

Dynamique chaotique : une analyse non linéaire des séries de rentabilités boursières - Cas de la Bourse de Casablanca -

[Chaotic dynamics : a nonlinear analysis of stock returns series - Case of the Casablanca Stock Exchange -]

Mohamed Yassine EL HADDAD, Rajaa AMZILE, and Salma ESSAFI

Département des sciences de gestion, Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales,
Université Mohammed V, Rabat, Maroc

Copyright © 2016 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: This paper's purpose is to seek the nature of the dynamics of profitability of the Casablanca Stock Exchange through Estimating Lyapunov exponent and correlation dimension (tools of chaos detection).

The results of this study allowed us to conclude that the generating process of stock returns is far from linear and normal. This is confirmed by the rejection of the assumption that stock returns are identically and independently distributed (iid). All these findings lead us to refute the efficient market hypothesis designed and modeled in a framework of linearity and normality in the behavior of returns. In this framework, we have tried to present chaos theory as an alternative to the dominant theory.

KEYWORDS: Efficiency, chaos, BDS, madex, Lyapunov.

RESUME: cette contribution se propose de chercher et de déterminer la nature de la dynamique des rentabilités de la Bourse de Casablanca à travers L'estimation de l'exposant Lyapunov et de la dimension de corrélation; outils de détection de de chaos.

Les résultats de cette étude nous ont permis de conclure que le processus générateur de rentabilités boursières est loin d'être linéaire et normale. Cela est confirmé par le rejet de l'hypothèse selon laquelle les rentabilités boursières sont identiquement et indépendamment distribuées (iid). Toutes ces constatations nous amènent à réfuter l'hypothèse des marchés efficients conçue et modélisée dans un cadre de linéarité et de normalité dans le comportement des rentabilités. Dans ce cadre, nous avons tenté de présenter la théorie du chaos comme une alternative à la théorie dominante.

MOTS-CLEFS: efficience, chaos, BDS, madex, Lyapunov.

1 INTRODUCTION

La théorie d'efficience s'est avérée insuffisante à l'égard de certains systèmes tels que les systèmes chaotiques. Ceci a pu être démontré par l'économie expérimentale qui a révélé le comportement irrationnel des investisseurs, ainsi que la déviation des cours par rapport à leurs valeurs fondamentales, contredisant ainsi les principes fondamentaux de la théorie d'efficience. Ces insuffisances ont orienté la recherche scientifique vers une nouvelle voie, ouvrant ainsi de nouveaux débouchés qui ont donné naissance aux processus chaotiques.

Ces processus se caractérisent par leur sensibilité aux conditions initiales, l'existence d'un attracteur spécifique et par une dynamique non linéaire. Dans ce cadre, les processus chaotiques se sont avérés capables d'expliquer la dynamique des cours boursiers, puisque de nombreuses études ont recouru à cette théorie afin de prouver les anomalies de la théorie classique de

la gestion de portefeuilles. Ainsi, Serait-il possible que les rentabilités boursières de la bourse de Casablanca suivent, également, un processus chaotique ?

