

Etude expérimentale du mouvement d'un corps solide libre

[Experimental study of the free rigid body motion]

Mbarek Rhazi, Mérieme Ait Morras, and Ibtissam Ait Ouaarab

Department of Physics, Ecole Normale Supérieure, B.P 2400, 40000 Marrakech, Morocco

Copyright © 2015 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The plan motion of a free rigid body is analyzed from a video capture webcam. The absolute experimental trajectories of two points of the body allow to determine the relative trajectory of a point from the other point. The kinematic characteristics: speed, instantaneous speed of rotation, the initial kinematic conditions (positions, velocities) are determined by the inverse method from a Maple procedure based on nonlinear adjustment of Statistic package. The trajectories obtained are in good agreement with theoretical predictions. The law of transformation of velocities change is fully verified.

KEYWORDS: free body, levitation, video film, trajectories, relative motion, inverse method, Maple, non linear fitting.

RESUME: Le mouvement plan d'un solide libre est analysé à partir d'une acquisition vidéo par webcam. Les trajectoires expérimentales absolues de deux points de ce solide permettent de déterminer la trajectoire relative d'un point par rapport à l'autre point. Les caractéristiques horaires cinématiques (vitesse de translation et vitesse instantanée de rotation) ainsi que les conditions cinématiques initiales (positions et vitesses) sont déterminées par la méthode inverse à partir d'une procédure Maple basée sur l'ajustement non linéaire du package Statistic. Les trajectoires obtenues sont en bon accord avec les prédictions théoriques. La loi de transformation des vitesses est parfaitement vérifiée.

MOTS-CLEFS: solide isolé, lévitation, film vidéo, trajectoires, composition des mouvements, Maple, méthode inverse, ajustement non linéaire.

1 INTRODUCTION

La table à coussin d'air est considérée comme l'un des dispositifs expérimentaux les plus importants dans les laboratoires d'enseignement des sciences physiques. En effet elle permet à la fois l'étude expérimentale cinématique et dynamique des mobiles solides en lévitation sur coussin d'air. Les techniques de mesure ont évolués depuis la chronophotographie [5] et [6] au marquage par étincelage [3] pour s'arrêter actuellement sur la prise de vues vidéo et l'analyse par logiciels appropriés. Technique d'analyse d'intérêt scientifique et pédagogique indéniable.

Depuis une dizaine d'années, des logiciels d'analyse vidéo ont permis de simplifier l'acquisition des trajectoires lors des travaux pratiques de mécanique et permettent une analyse poussée des lois de la mécanique. Il s'agit tout simplement de filmer à l'aide d'une caméra ou d'une webcam le mouvement d'un objet et d'analyser image par image la trajectoire d'un de ses points caractéristiques. Cette technique d'analyse nécessitant des équipements d'un coût financier modeste est très souple et permet de pouvoir imaginer de nombreuses configurations. Elle est généralement utilisée lors de la mise en place des expériences de mécanique du point matériel. L'exemple le plus classique concerne la chute libre d'un objet où l'étude du mouvement d'un cylindre sur un plan incliné [1]. La seule limite (peu restrictive en pratique) est que l'analyse du mouvement

ne peut se faire que dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de la caméra. Ainsi seule l'étude des mouvements plans parallèlement au plan de la caméra est possible.

Cet article propose d'appliquer l'analyse vidéo au cas du mouvement sur une table à coussin d'air horizontale d'un solide composé [2]. A partir des trajectoires de deux points cible G1 et G2 du solide, on vérifie la loi cinématique du changement de repère

2 BANC EXPÉRIMENTAL

La table est une dalle de marbre très lisse de surface utile $(2 \times 1)m^2$ stable et parfaitement horizontale. On peut utiliser tous les accessoires de la table à coussin d'air classique notamment le générateur d'impulsions, les autoporteurs, etc.... L'enregistrement de la trajectoire se fait avec une webcam solidaire de la table et placée au dessus à une hauteur de 1 m, la webcam est montée de façon à couvrir, dans son champ, toute la surface de la table. Sa résolution vidéo et photo de 1,3 méga pixel. En mode vidéo elle offre une résolution de 1.3 méga pixel et différentes vitesses de capture de 15, 25, 30 ou 60 images par seconde. La photo ci-dessous montre la disposition des éléments du banc expérimental. Le solide composé est constitué de 2 autoporteurs rigidement liés entre eux alimentés par un générateur électrique.



