International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 8 No. 3 Sep. 2014, pp. 1213-1218

http://www.ijias.issr-journals.org/

Intégration par la Transformation de Laplace

[Integration by Laplace's Transformation]

David Byamungu Wanguwabo

Faculté des Sciences et Technologies Appliquées,
Université Libre des Pays des Grands Lacs (ULPGL/GOMA),
Goma, Nord-Kivu, RD Congo

ABSTRACT: It is well known that the notion of integral in mathematic branch is among the most difficult contrarily to some known techniques as integration by part or by change of variable, the integral is forgotten. The mathematic theories contain other notions having the applications which allow to determine the integral of some types of functions, for instance Laurent's series, Beta's functions, Gamma's functions, Laplace's transformations,…There is a way to wonder if those notions can be taught at the secondary school for resolving major problems of some types of non –integrals functions by part or variable change. This should allow us to legitimate the teacher who is always absorbed by difficult questions that learners of mathematics come across. Thus, our goal is to propose remedial techniques to calculate the integral based on Laplace's transformation which the basic knowledge is not contrary to Laplace's transformation defined thanks to an integral what means that the present notions can be accommodated to the rest of integral proposed in the 6th form of scientific section in our country.

KEYWORDS: scientific, notions, functions, techniques, calculate, mathematic, series, variable, integral.

RESUME: Il est connu dans le monde mathématique que la notion d'intégrale est parmi les notions les plus difficiles et qu'en dehors de quelques techniques connues, comme l'intégration par partie et l'intégration par changement de variable, on a tendance d'abandonner le calcul de l'intégrale de certaines catégories des fonctions. Pourtant les théories mathématiques contiennent d'autres notions ayant des applications permettant de déterminer les intégrales de quelques types des fonctions comme par exemple les séries de Laurent, les fonctions beta et gamma, les transformées de Laplace,… Il y a lieu alors de s'interroger si ces notions peuvent s'enseigner au secondaire afin de résoudre le problème épineux du calcul des intégrales de certains types des fonctions non intégrables par parties ou par changement de variable. Ceci nous permettrait de légitimer l'enseignant qui est toujours absorbé par les questions difficiles que les apprenants rencontrent et amènent à l'enseignant pour résolution. Notre objectif est de proposer une autre technique de calculer les intégrales basées sur la transformation de Laplace dont la connaissance de base n'est rien d'autre que la transformée de Laplace définie à partir d'une intégrale ; ce qui signifie que ces notions peuvent s'accommoder avec le reste des intégrales proposées en 6ième scientifique. Il restera à vérifier pour les didacticiens la didacticité de ces notions.

MOTS-CLES: scientifique, notions, intégrale, calculer, fonctions, techniques, mathématique, séries, variable.

1 INTRODUCTION

Il est bien connu dans la communauté mathématique que la notion de l'intégrale est l'une des notions les plus difficiles de la mathématique et qu'en dehors de quelques techniques usuelles (intégration par parties et intégration par changement de variable) ; il n'existe pas de méthodes pour le calcul d'intégrales. En effet, A.GUICHARDET affirme que la théorie de l'intégration est un chapitre difficile des mathématiques à tel point que de bons auteurs préfèrent s'en passer [1].

Pourtant, les théories mathématiques contiennent d'autres notions ayant des applications permettant de déterminer les intégrales de quelques types des fonctions. Ces notions sont notamment les séries de Laurent qui permettent les calculs des résidus et les transformées de Laplace que nous voulons développer dans ce travail.

Dès lors on peut se demander s'il est possible d'enseigner ces notions à l'école secondaire ou au premier cycle de graduat afin de faciliter les calculs des intégrales de certaines fonctions non intégrables par les techniques d'intégration par partie et par changement de variable à l'école secondaire ,étant donné que ces notions ne sont pas prévues quelque part sur le programme national .En effet lorsqu'un praticien ne sait se servir de l'une ou l'autre de ces deux techniques d'intégration, il est désarmé et il abandonne l'intégrale qu'il voulait calculer , ce qui est un problème auquel nous voudrions apporter une solution dans ce travail en développant cette autre technique d'intégration basée sur les transformations de Laplace.

En effet, très souvent les élèves et /ou étudiants s'adonnent au calcul des intégrales et apportent aux professeurs des exercices qu'ils ne sont pas à mesure de calculer. Cela pose parfois des difficultés liées à la légitimité de l'enseignant et du contenu qu'il transmet aux étudiants.

Par ailleurs il n'existe pas de techniques permettant d'abord de vérifier si une fonction est intégrable afin de se livrer au calcul de l'intégrale de cette fonction et on ne dit pas non plus quels types des fonctions sont intégrables par les techniques usuelles d'intégration. Cela laisse les élèves ou les étudiants essayer le calcul de l'intégrale de n'importe quelle fonction sans se rassurer si elle est intégrable ou si la technique connue y est applicable.