1.1 OBJECTIF ET CONTEXTE DE L'ENQUÊTE

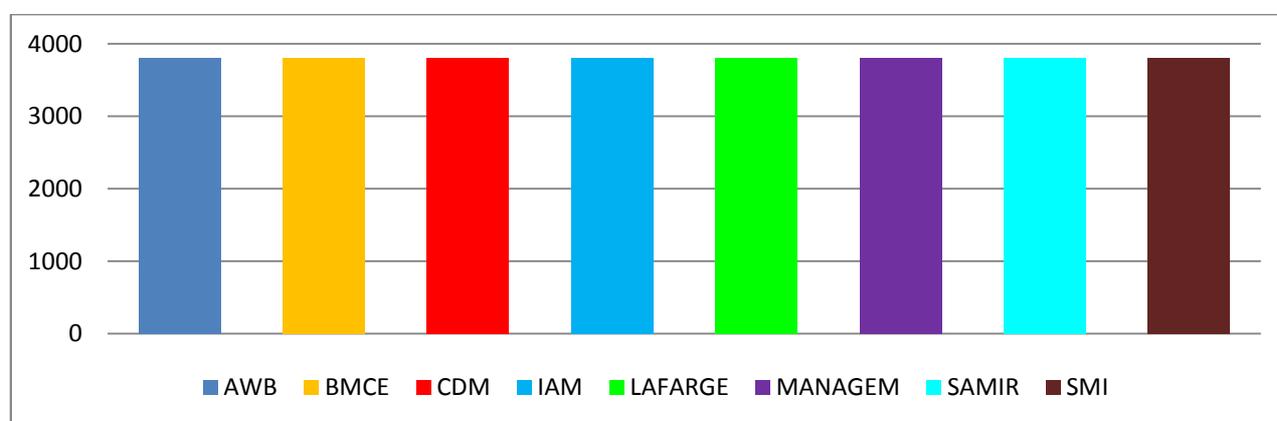
A l'image des autres bourses internationales, la Bourse de Casablanca utilise la théorie de gestion de portefeuilles classique pour évaluer les actifs financiers, même si cette théorie s'est avérée insuffisante pour expliquer les périodes de crises. Dans cette perspective, la théorie du chaos a vu le jour comme une théorie alternative à la théorie classique.

L'étude qui sera menée dans le cadre de l'application empirique, portera sur les valeurs qu'on a jugé les plus importantes de l'indice MADEX.

Afin de disposer de données représentatif de la Bourse de Casablanca, on a retenu pour chaque société une fréquence de données quotidiennes, d'une période allant du 01-01-2005 au 30-05-2015.

L'échantillon se présentera comme suit :

Graphique 1. Représentation graphique de l'échantillon



Le choix de l'indice MADEX, au détriment des autres indices, provient de l'importance de la liquidité des valeurs qu'il représente. Cependant, les données journalières choisies sont davantage bruitées à cause de l'influence de l'effet week-end¹.

En général, la recherche de processus chaotiques sur les données boursières se fait sur les rentabilités. En effet, La meilleure façon d'éliminer cette bruité est de travailler sur les rentabilités, définie comme étant la différence logarithmique des cours boursiers :

$$R_t = \text{Log}(x_t) - \text{Log}(x_{t-1}) \text{ où } x_t \text{ désigne le cours boursier observé en } t, \text{ pour } t=1, \dots, T.$$

1.2 CADRE THÉORIQUE ET FORMULATION DES HYPOTHÈSES DE RECHERCHE

La théorie de chaos a connu un succès énorme du fait de sa capacité d'expliquer les irrégularités des cours boursiers que le modèle classique a ignoré.

En effet, ce modèle ne prenait pas en considération le caractère auto-entretenu des fluctuations, il envisage que seule les chocs exogènes peuvent être source des variations brutales des cours, toutes en insistant sur la normalité de ces variations.

Or, un tel cas ne représente pas toute la réalité : le krach de 1987 s'avère un exemple de la faiblesse de ce modèle. Dans cette perspective, la théorie d'efficacité apparaît comme une illusion qui reflète une mauvaise image de la réalité des marchés financiers. A cet égard, **la théorie de chaos** s'est développée comme une alternative à la théorie d'efficacité, dans le

¹ L'effet week-end se traduit par une rentabilité anormalement forte en fin de semaine et anormalement faible en début de semaine.

but d'expliquer les niveaux élevés des fluctuations des variables économiques et financières à travers la mise en évidence de la non linéarité et la non normalité des mouvements des cours boursiers.

Empruntée des sciences physiques, le chaos présente une nouvelle perspective de recherche dans la finance, cette théorie présume que les mouvements des cours ne suivent pas une marche aléatoire, contrairement à ce que prétend l'efficience, mais plutôt un cheminement chaotique, ce terme décrit des mécanismes parfaitement déterminés qui provoquent des mouvements apparemment sans suite logique.