Fig. 1. Banc expérimental

3 MODÉLISATION

Le système mécanique Σ en question est composé de 2 solide S1 et S2 rigidement liés entre eux par un double crochet. On définit deux repères de travail $R(O, x, y, z)$ et $R_2(G_2, x_2, y_2, z)$ respectivement comme repère fixe (référentiel du laboratoire) et repère relatif. Le repère fixe R est lié à la table de marbre, alors que le repère relatif R_2 est lié au solide Σ . Le système Σ exécute un mouvement de translation dans le plan Oxy et un mouvement de rotation autour de l'axe Oz , perpendiculaire à la table, de vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(R_1 / R) = \theta \cdot \vec{k}$.

L'axe Oz est défini comme l'axe de la caméra. Les axes Ox et Oy sont parallèles aux directions définies par le cadre de la caméra. La figure 2 schématise et résume la configuration et les grandeurs introduites.

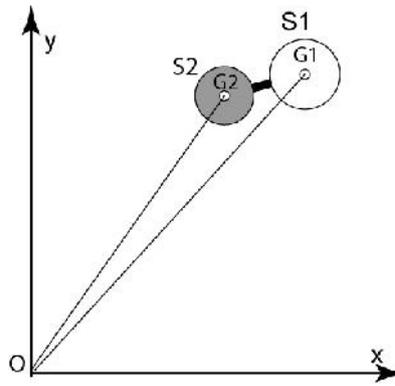


Fig. 2. Schématisation mécanique

Le centre de masse G sera défini comme le barycentre des points G1 et G2 (respectivement centre de gravité de S1 et de S2). (x_G, y_G) , (x_1, y_1) , et (x_2, y_2) désigneront respectivement les coordonnées du point G, du point G1 et du point G2 dans le repère $R(O, x, y, z)$. De même, (x_r, y_r) désigneront les coordonnées du point G1 dans le repère relatif. L'analyse du mouvement du solide S1 sera dans la suite effectuée selon la décomposition en un mouvement relatif et un mouvement d'entraînement.

4 ANALYSE THÉORIQUE

Les expériences durent quelques secondes, le référentiel du laboratoire sera supposé galiléen dans toute la suite. Comme indiqué précédemment, le mouvement du solide est un mouvement plan auquel trois degrés de liberté sont associés. Dans notre cas, le solide est en lévitation sur le plan. La force de sustentation compense le poids. Mécaniquement, le solide est pseudo isolé et les caractéristiques du mouvement sont déterminées à partir de la loi fondamentale de la dynamique appliquée au solide Σ .

$$M \frac{d\vec{V}(G/R)}{dt} = \vec{0} \quad \text{avec à } t=0 \quad \vec{V}(G/R) = \vec{V}_0 \quad (1)$$

$$\text{L'intégrale de l'équation (1) donne : } \vec{V}(G/R) = \vec{V}_0 \quad (2)$$

Le mouvement de G est un mouvement rectiligne uniforme. Les lois horaires du point G sont alors :

$$\begin{cases} x_G(t) = x_0 + V_{0x}t \\ y_G(t) = y_0 + V_{0y}t \end{cases} \quad (3)$$

De ces relations, on peut déduire les mouvements absolus (dans le repère fixe R) des point G1 et G2 et par conséquent le mouvement relatif du point G1 par rapport au point G2

Le champ des vitesses d'un solide est un torseur. Connaissant la vitesse d'un point du solide et la vitesse instantanée de rotation de ce solide, on peut donc déterminer la vitesse de tout point de ce solide par la relation torsorielle :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(\Sigma/R) \wedge \overline{AB}, \quad \forall A \in \Sigma \text{ et } \forall B \in \Sigma$$

4.1 MOUVEMENT DES POINTS G1 ET G2 DANS LE REPÈRE FIXE

Appliquons la relation torsorielle aux points G, G1 et G2.

$$\vec{V}(G1/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{\Omega}(\Sigma/R) \wedge \overline{GG1}, \quad \text{avec } \overline{GG1} = d_1 (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) \quad (4)$$

$$\vec{V}(G2/R) = \vec{V}(G/R) + \vec{\Omega}(\Sigma/R) \wedge \overline{GG2}, \quad \text{avec } \overline{GG2} = -d_2 (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) \quad (5)$$