Par exemple un élève de sixième année scientifique a demandé au professeur de calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Il voulait savoir comment calculer cette intégrale et pourtant cette intégrale ne peut être calculée qu'au niveau de maîtrise [1], mais la transformée de Laplace permet d'obtenir la valeur de cette intégrale ;une technique basée sur les calculs fonctionnels.

Etant donné que ce problème est fondamental et qu'il n'est pas facile de trouver une solution, notre objectif est de proposer une autre technique de calculer des intégrales basée sur la transformée de Laplace. Nous proposons dans ce texte la connaissance enseignable que nous avons extrait de la connaissance savante. La connaissance de base n'est rien d'autre que la transformée de Laplace qui se définit à partir d'une intégrale ; ce qui signifie donc que cette notion s'accommode avec le reste du contenu proposé pour les intégrales en sixième année du secondaire et au premier cycle du supérieur. Ce contenu où nous présentons cette technique sera basée sur des démonstrations des théorèmes ;ce contenu peut être ensuite présenté sur des fiches de préparations qu'on pourra ensuite expérimenter dans nos écoles afin d'en étudier le rendement.

NB: Dans la suite de ce travail T.L. signifie Transformée de Laplace.

2 MATERIEL ET METHODES

Pour atteindre nos objectifs nous assigné dans ce travail, nous avons essentiellement utilisé la méthode axiomatique afin de démontrer certains résultats et théorèmes contenus dans ce travail.Cette méthode a été appuyée par la technique documentaire qui nous a aidé à collectionner la revue de la littérature afin de constituer la partie théorique de cet article.

3 RESULTATS DU TRAVAIL

3.1 QUELQUES DÉFINITIONS

- La transformation de Laplace est une opération qui, à une fonction f d'une variable réelle t, associe une fonction $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$, de variable complexe p, $p \neq 0$

-L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$, si elle existe, est appelée intégrale de Laplace. La fonction complexe $F(p)$ est la transformée de Laplace de la fonction réelle $f(t)$ symbolisée par $L\{f(t)\} = F(p)$ ou $f(t): \longleftarrow F(p)$ ou $F(p) \longrightarrow : f(t)$; L est l'opérateur de transformation de Laplace.

I.2 .Propriétés de la T.L.

P_1 . **Unicité** si deux fonctions continues f et g possèdent une même transformée $F(p)$ alors f et g sont identiquement égales. [4]

P_2. **Linéarité**

Soit $f(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i f_i(t)$ une fonction qui est combinaison linéaire des f_i avec $i \in [0, n] \cap \mathbb{N}$; C_i des constantes réelles, et $L\{f_i(t)\} = F_i(p)$.

$L\{\sum^{n}{}_{\neg=0}\ C_i f_i(t)\} = \sum_{i=0}^{n} C_i . L\{f_i(t)\} = \sum_{i=0}^{n} C_i . F_i(p)$ [4]

P_3.**Translation** ([2], p.105)

Si $L\{f(t)\ \} = F(p)$ alors $L\{e^{at} f(t)\ \} = F(p-a)$,$\forall\ a\ \in\ \mathbb{C}$.

P_4.**Dérivation**

$$L\{f(t)\ \} = F(p)\ \Longrightarrow L\{t^{<} f(t)\ \} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)\ [4]$$

P_5 . **Division par t**

Si $L\{\ f(t)\ \} = F(p)$ alors $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^{+\infty} F(u)$ entendu que $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe [5]

P_6. **Similitude** , $\forall\ \_ > 0$

Si $L\{f(t)\ \} = F(p)$ alors $L\{f(at)\ \} = \frac{1}{a} F\left(\frac{-p}{a}\right)$ [2]

P_7 . **Intégrale de produit de convolution**

Si $L\{f_1(t)\ \} = F_1(p)$ et $L\{f_2(t)\ \} = F_2(p)$ alors

$= L\left\{\int_0^t f_1\,(t-\theta) . f_2(\theta) \mathrm{d}\theta\right\}$ [4]

3.2 INTEGRATION PAR LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

3.2.1 DÉFINITION

- Intégrer une fonction par la T.L, n'est ni l'intégrer suivant les techniques usuelles de calcul d'intégrales définies, ni l'intégrer suivant la définition de calcul d'intégrales impropres mais plutôt en se servant des principes que nous développons dans ce travail.
- Une fonction réelle f est integrable au moyen de la T.L si
  - Sa transformée de Laplace F(p) existe
  - La fonction F(p) à variable complexe p est continue en $a = Re(p)$

3.2.2 PRINCIPES D'INTÉGRATIONS

Soit $f(t)$ une fonction variable réelle t

Soit $\mathrm{F(p)} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ la transformée de $f(t)$.