En fait, la théorie de chaos n'a pris son essor que depuis les travaux de Lorenz, dans les années 60, à travers sa découverte de "l'effet de papillon", à la suite d'une panne d'ordinateur, il dut re-renter les données initiales de son modèle à la main, et à sa plus grande surprise, il s'aperçut que les courbes, qui devraient se superposer parfaitement, dérivent au bout d'un certain temps, et deviennent très différentes. Ceci provenait en réalité du fait que l'ordinateur effectuait les calculs avec six décimales mais n'en imprimait que trois, ces petits erreurs s'amplifiaient de façon exponentielle, doublant tous les quatre jours en temps simulé, ce qui fait qu'au bout de deux mois les deux solutions étaient totalement différentes. Lorenz en conclut alors que la moindre erreur d'observation, le moindre changement dans les conditions initiales se traduisent à terme par un résultat complètement différent. Il a ainsi découvert l'une des caractéristiques fondamentales des systèmes chaotiques à savoir la sensibilité aux conditions initiales.

A cette condition nécessaire à l'apparition de comportement chaotique, il faut ajouter d'autres propriétés comme celle de la présence d'un attracteur ou encore la non linéarité. En effet, cette dernière renvoie d'une manière générale à une rupture de la proportionnalité des causes et des conséquences. On peut rappeler à ce titre la fameuse citation de l'effet de papillon : un battement d'ailes de papillon au Brésil peut entraîner une tornade au Texas. Par ailleurs, la non-linéarité se manifeste, dans le comportement des systèmes, dans des modifications qualitatives brusques du comportement des systèmes, sous l'influence de certains paramètres. Ainsi, un paramètre peut évoluer de manière linéaire et entraîner dans une certaine frange une modification linéaire, c'est-à-dire progressive, du comportement du système. Mais à partir d'une valeur critique du paramètre, on observe une transition brusque du système vers un autre type de comportement. Un comportement non-linéaire s'est alors greffé sur une frange de linéarité.

Reste que la troisième propriété de la même importance que les deux propriétés à savoir la présence d'un attracteur, celui-ci représente la dynamique d'un système chaotique. En général, un attracteur peut être défini comme une forme géométrique, composée de sous ensembles de points vers lequel convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique. Il représente ainsi le comportement de long terme du système dynamique.

Bref, un système chaotique est un système dynamique non linéaire exhibant de la sensibilité aux conditions initiales et caractérisé par un attracteur spécifique dont le comportement à long terme est imprévisible.

