de 5% et 1%.

Il ressort des résultats ci-dessus que le PIB réel et la masse monétaire réelle sont I(1) c'est-à-dire que ces variables (PIB réel et Masse monétaire réelle) sont stationnaires à la première différence pour un modèle sans tendance ni terme constant. Elles sont alors intégrées de même ordre.

Du fait que nos deux variables n'aient pas été intégrées en niveau I(0), leur stationnarité à la première différence I(1) invoque probablement l'existence d'une relation de long terme d'autant plus qu'elles sont intégrées au même niveau. Nous pouvons, au regard de ces signaux, conclure que les variables PIB réel et Masse Monétaire réelle sont intégrées d'ordre 1. En d'autres termes, les variances de ces deux variables sont infinies. Il se pourrait qu'une combinaison linéaire de ces deux variables soit stationnaire auquel cas on dirait qu'elles sont cointégrées. D'où la nécessité pour nous de procéder à la vérification du lien de causalité entre ces deux variables par les tests ci-dessous :

4.1.2 TESTS DE CAUSALITÉ DE GRANGER

Le test de causalité de Granger permet de vérifier l'existence d'une relation éventuelle entre les variables sous examen. Celui-ci sera effectué à un Lag maximum de 2, nous émettons les hypothèses suivantes :

✓ H_0 : Pas de causalité entre LMM_t et LY_t si la probabilité est supérieure au seuil de signification de 5% ($p > 0,05$)

H_1 : il y a causalité entre LMM_t et LY_t si cette probabilité est inférieure au seuil ($p < 0,05$)

✓ H_0 : pas de causalité entre LY_t et LMM_t si la probabilité est supérieure au seuil ($p > 0,05$)

H_1 : il y a causalité entre LY_t et LMM_t si la probabilité est inférieure au seuil ($p < 0,05$)

Les analyses effectuées présentent les résultats suivants :

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 06/09/16 Time: 22:36			
Sample: 1960 2013			
Lags: 2			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
LMM does not Granger Cause LY	52	7.28846	0.0017
LY does not Granger Cause LMM		4.83020	0.0124

Source : Nos estimations sur base du logiciel Eviews.

⁴ Pour avoir la masse monétaire réelle, nous avons divisé la masse monétaire courante par l'indice des prix à la consommation (IPC).

A la lecture du tableau ci-dessus qui étale le test de causalité à un Lag égal à 2, il est nettement perceptible que les deux hypothèses nulles, sont rejetées (Absence de causalité de LMM_t vers LY_t et absence de causalité de LY_t vers LMM_t). On a ainsi une **causalité bidirectionnelle**, on parle de boucle rétroactive (**feedback effect**). Ce qui signifie qu'il existe une relation bidirectionnelle entre la masse monétaire et la production nationale car les différentes probabilités du test dans les deux cas sont respectivement de **0,0017** et **0,0124**, toutes, inférieures au seuil de signification. Cela illustre que la monnaie exerce un impact non négligeable sur le volume de la production nationale de la RDC.

• Détermination du Lag maximum

L'estimation du modèle VAR avons-nous dit, nécessite le choix du nombre de décalage ou du Lag maximum. La théorie sur le VAR(p), nous dit qu'en quand des séries trimestrielles, le Lag maximum par défaut est 8 ; pour une série annuel ayant moins d'observations, le Lag doit être inférieure à 8 et doit avoir le caractère binaire, par exemple (1,2). On retient le retard qui minimise les critères d'information Akaike Info Criterion (AIC), schwarz Criterion (SIC) et Hannan-Quinn Criter (HIC).

VAR LagOrder Sélection Criteria						
Endogenous variables: LY LMM						
Exogenous variables: C						
Date: 06/09/16 Time: 22:41						
Sample: 1960 2013						
Included observations: 49						
Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-40.77606	NA	0.019648	1.745961	1.823179	1.775258
1	41.44445	154.3732	0.000807	-1.446712	-1.215061	-1.358824
2	61.69639	36.37082*	0.000416*	-2.110057*	-1.723971*	-1.963576*
3	64.40917	4.650478	0.000440	-2.057517	-1.516997	-1.852444
4	67.94337	5.770132	0.000450	-2.038505	-1.343551	-1.774840
5	69.78238	2.852346	0.000495	-1.950301	-1.100913	-1.628045
* indicates lag order selected by the criterion						
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)						
FPE: Final predictionerror						
AIC: Akaike information criterion						
SC: Schwarz information criterion						
HQ: Hannan-Quinn information criterion						

Source : nos estimations sur base du logiciel Eviews.