Les composantes dans le repère R de ces deux vecteurs vitesses sont :

$$\vec{V}(G1/R) = \begin{cases} V_{1x} = V_{0x} - d_1\theta' \sin(\theta) \\ V_{1y} = V_{0y} + d_1\theta' \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{V}(G2/R) = \begin{cases} V_{2x} = V_{0x} + d_2\theta' \sin(\theta) \\ V_{2y} = V_{0y} - d_2\theta' \cos(\theta) \end{cases} \quad (6)$$

Les lois horaires des points G1 et G2 s'écrivent :

$$\overline{OG1} = \begin{cases} x_1(t) = x_{10} + V_{0x}t + d_1 \cos(\theta) \\ y_1(t) = y_{10} + V_{0y}t + d_1 \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{OG2} = \begin{cases} x_2(t) = x_{20} + V_{0x}t - d_2 \cos(\theta) \\ y_2(t) = y_{20} + V_{0y}t - d_2 \sin(\theta) \end{cases} \quad (7)$$

4.2 MOUVEMENT DU POINT G1 DANS LE REPÈRE RELATIF

Des relations (6) on déduit la vitesse relative du point G1 par rapport au point G2 soit :

$$\vec{V}(G1/G2) = \vec{V}(G1/R) - \vec{V}(G2/R)$$

$$\vec{V}(G1/G2) = \begin{cases} -(d_1 + d_2)\theta' \sin(\theta) \\ (d_1 + d_2)\theta' \cos(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

La loi horaire du point G1 relativement au point G2 peut être formulée à partir de l'équation (7) ou de l'équation (8). Elle s'écrit :

$$\overline{G2G1} = \begin{cases} x_r(t) = x_{10} - x_{20} + (d_1 + d_2) \cos(\theta) \\ y_r(t) = y_{10} - y_{20} + (d_1 + d_2) \sin(\theta) \end{cases} \quad (9)$$

5 MESURES EXPÉRIMENTALES

La caméra de prise de vue est préalablement enclenchée. Le solide en lévitation sur la table horizontale est lancé en lui imprimant un mouvement initial de translation et de rotation. L'acquisition vidéo est effectuée à l'aide d'une webcam et son logiciel d'acquisition. La résolution des images est de l'ordre de 640 × 480 et la cadence des images de la vidéo est quinze images par seconde. Il est possible d'effectuer l'étude des mouvements plus rapides en augmentant la cadence des images. Cependant, cela peut vite conduire à un traitement fastidieux des vidéos lors du pointage de la trajectoire d'un point.

Le logiciel LATIS-Pro produit par la société Eurosmart est utilisé pour l'analyse des vidéos, l'acquisition des trajectoires, les calculs et tracés de ces trajectoires. La vidéo du mouvement du solide est lue sous le logiciel. La lecture débute sur la première image de la partie exploitable de la vidéo. Le pointage image par image de la trajectoire d'un point demande de définir au préalable un repère de projection. Les axes du repère de projection sont fixés, par le logiciel LATIS-Pro, parallèles au cadre de la caméra et liés au plan de la table à coussin d'air. L'origine O du repère est choisie sur la première image de la partie exploitable de la vidéo et un étalon de mesure de 1m repérer par une règle de couleur jaune sert comme étalon des longueurs. Le repère de projection correspond donc au repère $R(O, x, y, z)$ préalablement défini voir figure 3. Les pointages des trajectoires absolues $(x_1(t), y_1(t))$ et $(x_2(t), y_2(t))$ des points G1 et G2 sont effectuées. Le logiciel LATIS-Pro offre une option de marquage dans un repère relatif ; ce qui permet donc le pointage des trajectoires relatives $(x_r(t), y_r(t))$ du mouvement de G1 par rapport au point G2.

Après le pointage de la première courbe, Le pointage des courbes suivantes se fait en demandant une « nouvelle étude » et en conservant la courbe précédente du point acquise puis en revenant au début du film. Pour pouvoir ensuite effectuer des calculs, les trajectoires des points G1, G2 et du point G1 relativement à G2 doivent posséder exactement le même nombre de points et commencer à partir de la même image : le numéro de l'image est mentionné dans le logiciel LATIS-Pro sous la fenêtre de visualisation.

6 RÉSULTATS

À la fin des pointages des positions successives, les trajectoires des points G1 et G2 apparaissent clairement comme le montrent les captures d'écran de la figure 3. Ce sont des trochoïdes plus ou moins allongées.