2 MATÉRIEL ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

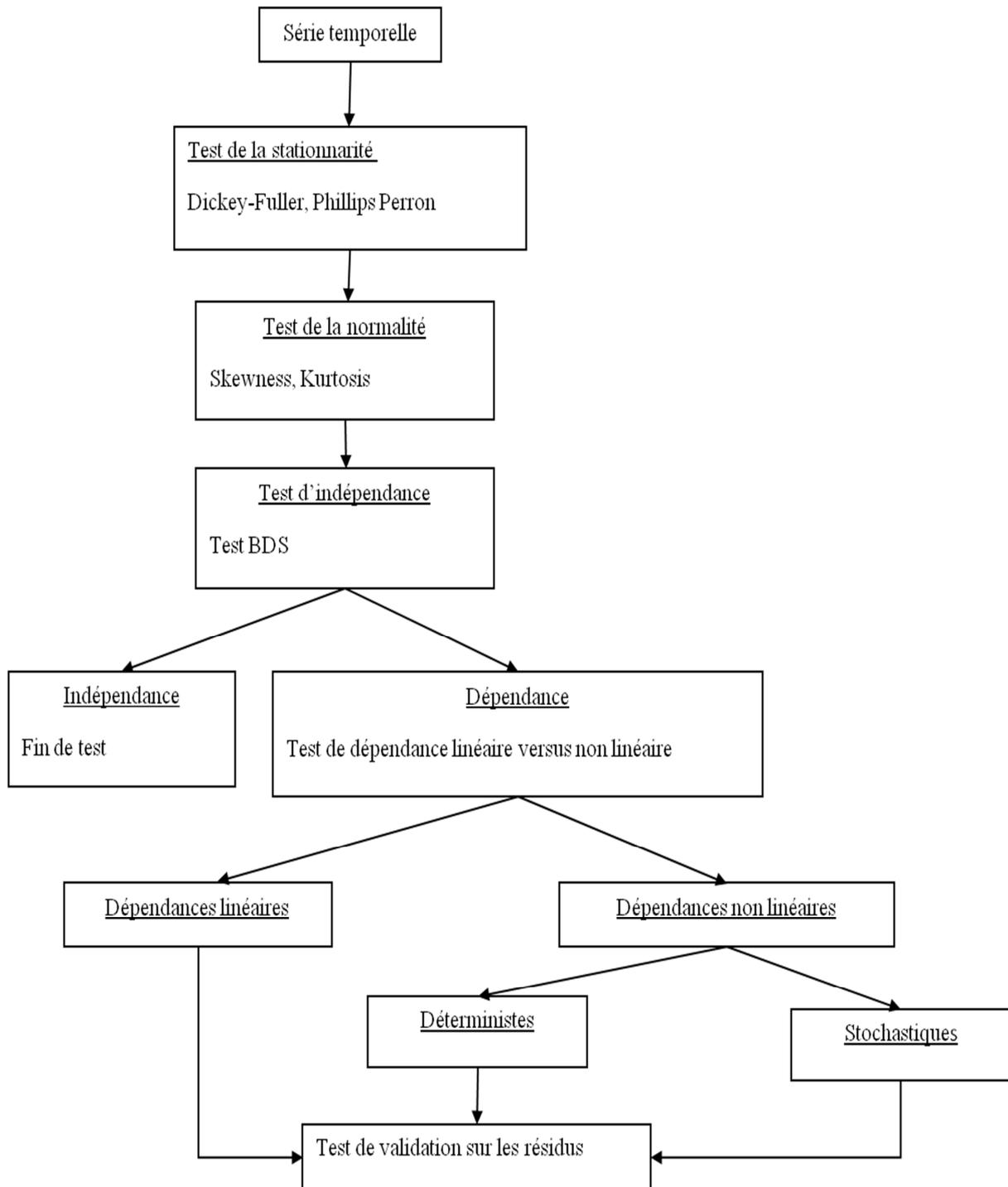
Afin de mettre en évidence le comportement chaotique des valeurs de l'indice MADEX, il convient d'utiliser des outils spécifiques, tels que la dimension de corrélation et les exposants de Lyapunov, puisqu'ils sont les deux indicateurs principaux d'un processus chaotique.

- Les exposants de Lyapunov : ils mesurent la force de divergence des trajectoires à partir de points initialement très proches indiquant donc la perte de pouvoir prédictif au cours du temps. En effet, si l'écart initial entre deux points très proches croît exponentiellement, une condition initiale mesurée avec une précision finie ne peut pas permettre de connaître la position future du système au delà du court terme. Ainsi, ils permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales. Par ailleurs, le signe des exposants Lyapunov permet de classer les attracteurs. Un exposant de Lyapunov négatif indique un resserrement des trajectoires sur l'attracteur (absence de sensibilité aux conditions initiales), alors qu'un exposant de Lyapunov positif témoigne d'une divergence des trajectoires sur l'attracteur (sensibilité aux conditions initiales).
- Dimension de corrélation : Si le système dynamique étudié est chaotique, il a un attracteur de dimension finie. Une fois la reconstruction effectuée, il devient possible de calculer cette dimension qui mesure comment un attracteur remplit l'espace. Il existe plusieurs calculs de dimensions et l'un des paramètres les plus robustes est la dimension de corrélation, celle-ci est d'autant plus élevée que le système est plus aléatoire. De ce fait, pour un attracteur chaotique, la dimension de corrélation se stabilise à partir d'une certaine dimension de plongement appelée « dimension de saturation ».