Ainsi, pour l'estimation de notre modèle, le retard maximum retenu est de 2 car ce Lag minimise les différents critères d'information (AIC, SC, HQ).

• Estimation du modèle

A ce niveau, nous passons à l'estimation du modèle qui consiste à établir la relation entre la masse monétaire et le PIB réels. Avant de passer à l'estimation du modèle, il sied de souligner que toutes les deux variables sont stationnaires. Ainsi donc, les résultats du modèle de long terme estimé par la méthode des moindres carrés ordinaires (*les variables sont en log*), sont présentés ci-après :

$$D(LY) = 0.004456 + 0.723D(LY(-1)) - 0.055D(LY(-2)) + 0.014931D(LMM(-1)) + 0.006835D(LMM(-2))$$

$$t\text{-stat } (0.78489) \quad (5.85357) \quad (-0.55293) \quad (1.41803) \quad (0.66973)$$

$$R^2 = 0.530809$$

$$F_{\text{statistic}} = 13.01027$$

Il ressort de cette estimation que le paramètre associé à la production, décalée d'une période est statistiquement significatif. Par ailleurs, la constante et les autres paramètres restent en revanche sans impact significatif sur la production.

Il est à signaler tout de même que, bien que sans impact significatif sur le plan statistique, la masse monétaire présente une influence positive sur la production du pays. De ce qui précède, le coefficient de détermination tiré du tableau

d'estimation en annexe nous renseigne que $R^2 = 0.530832$, c'est-à-dire, le modèle ci-dessus est expliqué à 53,08%. Comme le $F_{cal} (13.01027) > F_{th}(3,89)$ et la probabilité de $Prob_F (0.000000) < 0,05$; donc on rejette l'hypothèse nulle et le modèle est dit globalement significatif.

Ce résultat traduit dans la pratique, l'incidence de la politique monétaire sur la production en RDC. Bien qu'il existe d'autres variables qui entrent en jeu dans la planification de la relance économique au pays dont notamment le recours à d'autres instruments conjoncturels de la politique économique tels la politique budgétaire, la politique de prix...

$$D(LMM) = -0.051833 - 0.395756(LMM(-1)) - 0.255235(LMM(-2)) + 2.880188(LY(-1)) + 2.314660(LY(-2))$$

$$\text{t-stat} \quad (-0.69474) \quad (-2.86015) \quad (-1.90323) \quad (1.77451) \quad (1.77446)$$

$$R^2 = 0.263656$$

$$F_{statistic} = 4.117706$$

De même, en partant de cette estimation, seul le paramètre associé à la masse monétaire, avec décalage d'une période est significatif au seuil de 0,05. Les autres paramètres restent sans impact significatifs mais la production exerce une influence positive sur la monnaie durant la période sous étude tel que nous renseigne le tableau en annexe.

- **Analyse de la stabilité du VAR estimé**

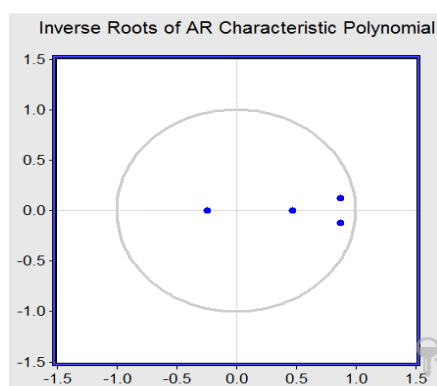


Figure 1. Condition de stabilité de VAR

A la lecture du présent graphique, il s'observe que le modèle VAR(p) ainsi estimé est stable au vue des paramètres qui sont intégralement contenus dans le cercle. Cette situation s'observe clairement dans le tableau en annexe. Passons alors à l'analyse résiduelle.