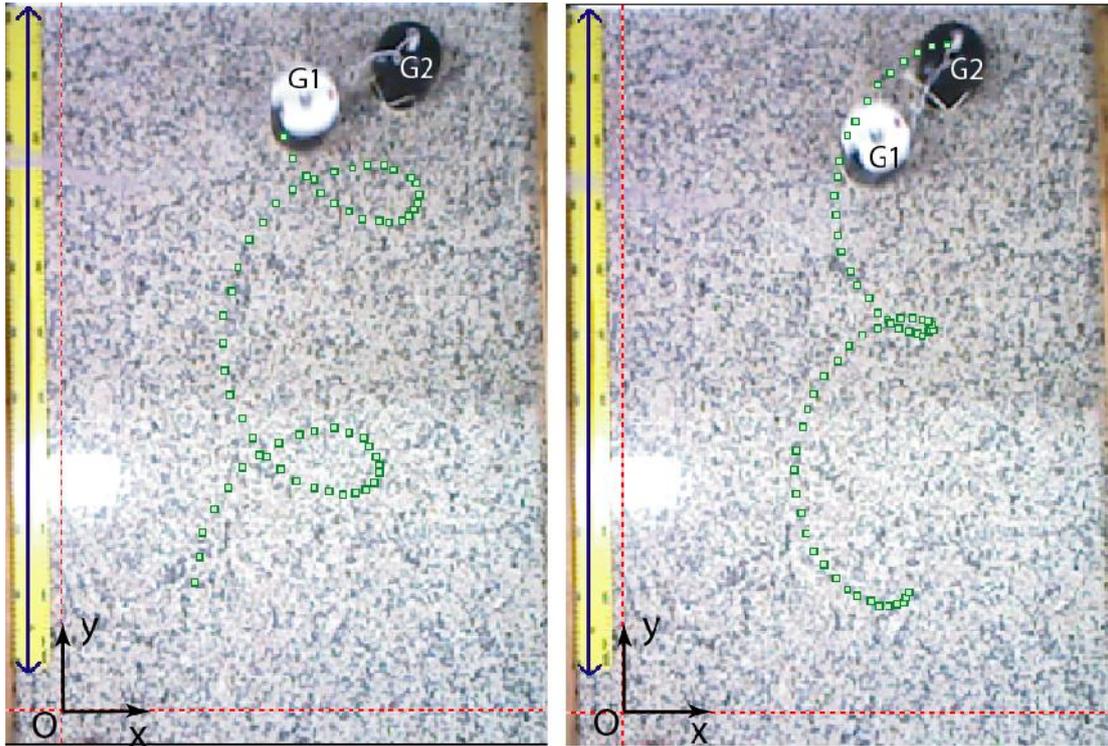


Fig. 3. *Mouvement d'un solide en lévitation sur un plan horizontal.*

La figure 3 montre les captures d'écran à la fin du pointage des positions successives des points G1 et G2. Les positions successives de ces points sont repérées par des points verts. Les lignes pointillées horizontales et verticales soulignent les directions des axes Ox et Oy du repère $R(O, x, y, z)$ du laboratoire.

7 MODÉLISATION NON LINÉAIRE

Dans cette section nous allons déterminer les valeurs numériques des paramètres cinématiques des équations (8) et (9). Les lois horaires de ces vecteurs sont non linéaires en fonction du temps

Il va falloir les modéliser par des relations de type :

$$\begin{cases} f_x(t) = A_x + B_x t + C_x \cos(D_x t + F_x) \\ f_y(t) = A_y + B_y t + C_y \cos(D_y t + F_y) \end{cases} \quad (10)$$

Une programme Maple, basée sur la routine NonlinearFit du package statistics, à été écrite qui à partir du fichier des données numériques LatisPro des lois horaires et une liste des valeurs initiales des coefficients A, B, C, D et F fournit en sortie les lois horaires ajustée du modèle (10).