Principe 1 :[3]

En supposant $I = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)dt \; avec \; a >$Y l'intégrale à calculer alors la valeur numérique de I s'obtient en effectuant $I = F(a)$

Principe 2: [3]

Si l'intégrale à calculer

$I = \int_0^{+\infty} f(t)d$ _ existe alors $Re(p) > 0, F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\;t} f(t)dt$ existe aussi et la valeur réelle de I se calcule par $I = \lim_{p\to 0_+} lim F_{(p)}$

Principe3 : Il découle du théorème de convolution

$\int_0^t f_1(\theta). f_2(t-\theta)d \gg = L^{-1}\{F_1(p).F_2(p)\}$. Pour que le principe soit possible, l'intégrale $\int_0^t f_1(\theta). f_2(t-\theta)d\theta$ sera telle que

$f_2(t) = f_2(t-\theta) = 1$ ou tout simplement $f_2(\theta) = 1$,

$$F_1(p) = L\{f_1(\theta)\} \; et \; F_2(p) = L\{f_2(\theta)\} = \frac{1}{p}$$

3.2.3 PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

En se servant de principe 2 et des propriétés sur la T.L. nous pouvons affirmer sans démontrer ce qui suit :

a) $\int_0^{+\infty} cf(t)dt = c\int_0^{+\infty} cf(t)dt$, avec f intégrable par la T.L. et c une constante.

b) $\int_0^{+\infty}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)dt) = c_1\int_0^{+\infty} f_1(\;)dt + c_2\int_0^{+\infty} f_2(t)\,dt$ avec f_1, f_2 et $c_1f_1 + c_2f_2$ intégrables par la T.L. et c_1, c_2 des constantes

Exemples 1

1) Sachant que $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} sht\,dt = \frac{1}{p^2-1}$ et que l'integrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-2t} sht\,dt$ existe alors on peut calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-2t} sht\,dt = F(2) = \frac{1}{3}$

2) On peut vérifier que $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ existe. En s'appuyant au principe 2, on peut affirmer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{1+t^2}dt$ existe aussi. En intégrant par parties l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{1+t^2}dt$,
il vient que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{1+t^2}dt = \frac{1}{1-p^2}\left(\frac{\pi}{2} + p\right)$
Ainsi la valeur de l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{嬫} - xt}{1+t^2} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1-p^2}\left(\frac{\pi}{2} + \quad\right) = \frac{\pi}{2}$$

3) Calculons l'intégrale définie $I = \int_0^{\text{膌}} sin^2\,\theta d\theta$ pour $t = \frac{\pi}{2}$
On a $I = \int_0^t sin^2\theta\,d\theta = L^{-1}\left\{\frac{2}{p^2(p^2+4)}\right\}$
$= L^{-1}\left\{\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2(p^2+4)}\right\}$
$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}si \quad 2t$
Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$
<u>NB</u> Si on attribue à la partie réelle p (respectivement variable complexe) une valeur quelconque du domaine d'intégration, on obtient la valeur de l'intégrale pour chaque catégorie des fonctions étudiées.

4) Par la transformée de Laplace montrons que :

a) $\int_0^{+\infty} t.e^{-2t}.cost.dt = \frac{3}{25}$

D'après la propriété sur la transformée,
$L\{t.cost\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)$ Où
$\frac{p}{p^2+1} = L\{cost\}$ et donc $L\{t.\ cost\} = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$ est continue en p=2 , il vient que $I = \int_0^{+\infty} t.e^{-2t}.cost.dt = \frac{3}{25}$

b) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{sint}{t}dt = \frac{\pi}{4}$.

En effet $L\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_p^{+\infty}\frac{1}{(u^2+1)}du$ (voir la proprieté 5 de la division d'une fonction $f(t)$ par t).

D'où $L\left\{\frac{sint}{t}\right\} = [arc\ tanu]_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - arc\ tanp$
En posant $p = 1$, on a : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{sint}{t}dt = \frac{\pi}{4}$.

c) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = ln\frac{b}{a}$. En effet en vertu du principe 2 de l'intégration par la T.L, l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right)dt$ existe aussi et $L\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right)du$
$= \left[ln\frac{<+a}{u+b}\right]_p^{+\infty} = ln\frac{p+b}{p+a}$

En prenant la limite lorsque $p \longrightarrow 0_+$, il vient que : $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = ln\frac{b}{a}$.

d) $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}}\left(\frac{sht.sint}{t}\right)dt = \frac{\pi}{8}$