- **Analyses post estimatoires ou résiduels**

- 1. Test d'autocorrélation des erreurs**

Il se dégage de la présente analyse que les résidus de notre estimation ne sont pas liés ; en d'autres termes le test démontre qu'il y a absence d'autocorrélation des erreurs au vue des probabilités associées à la statistique de LM test à un Lag optimal de 2 qui sont largement supérieures au seuil de 0,05 ; voir tableau en annexe.

- 2. Test d'hétéroscédasticité**

Le présent test témoigne en faveur de l'absence d'une hétéroscédasticité des erreurs. En d'autres termes, la variance des erreurs de l'estimation VAR est constante d'une période à une autre ; ce qui permet de conclure que les erreurs sont homoscédastiques au vue de la probabilité associée à Chi-deux ($0,5230 > 0,05$), voir tableau en annexe. L'analyse résiduelle de nos variables révèle bien à ce niveau qu'il n'existe pas d'autocorrélation des erreurs, ni l'hétéroscédasticité des erreurs.

Cette évidence empirique nous permet maintenant de passer à l'analyse des chocs afin de déterminer les fonctions de réponses impulsionnelles de la monnaie vers la production, et vice versa.

- Analyse des chocs

3. Fonctions des réponses impulsionnelles

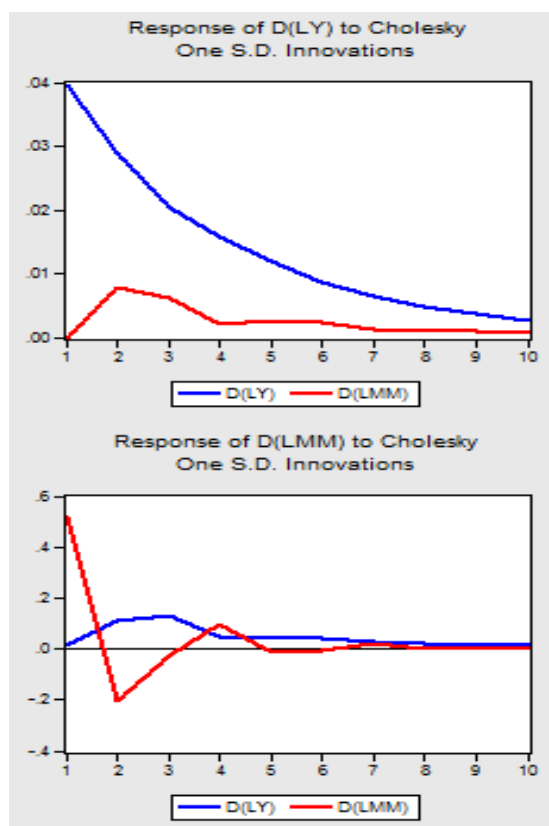


Figure n°2. Analyse des réponses impulsionnelles

De la lecture du présent graphique, il se dégage dans le comportement de nos variables une situation selon laquelle une innovation (choc) dans l'écart type de la production de l'ordre de 1% entraîne un changement positif dans la production et dans l'écart type de la monnaie mais dans des proportions beaucoup plus moindre.

Cette situation s'éclaircit d'avantage dans la lecture du tableau en annexe sur les réponses impulsionnelles. En ce qui est de la variation de la masse monétaire, il s'observe qu'un choc d'1% dans l'écart type de la monnaie à la 2^{ème} et 3^{ème} période entraîne une variation positive de la monnaie respectivement de **0,1073** et **0,1279** et provoque une diminution de la production dans la même période de l'ordre respectivement de **-0,20562** et **-0,02889**.