La mise en évidence des phénomènes chaotiques n'est pas une tâche facile. En effet, cela nécessite le passage par plusieurs étapes qui requiert l'utilisation de plusieurs outils informatiques sophistiqués. L'ensemble de ces étapes peut se

regrouper en deux points : le premier consiste à vérifier la non linéarité des séries financières qui est considérée comme un passage incontournable au deuxième point, à savoir, la détection du chaos. Le schéma suivant résume notre chemin vers le chaos.

Graphique 2. Méthodologie de recherche du chaos dans les séries temporelles de l'indice boursier MADEX

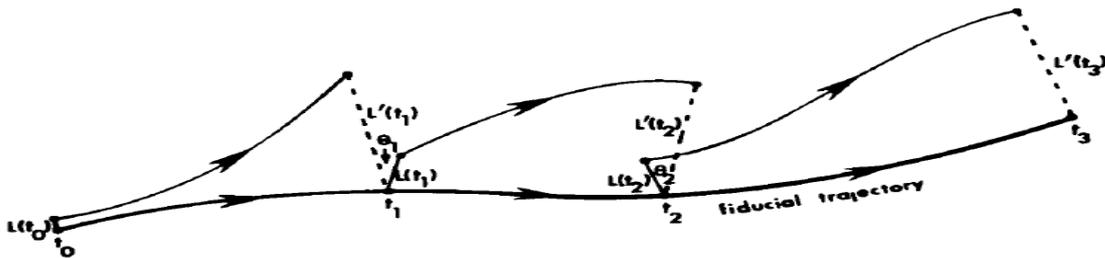


3 RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

3.1 L'ESTIMATION DU PLUS GRAND EXPOSANT LYAPUNOV

Il existe divers algorithmes permettant d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov à partir de l'observation d'une série temporelle. On a ici choisi d'appliquer l'algorithme élaboré par Wolf et al. Cet algorithme permet de déterminer le plus grand exposant de Lyapunov à partir de l'observation d'une série temporelle. Une représentation schématique de cet algorithme est reproduite ci-après :

Graphique 3. Détermination du plus grand exposant de Lyapunov



On choisit tout d'abord un point initial (à la date t_0) sur une orbite quelconque de l'attracteur. On localise ensuite le plus proche voisin de ce point initial et on note la distance entre ces deux points $L(t_0)$. A une date t_1 ultérieure, la distance initiale $L(t_0)$ entre ces deux points aura évolué en une distance $L'(t_1)$. On cherche alors une nouvelle trajectoire (remplaçant la précédente) qui doit satisfaire les deux critères suivants :

- Sa distance $L(t_1)$ par rapport à la trajectoire de référence doit être faible ;
- La séparation angulaire θ_1 entre $L(t_1)$ et $L'(t_1)$ doit être petite.

On répète cette procédure jusqu'à ce que la trajectoire de référence ait traversé l'ensemble des données. On estime finalement le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}$$

Où M est le nombre total de remplacements de trajectoires.

L'algorithme de Wolf est donc basé sur la mesure du taux de divergence entre deux trajectoires. En pratique, on se fixe une distance maximale à ne pas dépasser. Dès que cette distance est franchie, la trajectoire précédemment suivie est remplacée par une nouvelle trajectoire et ainsi de suite... Avec un nombre suffisamment important et si l'attracteur est chaotique, le calcul doit converger vers une valeur stable λ_1 .