7.1 MODÉLISATION DU MOUVEMENT ABSOLU DES POINT G1 ET G2

L'exécution du programme d'ajustement sur les données numériques des positions instantanées des points G1 puis des points G2 donne les lois horaires suivantes :

$$\overline{OG1} = \begin{cases} x_1(t) = 0.32 + 0.04 t - 0.13 \cos(4.8 t + 0.12) \\ y_1(t) = 0.18 + 0.31 t + 0.13 \sin(4.8 t + 0.12) \end{cases} \quad (11)$$

$$\overline{OG2} = \begin{cases} x_2(t) = 0.33 + 0.04 t + 0.090 \cos(4.8 t) \\ y_2(t) = 0.17 + 0.31 t - 0.089 \sin(4.8 t) \end{cases} \quad (12)$$

Les équations (11) et (12) comparées à l'équation (8) permet, par identification, de déterminer les paramètres cinématiques jusqu'alors inconnus tels que :

- Les positions initiales $(x_{10}, y_{10}) = (32cm, 18cm)$ du point G1 et $(x_{20}, y_{20}) = (33cm, 17cm)$ du point G2
- Les distances $d_1 = 13cm$ et $d_2 = 9cm$, au centre de masse G, respectivement du point G1 et G2
- La vitesse \vec{V}_0 du centre de masse G (voir équation (1)) ($V_{0x} = 0.04, V_{0y} = 0.31$) ms^{-1}
- La vitesse instantanée de rotation du solide Σ dans le repère du laboratoire $\omega = 4.8 rd/s$ et la phase initiale $\theta_0 = 0.12 rd$. L'angle horaire angulaire est alors : $\theta(t) = 4.8t + 0.12$.

La figure 4 représente respectivement les lois horaires $x_1(t), y_1(t)$ et la trajectoire $y_1(x_1)$ du point G1

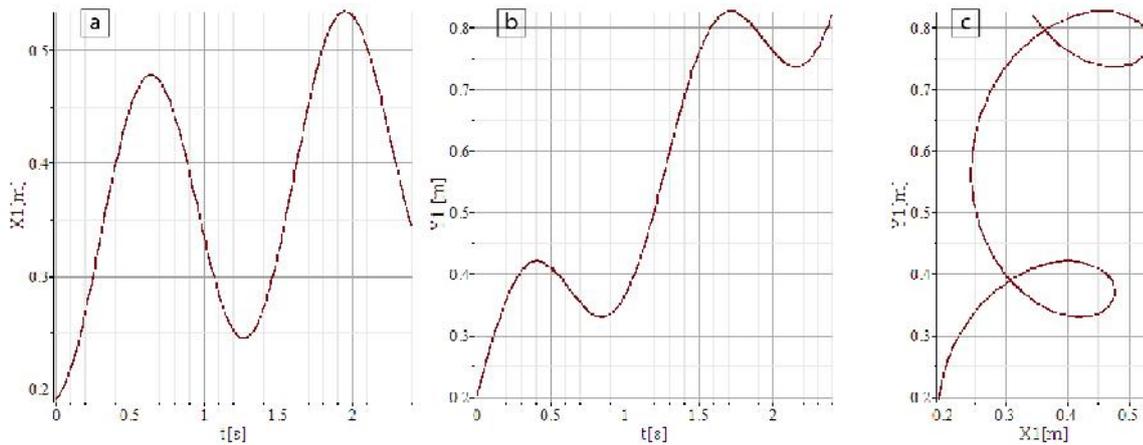


Fig. 4. Mouvement du point G1

La figure 5 représente respectivement les lois horaires $x_2(t), y_2(t)$ et la trajectoire $y_2(x_2)$ du point G2

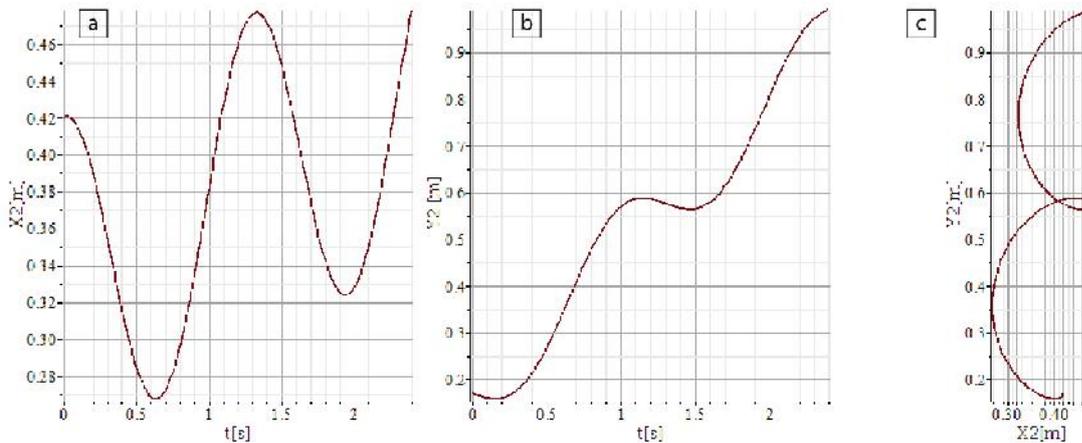


Fig. 5. Mouvement du point G2

7.2 MODELISATION DU MOUVEMENT RELATIF DU POINT G1 PAR RAPPORT AU POINT G2

L'exécution du programme d'ajustement sur les données numériques des positions instantanées relatives du point G1 donne la loi horaire suivante :