4. Décomposition de la variance

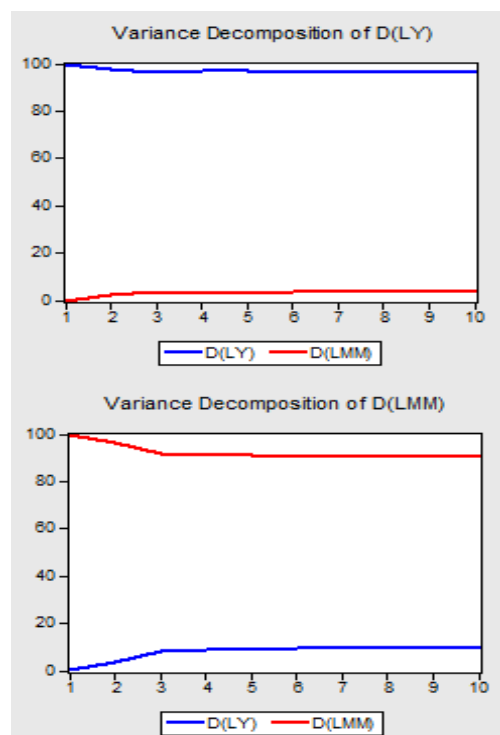


Figure n°3. Décomposition de la variance d'erreur

Après avoir décomposé les variances de nos paramètres, la lecture de la présente figure nous fait observer dans les comportements de nos variables une situation selon laquelle, les variations de la production sont expliquées essentiellement par ses propres variations (à hauteur de plus de 96%) et ces variations ne sont expliquées par la monnaie que dans des proportions beaucoup plus moindre (soit à seulement 3,34%).

De plus, il est à constater que les variations de la masse monétaire sont expliquées seulement à 9,8% par des variations de la production et que ses propres variations demeurent importantes avec une influence de plus de 90%. Cette situation se trouve bien explicitée dans le tableau de la décomposition de la variance qui est en annexe. Cela revient tout simplement à dire que le volume de production nationale dépend plus ici de sa propre valeur décalée de deux périodes que de l'influence exercée par les chocs d'impulsion monétaire.

La même logique mutatis mutandis, revient à considérer que la variation de la masse monétaire en une période donnée dépend plus du volume des moyens de paiement au sein de l'économie décalé de deux période que d'effets induit par le volume de la production nationale. Ainsi, nous pouvons aussi tester le comportement de ces deux variables en longue période par l'application du test de cointégration de Johansen.

• Test de cointégration de Johansen (1988)

Le test d'Engle et Granger a le probablement la lacune, celle de choisir une variable de normalisation et en petit échantillon, avec comme conséquence possible : le résultat peut dépendre de ce choix. C'est ainsi que Johansen (1988) et Stock et Watson (1988) ont développé simultanément une procédure de test basée sur le rang de la matrice π dans la représentation VECM :

$$\Delta x_t = A_0 + \pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^p \pi_i \Delta x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Le rang de cette matrice est égal au nombre de vecteurs de cointégration. Le test sera donc basé sur le rang de cette matrice. Pour effectuer ce test, on doit calculer les valeurs propres de ladite matrice et évaluer si ces valeurs propres sont significativement différentes de zéro. Ce test est une épreuve de maximum de vraisemblance et dépend de nombre de Lag

dans le modèle à correction d'erreurs estimé. De ce fait, nous allons refaire le test de cointégration de Johansen en spécifiant l'option appropriée, '**No deterministic trend**', tel qu'il ressort de tableau en annexe.

5. Résultats du test de Johansen

En se référant aux p-values des statistiques 'Trace statistic' et 'Max-eigenStatistic', on sait bien voir qu'on accepte dans les deux cas l'hypothèse de cointégration entre les variables PIB réel et Masse monétaire réelle au seuil de 5%. En d'autres termes, il existe une relation de long terme entre ces deux variables. Ces résultats corroborent ceux trouvés par la procédure d'Engle et Granger, et confirme de ce fait l'inutilité d'évoquer l'hypothèse de neutralité monétaire au contexte de l'économie de la RDC.

6. Estimation du vecteur de cointégration

Il existe différentes façons d'estimer un vecteur de cointégration ou modèle à correction d'erreurs. Ici nous avons privilégié l'estimation par la méthode de maximum de vraisemblance faisant suite au test de Johansen dont tableau en annexe. Pour pouvoir porter un jugement sur le mécanisme d'ajustement aux déviations de déséquilibre de long terme (causalité de long terme), nous reproduisons les résultats de l'équation **D(LY)** ci-dessus, dans les lignes qui suivent :

$$D(LY) = -0.030571 * (LY(-1) - 0.684254186 * LM(-1)) + 0.416506 * D(LY(-1)) + 0.008676$$

$$t\text{-stat} = (-3.046264) \quad (-49.7337) \quad (4.744680) \quad (0.798133)$$