Le répertoire Opentstool offre un algorithme similaire à celui de Wolf, il s'agit de la commande « largelyap » qui sera utilisé afin d'estimer le plus grand exposant Lyapunov des séries de rentabilités de l'échantillon. Dans le but de valider cette estimation, il convient d'appliquer ce test sur les séries résiduelles.

On reporte ici les résultats obtenus :

Tableau 1. L'estimation du plus grand exposant de Lyapunov

Exp Lyap	AWB	BMCE	CDM	IAM	LAFARGE	MANAGEM	SAMIR	SMI
λ_1	0,1298	0,0759	0,187	0,389	0,09082	0,09126	0,0839	0,1534
λ_2	0,0871	0,0699	0,1742	0,364	0,0845	0,0777	0,0723	0,1208
λ_3	0,0769	0,0696	0,1535	0,334	0,0807	-0,0676	0,0621	0,0948
λ_4	-0,513	-0,6548	0,1477	0,2085	-0,4959	-0,4983	0,0548	-0,5783
λ_5	-1,347	-1,694	0,0769	-0,4814	-1,58	-1,351	0,0175	-1,667
λ_6	-3,561	-4,059	-5,765	-8,915	-4,175	-3,608	-3,602	-4,423

La première remarque que l'on peut effectuer au regard de ce tableau est que le plus grand exposant Lyapunov est positif, suggérant ainsi la présence d'un attracteur chaotique pour toutes les séries de rentabilités boursières considérées. La positivité du plus grand exposant Lyapunov est donc le signe de la faible prédictibilité des diverses séries considérées. En outre, plus la valeur de l'exposant Lyapunov est importante et moins le système est prévisible.

Cependant, on constate que tous les exposants ne sont pas positifs et ils fluctuent autour de zéro présentant ainsi une certaine stabilité. Ceci met en doute le caractère chaotique des séries de rentabilités, dans la mesure où l'estimation des exposants Lyapunov ne constitue pas un test statistique à proprement parler.

Afin de vérifier la fiabilité des résultats obtenus, on appliquera par la suite ce test sur les séries résiduelles issues du modèle ARMA.

Le tableau suivant représente les résultats obtenus

Tableau 2. L'estimation du plus grand exposant de Lyapunov

Exp. lyap	AWB	BMCE	CDM	IAM	LAFARGE	MANA GEM	SAMIR	SMI
λ_1	-0,4743	-0,0033	-0,0211	0,05621	0,0056	0,09001	0,1197	-0,0918
λ_2	-0,0228	0,0926	0,102	0,02793	0,0999	0,05179	0,064	0,0003
λ_3	0,0724	0,1382	0,0614	-0,0026	-0,0347	-0,00774	-0,056	-0,0901
λ_4	0,0884	0,1481	-0,0421	0,02113	0,05441	0,000143	-0,0141	-0,1129
λ_5	0,1129	-0,0512	-0,0972	-0,0005	-0,03913	0,01079	0,0281	0,0351
λ_6	0,1184	-0,4437	0,1067	-0,0157	0,02015	0,04013	0,0902	0,1182

Il ressort du test résiduel que les valeurs estimées sur les séries résiduelles et sur les séries originelles sont tout à fait similaires. En effet, l'ensemble des exposants Lyapunov des séries résiduelles fluctuent, à l'image des séries de rentabilités, au voisinage de zéro.

Du fait de la similarité de ces résultats, il convient à présent de déterminer la valeur de la dimension de corrélation afin de vérifier le caractère chaotique du processus sous-jacent aux séries des rentabilités boursières originelles et résiduelles.

▪ L'estimation de la dimension de corrélation

Afin d'estimer la dimension de corrélation, on a utilisé la commande « corrsun » dans la boîte opentstool qui se base sur l'algorithme de Grassberger et Procaccia (GP).