$$\overline{G2G1} = \begin{cases} x_r(t) = -0.22 \cos(4.8t + 0.12) \\ y_r(t) = 0.22 \sin(4.8t + 0.12) \end{cases} \tag{13}$$

La comparaison des équations (13) et (9) montre que la trajectoire du point G1 dans le repère relatif $R_2(G_2, x_2, y_2, z_2)$ est un cercle de rayon $R = d_1 + d_2 = 22\text{ cm}$

La figure 6 représente respectivement les lois horaires $x_r(t)$, $y_r(t)$ et la trajectoire $y_r(x_r)$ du point G1 par rapport à G2

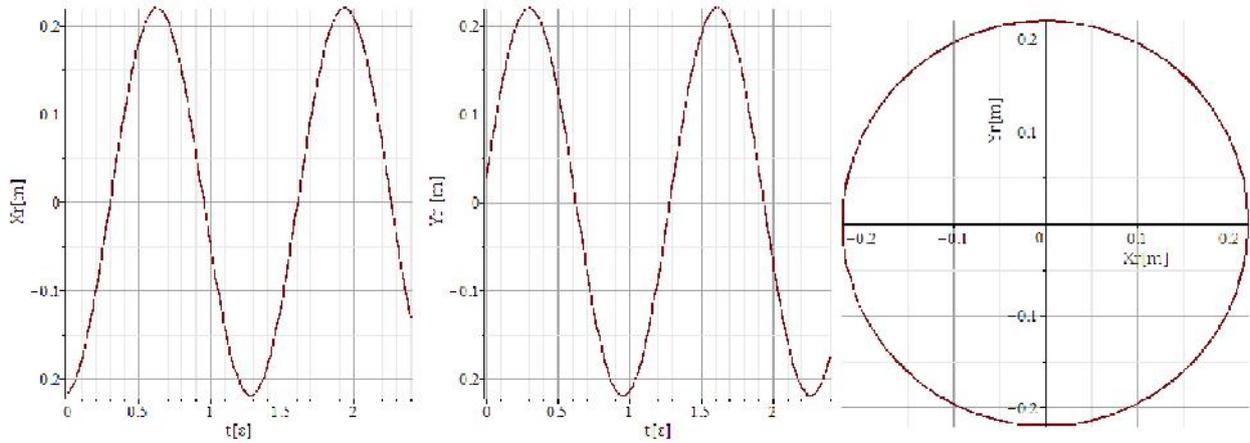


Fig. 6. Mouvement relatif du point G1 par rapport à G2

7.3 VÉRIFICATION DE LA LOI DE COMPOSITION DES VITESSES

Les vitesses absolues, d'entraînement et relative sont calculées en dérivant respectivement les relations (11), (12) et (13). Soient :

$$\vec{V}(G1/R) = \begin{cases} V_{1x} = 0.04 + 0.62 \sin(4.8 t + 0.12) \\ V_{1y} = 0.31 + 0.62 \cos(4.8 t + 0.12) \end{cases} \quad (14)$$

$$\vec{V}(G2/R) = \begin{cases} V_{2x} = 0.04 - 0.43 \sin(4.8 t) \\ V_{2y} = 0.31 - 0.42 \cos(4.8 t) \end{cases} \quad (15)$$

$$\vec{V}(G1/R_2) = \begin{cases} V_{rx} = 1.05 \sin(4.8 t + 0.12) \\ V_{ry} = 1.05 \cos(4.8 t + 0.12) \end{cases} \quad (16)$$

La loi vectorielle de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}(G1/R) = \vec{V}(G1/R_2) + \vec{V}(G2/R) \quad (a)$$

Ou bien

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}_r = \begin{cases} V_{1x} = V_{rx} + V_{2x} \\ V_{1y} = V_{ry} + V_{2y} \end{cases} \quad (b)$$

$$(c)$$

Les équations (17, b) et (17, c) sont satisfaites. Le graphe suivant en donne la représentation temporelle.