$$R^2 = 0.401388$$

Concentrons-nous sur le coefficient **C(1)**, lequel est interprété comme étant la vitesse d'ajustement du déséquilibre de long terme. Cependant, il doit être négatif et significatif. A la lumière de ces résultats, il apparaît que ce coefficient est négatif et significativement différent de zéro. Ce qui revient à dire qu'il y a causalité à long terme entre la masse monétaire réelle et le PIB réel. En d'autres termes, la masse monétaire réelle a une influence sur le PIB réel à long terme. Ou encore, il y a une causalité de longue période partant de la masse monétaire réelle vers le PIB réel. En définitive, après avoir soumis nos variables aux différentes analyses, nous pouvons alors passer à l'interprétation des résultats issus des modèles repris plus haut car ces modèles viennent de répondre aux différents tests statistiques et économétriques.

4.2 INTERPRÉTATION DES RESULTATS

Ce faisant, la première étape de notre analyse a porté sur le test de stationnarité de Dickey Fuller Augmenté (ADF Test). Ce test nous a permis de constater que les variables PIB et Masse Monétaire réels ont été intégrées d'ordre 1. Ce qui voudrait dire, les variances de ces deux variables sont infinies. Il se pourrait qu'une combinaison linéaire de ces deux variables soit stationnaire, auquel cas on dirait qu'elles sont cointégrées. En des termes simples, l'existence de la cointégration entre le PIB réel et la masse monétaire réelle confirme dans le cas échéant, la relation de long terme entre ces deux séries temporelles. Ce qui signifie que nos deux variables sont liées par une relation linéaire à longue période.

Théoriquement, il est admis au travers de ce résultat que toute politique de la BCC en matière de la diminution de son taux directeur implique une augmentation du volume de la monnaie au sein de l'économie. Cette augmentation des encaisses qui traduit la capacité des entreprises à doubler d'efforts dans le processus de la production des biens et services déclenche la variation dans le même sens, du volume de la production.

Cette thèse répond fidèlement à l'hypothèse de non neutralité de monnaie qui admet que la monnaie exerce une influence considérable dans la modification du volume de production au sein de l'économie réelle. D'où l'importance et la nécessité pour l'autorité monétaire ainsi que le gouvernement à mettre en place une politique monétaire prudente en vue de garantir l'adéquation entre la masse monétaire et le volume d'activités économiques.

Il s'en est suivi le test de causalité de Granger qui nous a révélé qu'il existe une relation bidirectionnelle entre la masse monétaire et la production nationale d'autant plus que les différentes probabilités du test dans les deux cas se sont respectivement présentées de **0,0017** et **0,0124**, toutes, inférieures au seuil de signification. Pour autant que les signes attachés à nos coefficients à ce niveau aient révélé l'existence d'une relation bidirectionnelle entre la masse monétaire et le PIB réels, nous avons prédit encore que la monnaie exerce un impact non négligeable sur le volume de la production nationale de la RDC, autant que le niveau du PIB induit significativement le volume de l'ensemble de moyens de paiement au sein de l'économie de la RDC.

Cette compénétration entre nos deux variables justifie l'intégration des deux secteurs de l'économie en RDC. Cela est d'autant utile pour servir des bases essentielles à la diversification de l'économie, l'amélioration du système financier du pays et par conséquent, baliser l'environnement pour le développement du marché financier en RDC.

L'estimation de notre modèle VAR par la détermination du Lag maximum, nous avons réalisé qu'il ressort de ladite estimation que le paramètre associé à la production, décalée d'une période est statistiquement significatif. C'est-à-dire, en admettant une possibilité de se tromper à 5 pourcent, la production demeure significativement fonction positive de la variation de masse monétaire. Ce résultat confirme donc notre hypothèse de base, et affirmons que la monnaie n'est pas neutre en RDC de 1960 à 2013. Par ailleurs, la constante et les autres paramètres restent sans impact significatif sur la production, l'estimation ayant été faite sur une période de retard égale à 2.

Par ailleurs, l'analyse des chocs impulsions a plutôt démontré que la décomposition des variances de nos variables a fait expliquer chaque variable par sa propre valeur décalée de deux périodes. Autant dire, pour la variable PIB par exemple, sa valeur en une période donnée est plus fonction de sa propre valeur d'il y a deux ans. La même situation a aussi caractérisé le volume de monnaie en circulation qui est plus fonction du volume de la masse monétaire de deux ans passés, etc.