L'algorithme de GP reconstruit dans l'espace des phases les points issus de la série temporelle par la méthode dite du retard (plongement temporel). Ces points ont pour coordonnées les valeurs du potentiel à l'instant t, t+Dt... soit x(t), x(t+Dt), x(t+2Dt),..., x(t+(d-1) Dt), où d représente la dimension de plongement et Dt le retard. L'intégrale de corrélation C(r) est alors calculée. La dimension de corrélation (DC) est alors donnée par la formule:

$$DC = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(C(r))}{\log(r)}$$

En fait, Les résultats obtenus sur les séries de rentabilités sont calculés à partir de la valeur de la pente de la courbe $\frac{\log(C(r))}{\log(r)}$ dans sa portion jugée linéaire pour les différentes valeurs de la dimension de plongement allant de 2 jusqu'à 16.

Les différents résultats sont reportés dans le tableau suivant :

Tableau 3. *L'estimation de la dimension de corrélation*

Dimension de plongement	AWB	BMCE	CDM	IAM	LAFARGE	MANAGEM	SAMIR	SMI
2	1,44	1,25	0,93	1,625	1,09	2,11	1,27	0,81
3	2,3	1,63	0,96	2,7	1,5	2,14	2,63	1,4
4	3,02	1,57	1,37	3,85	1,98	2,92	3,27	1,5
5	3,48	2,56	1,5	5,18	2,32	3,09	5,18	1,85
6	4,07	3,09	1,6	5,77	2,74	4,54	5,07	3
7	4,7	3,43	2,14	8,9	2,86	5,47	5,75	3,7
8	5,625	3,28	2,17	10,62	3,5	9,54	6,81	2,5
9	4,24	4,31	3,88	82,8	3,82	15,38	7,35	3,28
10	4,11	4,24	5,2	10	4,43	7,02	34	3,66
11	5,94	4,78	2,68	16	4,22	36,25	15	4,9
12	5,11	2,8	1,2	9,05	5,44	23,75	26,25	4,66
13	5,86	5,53	2,28	5,88	5,23	15,55	21,66	6,19
14	7,53	4,8	4,59	16,66	4,9	15,55	8,96	6,66
15	6,28	4,04	6,2	24,3	5,61	12,8	12,08	10,9
16	10,59	4,56	2,7	50	6,63	6,15	13,125	6,42

Ces résultats montrent que, dans tous les cas, la dimension de corrélation fluctue avec la croissance de la dimension de plongement, traduisant ainsi l'instabilité de la dimension de corrélation. Notant que pour un attracteur chaotique, la dimension de corrélation se stabilise à partir d'une certaine dimension de plongement appelée « dimension de saturation ».

Le fait que l'on ne puisse pas détecter de stabilisation de la dimension de corrélation nous paraît être indicatif du fait que le processus sous-jacent est de nature stochastique. Néanmoins, rien ne prouve que la dimension du système ne se stabilise pas à une valeur très élevée de la dimension de plongement. On rencontre alors ici une limitation due à notre nombre de données qui, s'il est important, n'en reste pas moins très faible par rapport au nombre d'observations utilisé par les physiciens. En d'autres termes, rien ne prouve que l'on ne soit pas en face d'un processus déterministe à grande dimension, que l'on n'arrive pas à détecter en raison de l'insuffisance du nombre de points utilisés dans l'étape de reconstruction. Afin de vérifier ces conclusions, il convient d'appliquer ce test sur les séries résiduelles. Les résultats obtenus sont repris dans le tableau suivant :