En effet la transformée de $f(t) = sht.sint$ et donc
$L\{sht.si\ t\} = \frac{p}{p^4+4}$.
Par la suite$L\left\{\frac{sht.sint}{t}\right\} = \int_p^{+\infty}\frac{u}{u^4+4}du,$

$= \frac{1}{4}\int_p^{+\infty}\frac{dn}{n^2+1},\ u^2 = 2n \Longrightarrow udu = dn$
$= \frac{1}{4}\ [arc\tan n]_p^{+\infty} = \frac{1}{4}\left[arc\tan\frac{u^2}{n}\right]_<^{+\infty}$
$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - arc\tan\frac{p^2}{2}\right]$

En prenant $p = \sqrt{2}$, on a $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}}\left(\frac{sht.sint}{t}\right)dt = \frac{\pi}{8}$

e) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}d\ x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
Considérons une fonction $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$, puis trouvons la transformée de Laplace.
Alors $L\{g(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx\right]dt$. Intervertissons l'ordre d'intégration, on a :

$$L\{g(t)\} = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(p+x^2)t}dt\ dx$$

$= \int_0^{+\infty}\left[\frac{-e^{-(p+x^2)t}}{p+x^2}\right]_0^{+\infty}dx$

$= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{p+x^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{p}}\left[arc\ tan\frac{x}{\sqrt{p}}\right]_0^{+\infty}$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{p}}$.

En inversant, il en résulte que

$g(t) = \frac{\pi}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, t^{-\frac{1}{2}}$ et que pour t=1 on a $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

4 CONCLUSION

Les transformations de Laplace jouent un rôle très considérable dans d'autres disciplines comme la physique et la biologie.

Cependant ces notions ne sont pas enseignées au secondaire voire même au premier cycle de graduat ; pourtant elles sont utiles pour faciliter le calcul des intégrales de certaines fonctions qui échappent aux techniques usuelles c'est-à-dire intégration par parties et intégration par changement de variable, figurées sur le programme de mathématique de l'enseignement secondaire et supérieur de la République Démocratique du Congo.

Dans cet article, nous avons suggéré qu'il est possible d'enseigner les notions de transformée de Laplace au secondaire en vue de montrer aux élèves et /ou les étudiants que les techniques d'intégration connues qui ne suffisent pas pour intégrer toutes les fonctions peuvent être complétées par d'autres techniques, ce qui signifie que le calcul des intégrales de certaines fonctions peut se faire au moyen des transformations de Laplace. Néanmoins, il est à signaler que l'intégration par la transformée de Laplace n'est pas aussi une technique applicable à toutes les fonctions mais qu'il faut que la fonction à intégrer par cette technique possède de transformée de Laplace.

Malgré cela, la transformée de Laplace procure des résultats élégants dans son application à tel point que son enseignement au secondaire et au supérieur ne poserait aucun problème surtout que les notions y relatives ne s'écartent pas de la dérivation et de l'intégration habituelles.

Les conditions d'intégration par la T.L. sont nécessaires et non suffisantes. Les principes d'intégration complètent ces conditions et facilitent alors l'intégration de certaines fonctions réelles.

Cependant certaines questions n'ont pas été débattues dans cet article ; c'est par exemple celle de savoir le type des fonctions dont l'intégrale se calcule par les deux techniques usuelles d'intégration : en effet cela permettrait aux élèves et étudiants d'éviter de se livrer au calcul de l'intégrale, si elle existe, de n'importe quelle fonction.

Comme nous ne prétendons pas avoir épuisé tout le thème ni avoir élaboré une œuvre parfaite ; nos successeurs seraient intéressés par cette question et par celle qui concerne l'élargissement des fonctions intégrables par la T.L. en utilisant par exemples les méthodes de détermination des T.L. par séries, aux équations différentielles,…

Les matières proposées dans cette article peuvent aussi être expérimentées dans nos écoles secondaires afin d'en étudier le rendement et voir dans quelle mesure ces notions peuvent être insérées dans le programme national vu leur importance ci-haut évoquée.

REFERENCES

[1] GUICHARDET A. , Calcul intégral, *maîtrise de mathématiques C2*, Armand Colin, Paris, 1969.
[2] DECUYPER M. , *Modèle mathématique de la physique*, Dunod , Paris, 1968.
[3] MASSART J., *Cours d'Analyse T_4. Compléments : analyse vectorielle, calcul matriciel, extrémums, calcul opérationnel, géométrie analytique dans E_3* , Dunod, Paris , 1970.
[4] PISKOUNOV N, *Calcul différentiel et intégral T_2* ,Mir Moscou ,1974.
[5] SPIEGEL M., *Transformée de Laplace, cours et problèmes,* Mc Graw-Hill, Paris ,1980.