Ce contrecoup qui ne remet pas en cause notre hypothèse de base, vient ajouter un aspect très important dans notre étude. En effet, il est établi à la lumière des indications que nous livre le tableau en annexe, qu'outre les effets de la politique monétaire de la BCC sur la production des biens et services, le volume de cette production en une période donnée, dépend aussi de ses propres valeurs de deux périodes précédentes. Cette réponse traduit dans la pratique, la pertinence de l'incidence non négligeable des autres mesures autre que la politique monétaire, sur la production en RDC.

Bien qu'il existe d'autres variables qui entrent en jeu dans la planification de la relance économique au pays dont notamment le recours à d'autres instruments conjoncturels de la politique économique tels la politique budgétaire, la politique de prix... accompagnés d'autres mesures d'encadrement telles les efforts en faveur de la bonne gouvernance, de l'assainissement du climat des affaires, le volume de la production nationale en RDC s'est révélé beaucoup plus tributaire de la politique de la BCC.

Au cas où ce contrecoup est dû par la faiblesse des canaux de transmission de la politique monétaire vers l'économie réelle, l'autorité monétaire injectera des liquidités par différentes méthodes (planche à billet, achat de titre, baisse du taux directeur le taux d'intérêt des emprunts ou des placements qu'on peut faire directement auprès de la banque centrale, etc.) pour faire remonter la masse monétaire et donc le niveau d'inflation (l'objectif étant en général une inflation faible mais non nulle, pour éviter la déflation) ; pour faire baisser l'inflation elle agira en sens inverse (arrêt de la planche à billet, vente de titre, augmentation du taux directeur, etc.)

Quant à l'influence de la politique monétaire sur l'activité, les modalités d'action sur la sphère réelle revêtent une grande importance pour opter en faveur du contrôle par la monnaie ou par le crédit. Réguler la quantité de monnaie revient à agir sur la structure des patrimoines financiers. La contrainte est indirecte puisqu'elle s'exerce sur l'intermédiaire des comportements d'encaisse et de portefeuille. Ce mode de contrôle permet de limiter le développement des tensions inflationnistes sans brutalité. Mais il suppose une certaine continuité pour être efficace.

Ainsi dans l'ensemble, les résultats auxquels nous avons aboutis au cours de nos analyses viennent donc d'invalider l'hypothèse de neutralité monétaire au contexte de l'économie de la RDC. Il est évident à l'issue des différents tests auxquels notre hypothèse a été soumise, de constater que la masse monétaire réelle, de par ses liens de causalité avec la production nationale, a induit le volume du PIB réel, ce qui revient à confirmer notre hypothèse selon laquelle, toute modification du volume de la masse monétaire serait fonction positive du volume de la production nationale, ce qui correspond à l'hypothèse de non neutralité de la monnaie en RDC de 1960 à 2013.

Il est donc vrai, comme on vient de le voir, qu'une augmentation de la masse monétaire peut relancer l'économie à travers la modification positive du volume de la production nationale, et faire baisser le chômage. Sur le plan pratique, l'autorité monétaire s'appuie sur une combinaison de la théorie quantitative à l'approche monétaire de la balance des paiements. La théorie quantitative permet de déterminer le stock de monnaie à injecter dans l'économie alors que l'approche monétaire de la balance des paiements permet de contrôler le niveau des réserves extérieures, à travers une action sur le volume de crédit.

5 CONCLUSION

Cette étude avait pour objet, l'examen de la validité de l'hypothèse de neutralité monétaire en RDC, en partant des conclusions de la nouvelle synthèse néoclassique. Cette conclusion de la nouvelle synthèse néoclassique sur les effets réels des impulsions monétaires redonne ses lettres de noblesse à la politique monétaire. Plus encore, elle permet aux économies actuelles faisant face à la pauvreté et à l'inertie de la croissance de compter avec l'instrument monétaire.