Tableau 4. *L'estimation de la dimension de corrélation*

dimension de plongement	AWB	BMCE	CDM	IAM	LAFARGE	MANAGEM	SAMIR	SMI
2	1,95	1,78	1,56	2,15	1,81	1,88	1,98	1,04
3	2,48	2,61	1,65	2,8	2,05	2,82	2,7	1,75
4	3,04	2,55	1,93	3,82	2,19	3,57	3,34	1,94
5	3,66	3,1	3,14	4,9	2,37	3,6	4,63	2,48
6	3,84	2,89	2,86	5	2,53	1,81	4,48	2,12
7	3,77	2,68	3,03	7,14	3,11	5,51	5	3,13
8	4,11	3,12	2,81	9,2	3,47	5,62	5,82	3,6
9	4,49	3,57	2,6	8,89	4,11	4,68	6,17	3,76
10	4,53	4,77	2,17	10	4,12	4	7,29	5
11	5,22	4,99	2,72	17,5	4,47	5	7,74	5,37
12	5,42	4,4	3,48	15,71	5,39	5,41	9,19	4,78
13	5,51	4,21	3	58	5,09	5,42	10,28	6,4
14	5,84	4,63	2,42	18,18	5,05	6,34	9,6	10,28
15	5,82	4,27	6,44	38	5,5	12,38	12,22	10,32
16	6,04	4,65	6,72	65	5,09	10,71	12,08	8,38

Les conclusions tirées du test résiduel sur la dimension de corrélation sont identiques à celles obtenues sur les séries originelles. En effet, les valeurs de la dimension estimée sur les séries résiduelles fluctuent selon le même rythme que les séries de rentabilités. Cependant, en raison de la non saturation de la dimension de corrélation lorsque la dimension de plongement croît, nous sommes tentés de conclure au caractère stochastique du processus générant les séries de rentabilités boursières.

4 CONCLUSION

L'étude portée sur les valeurs de l'indice MADEX nous a amené aux conclusions suivantes :

- ☛ nous avons pu constater un rejet clair de la normalité pour toutes les séries de rentabilités des 9 valeurs de l'indice MADEX. En effet, nous avons pu montrer l'existence d'asymétrie et des queues de distribution plus épaisses que celles d'une distribution normale.
- ☛ une deuxième conséquence: La valeur positive du plus grand exposant Lyapunov, des rentabilités des séries originelles et résiduelles, peut nous inciter à conclure que la nature du processus est chaotique. En revanche, la fluctuation des exposants Lyapunov et l'instabilité de la dimension de corrélation contredisent cette conclusion. Ainsi, nos résultats nous autorisent à conclure provisoirement que les rentabilités de la Bourse de Casablanca ne sont pas chaotiques.

Le fait que l'on ne puisse ne pas prouver le caractère chaotique des séries de rentabilités nous paraît être indicatif du fait que le processus sous-jacent est de nature stochastique. On rencontre alors ici une limitation due à notre nombre de données qui, s'il est important, n'en reste pas moins très faible par rapport au nombre d'observations utilisé par les physiciens. C'est l'une des difficultés rencontrées par les économistes lors de la recherche dans ce domaine.

Néanmoins, cette étude nous a permis de conclure que le processus générateur de rentabilités boursières est loin d'être linéaire et normale. Cela est confirmé par le rejet de l'hypothèse selon laquelle les rentabilités boursières sont identiquement et indépendamment distribuées (iid). Toutes ces constatations nous amènent à réfuter l'hypothèse des marchés efficients conçu et modélisé dans un cadre de linéarité et de normalité dans le comportement des rentabilités. Dans ce cadre, nous avons tenté de présenter la théorie du chaos comme une alternative à la théorie dominante.

REFERENCES

- [1] **LURCAT, François. 2002.** « *Le chaos* ». Paris : Presses Universitaires de France – PUF, 2002.
- [2] **MIGNON, Valérie. 1998.** *Marchés Financiers et modélisation des rentabilités boursière*. Paris : ECONOMICA, 1998.
- [3] **VERNIMMEN, Pierre,** *Finance d'entreprise*, édition DALLOZ 2002
- [4] **ALBOUY, Michel. 2005.** « Peut-on encore croire à l'efficacité des marchés financiers ? » ARTICLE VOL 31/157. *Revue Française de Gestion*. 2005, p. p: 170.
- [5] **Omar, ESSARDI. 2007.** efficacité informationnelle et dépendance non linéaire . *Critiques économiques*. 2007, n°20.