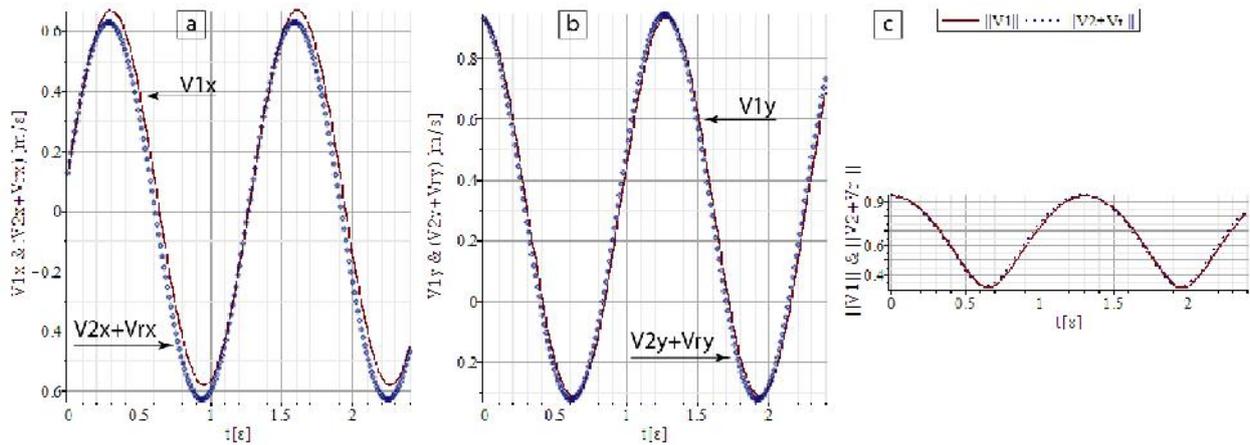


Fig. 7. Mouvement relatif du point G1 par rapport à G2

La figure 7 représente la loi de composition vectorielle des vitesses par ses composantes (fig. 7.a, fig. 7.b) et par son module (fig. 7.c). L'erreur relative calculée est de 7 % sur V_{1x} et de 5 % sur V_{1y} . L'erreur relative sur le module est de 2%

8 CONCLUSION

Cette étude est consacrée à l'analyse expérimentale de la cinématique d'un solide sur une table à coussin d'air conçue et réalisée au laboratoire de mécanique et de thermodynamique. Le mouvement du solide est suivi à l'aide d'une caméra vidéo. Le film vidéo analysé par le logiciel LatisPro. La trajectoire absolue et la trajectoire relative sont clairement observées, quantifiées et modélisées. Les paramètres cinématiques de ces mouvements ont été déterminés par la méthode inverse. Une procédure Maple d'ajustement non linéaire a été écrite à ce sujet. De même, la loi de relativité galiléenne ou composition des vitesses par changement de repère est bien vérifiée. Les mesures expérimentales sont en bon accord avec l'expression théorique.

REFERENCES

- [1] N. Combe, "Analyse vidéo et mécanique du solide, ", *Le Bup Physique Chimie*, vol. 107, n° 925, pp. 925-946, Octobre 2013.
- [2] M. Ait Moras, I. Ait Ouaraab and R. Mbarek, *Expérimentation assistée par ordinateur : Etude cinématique et dynamique sur table à coussin d'air*, Mémoire de Licence, ENS, Marrakech, 2013.
- [3] M. Saslami and R. Mbarek, *Expériences de mécanique sur banc à coussin d'air et sur table à coussin d'air*, Mémoire du 2nd cycle, ENS, Marrakech, 2011.
- [4] R. Elbarki and O. Ait raleb, *Expérimentation assistée par ordinateur dans les lycées Marocains*, Mémoire du 2nd cycle, ENS, Marrakech, 2006.
- [5] P. Canton, "Vidéo et sciences physiques, ", *Le Bup Physique Chimie*, vol. 91, n° 796, pp. 1399-1424, juillet-Aout-Septembre 1997.
- [6] A. Grosse and P. Lecarpentier, "Mesures informatiques sur des images vidéo, ", *Le Bup Physique Chimie*, vol. 87, n° 758, pp. 1367-1380, Novembre 1993.