Il s'est agi d'analyser les répercussions des chocs d'impulsion monétaire vers le secteur réel, et particulièrement sur le PIB de la RDC de 1960 à 2013. L'hypothèse de la recherche a admis que toute modification du volume de la masse monétaire serait fonction positive du volume de la production nationale, ce qui synchronise avec le fondement de l'hypothèse de non neutralité de la monnaie en RDC. Cette hypothèse a été opérationnalisée à travers l'étude des séries annuelles suivant : de PIB réel symbolisé par (y_t) et d'agrégat monétaire symbolisé par (m_t) sur une période s'étalant de 1960 à 2013.

La vérification de l'hypothèse a été rendue possible grâce au modèle vectoriel autorégressif (VAR) qui est une approche statistique ayant permis de capturer les interdépendances entre les séries temporelles susmentionnées. Par rapport à la récolte des données, la technique documentaire a été mise en contribution.

Après analyse et interprétation des résultats de l'étude, les signes attachés aux coefficients de PIB réel et de la masse monétaire réelle ont révélé dans l'ensemble le résultat suivant : $R^2 = 0.530832$ c'est-à-dire, notre modèle théorique de base a été expliqué à 53,08%.

Comme le $F_{cal} (13.01027) > F_{th} (3,89)$ et la probabilité de $Prob_F (0.000000) < 0,05$; donc on rejette l'hypothèse nulle et le modèle est dit globalement significatif.

Cela signifie théoriquement qu'il existe une interdépendance entre la masse monétaire et le PIB réels en RDC. En terme simple, en acceptant une probabilité de se tromper au seuil de 5%, la variation du PIB a été justifiée par celle de la masse monétaire à 53,08%. Mieux, la variation du PIB en une période donnée est induite par la variation de la masse monétaire. L'étude révèle donc que toute variation de la masse monétaire au cours d'une période donnée entraîne proportionnellement la variation du volume de la production nationale des biens et services.

Ce résultat laisse conjecturer d'une part l'invalidation de l'hypothèse de neutralité de la monnaie au sein de l'économie de la RDC et confirme par conséquent que toute modification du volume de la masse monétaire est une fonction positive du volume de la production nationale. En effet, tout le revenu n'est pas toujours dépensé, ce qui limite la demande globale. Il est donc évident que les agents économiques, particulièrement les entreprises en RDC ont accru leur demande afin de limiter les situations de sous-emploi.

L'effet d'encaisse réelle montre clairement au travers de nos résultats que d'une part, l'accroissement de la quantité de monnaie par les pouvoirs publics pour stimuler l'activité entraîne l'augmentation des encaisses réelles des agents ; cela permet aux agents, les ménages en particulier, d'effectuer davantage d'achats. La demande ayant augmenté fortement, et l'offre s'y est adaptée.

Et d'autre part, les résultats issus de nos différents tests confirment aussi la théorie quantitative de la monnaie fondée sur l'hypothèse selon laquelle les secteurs monétaire et réel évoluent en corrélation permanente, d'où la nécessité d'observer une politique monétaire prudente telle que préconisée par les monétaristes sous le clairvoyant élan de Milton Friedman qui répond à l'obligation de maintien d'équilibre entre ces deux secteurs en vue d'éviter les effets pervers de la monnaie au sein de l'économie.

Sur le plan de l'incidence de la politique monétaire sur les agrégats réels, les faits stylisés d'un choc monétaire ne sont vérifiés que sur le produit. Les effets de la politique monétaire transitent par les taux des banques primaires, impactent le crédit bancaire pour se répercuter sur le crédit. Les effets de la crise financière seraient persistants en cas de choc sur l'inflation et les taux d'intérêt étrangers et transitoires en cas de chocs sur le produit étranger. Sur le plan de la capacité des autorités monétaires à stabiliser le produit à la suite d'un choc externe, le taux directeur et les coefficients de réserves obligatoires n'ont presque pas d'effet sur la production. De même, le caractère transitoire des effets du taux directeur sur le produit pourrait ne pas contrecarrer les effets persistants des chocs externes.

De tout ce qui précède, il apparaît que la pratique de la politique monétaire en RDC est confrontée à de nombreuses difficultés. Ces difficultés tournent essentiellement autour de l'hétérogénéité des comportements et des caractéristiques des secteurs économiques (monétaire et/ou réel) qui évoluent désormais en déconnection quasi permanente. Cette instabilité qui amplifie la volatilité du produit accroît en définitive la réaction escomptée des taux d'intérêt, principal instrument des autorités monétaires. Par opposition, l'inflation et le crédit connaissent une dynamique particulière : d'une part parce que la première variable est sous l'influence de nombreux facteurs autres que monétaire et, d'autre part parce que le système bancaire est largement dominé par des firmes dont le comportement est dicté de l'extérieur.

D'où la difficulté de l'autorité monétaire à régler finement la conjoncture et partant, c'est sa capacité à influencer sur le bien-être qui est remise en cause. Cette difficulté dénote d'une absence de communication et donc d'application des recommandations théoriques visant à ancrer les anticipations et donc les comportements de demande d'encaisses.

Les résultats de cette étude ne constituent pas une finalité en soi ou voire, ne sont pas exhaustives ; plusieurs autres analyses et conclusions peuvent être tirées en fonction d'objectifs de l'étude. Les prochaines recherches peuvent par exemple s'intéresser à l'étude des canaux de transmission des chocs d'impulsion monétaire vers la sphère réelle de l'économie afin d'en déterminer les effets ; la relation monnaie-balance de paiement, monnaie et mouvements de capitaux internationaux, etc. sans prétendre avoir épuisé ou abordé tous les aspects de cette problématique, la présente étude aura été une brèche possible à tous les lecteurs, de bien vouloir porter des appréciations susceptibles de rendre beaucoup plus complète cette réflexion, dans le but de faire avancer la recherche au profit de toute la communauté scientifique, et de la société toute entière.

REFERENCES

- [1] Banque Centrale du Congo, Direction des Etudes, Rapport du comité de pilotage de la politique monétaire en RDC, 2012-2013.
- [2] Banque Centrale du Congo, Direction des Etudes, Rapport annuel de la BCC, 1999 et 2011.
- [3] Banque Centrale du Congo, Direction des Etudes, Loi n°003/2002 du 02 février 2002 relative à l'activité et au contrôle des Etablissements de crédit.
- [4] BARRO et al, Macroéconomie, Harmattan, Paris, 1998.
- [5] FISHER, Dualisme flux réel et monétaire, éd. Deboeck, Bruxelles, 1973.
- [6] KOENIG G., Analyse monétaire et financière, Economica, Paris, 2000.
- [7] MALLIK G. et A. CHOWDHURY, Analyses Macroéconomiques, éd. Le paquet, Bruxelles, 1999.
- [8] KRUGMAN P., et al, Analyse des relations causales entre Inflation et PIB, Dunod, Paris, 1997.
- [9] PERROUX, L'Homme, l'Economie et l'État, Charles Coquelin, Paris, 2007.
- [10] BERNANKE et MISHKIN, « Lier la Politique Monétaire au Chômage », le cahier économique, Paris 2000, pp 55-56.
- [11] MODIGLIANI F. et PAPADEMOS, "Targets for Monetary Policy in the Coming Year", Brookings Papers Economic Activity, Boston, 1975, pp.18-23.
- [12] FRIEDMAN M., "The role of monetary policy", American Economic Review, 1968 traduction française par Jean-marc RUELO, pp.51-55.
- [13] P. BERNHOLZ, "Monetary Regimes and Inflation: History, Economic and Political Relationships", (Chattenham : Edward Elgar, 2003). Cote 33700 BER, pp.4-6
- [14] KRUGMAN P, « La Mondialisation n'est pas coupable », La Découverte/Poche, Essais, Paris 2004, p.62.
- [15] DYAWEL P, « Les grandes options d'après crise des années », PUF, Paris, 1997, p.46.
- [16] WAI T., « Inflation et Croissance économique dans les pays d'Asie d'Est », in cahier économique de Tunis, n°5211, publié le 23 mai 1959, pp.1-3.
- [17] THIRWALL et BARTON, « les déterminants de la croissance économique durable », l'écolier, Saint Louis, 1971, p.59.
- [18] KALALA KABUYA et MBIYE TSHIUNZA, « La politique économique revisitée en RDC : pesanteurs et perspectives », L'Afrique des grands lacs, Kinshasa, 2006, pp.30-32.
- [19] MBOSO, « Introduction à l'économie monétaire et financière », Banque centrale du Congo, Kinshasa, 2011, p.17.

