International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 17 No. 3 Aug. 2016, pp. 1050-1061

http://www.ijias.issr-journals.org/

Effets non linéaires dans l'interaction d'un ensemble de particules de spin 1 avec un champ oscillant dans l'expression de l'aimantation et de la susceptibilité magnétique

[Non linear effects in the magnetization and the magnetic susceptibility of a set of spin one particles interacting with an oscillating field]

Chadia Qotni, Az-Eddine L. Marrakchi, Salaheddine Sayouri, and Yamina Achkar

LPTA, Département de Physique, Faculté des Sciences – Dhar El Mahraz,
BP 1796 Fes-Atlas, Morocco

ABSTRACT: We study a set of particles of spin 1 subjected to an oscillating field. We calculate the steady states of this system using the Floquet theorem and the method of resonant medium developed to the third order with respect to the oscillating field intensity.
The calculation of the magnetization of the overall system allows one to show the saturation of absorption, and gives, to order three, asymptotic terms of both the dispersion and the absorption where nonlinear effects appear.

KEYWORDS: Magnetic susceptibility, Magnetization, Floquet theorem, Resonating Main values Method, Radiation-Matter interaction.

RESUME: Dans cet article, nous avons étudié un ensemble de particules de spins 1 soumis à un champ oscillant d'amplitudeω_1. Nous avons calculé les états permanents de ce système en utilisant le théorème de Floquet et la méthode des moyennes résonantes développée jusqu'au troisième ordre par rapport à l'intensité du champ oscillant.
Le calcul de l'aimantation globale du système a ensuite permis de mettre en évidence la saturation de l'absorption et de donner, jusqu'à l'ordre trois, les expressions asymptotiques des termes de dispersion et d'absorption, dans lesquelles apparaissent des effets non linéaires.

MOTS-CLEFS: Susceptibilité magnétique ; Aimantation ; Théorème de Floquet ; Méthode des moyennes résonantes ; Interaction rayonnement–matière.

1 INTRODUCTION

L'étude de la susceptibilité magnétique des matériaux a des applications dans plusieurs domaines de la physique tels que l'électromagnétisme, l'application radar, la propagation optique [1-3], la photonique [4-5] et les semi-conducteurs [6].

Dans cet article, nous avons utilisé le théorème de Floquet [7] et la méthode des moyennes résonantes appliqués à un système de spins 1 soumis à un champ oscillant d'amplitude ω_1. Nous avons déterminé la composante de l'aimantation et la susceptibilité magnétique jusqu'à l'ordre trois en ω_1.Nous avons mis en évidence les phénomènes de résonance rotatoire et de température de spin, ainsi que le comportement de l'aimantation. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de la littérature [8].

Nous nous intéressons à l'interaction d'un champ radiofréquence avec un ensemble de particules de spins1 ; sans interactions mutuelles ; en utilisant le théorème de Floques et la méthode des moyennes résonantes ; permettant d'éviter les catastrophes de résonance [9].

Le théorème de Floquet, comme nous le verrons par la suite, est un outil mathématique puisant et élégant qui permet de résoudre d'une manière générale les problèmes périodiques dans le temps, et est un procédé de calcul valable pour les systèmes quantiques à Hamiltoniens périodiques.

2 THEOREME DE FLOQUET ET METHODE DES MOYENNES RESONANTES (MMR)

2.1 THÉORÈME DE FLOQUET

On considère un système quantique en interaction avec un champ oscillant, périodique de période$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$, et d'amplitude ω_1. L'équation de Schrödinger régissant l'évolution de ce système est telle que

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{1}$$

$$H(t) = H_0 + \omega_1 H_1(t) \tag{2}$$

où H_0 est l'Hamiltonien du système libre, et où H_1 est l'Hamiltonien qui traduit l'interaction avec un champ périodique.

Soit V (t) l'opérateur d'évolution relatif à l'éq. (1), V (t) satisfait à

$$i\frac{d}{dt}V((t)) = H((t))V(t) \tag{3}$$

D'après le théorème de Floquet, il existe une décomposition (R, T (t)) de telle sorte que :

$$V(t) = T(t)e^{-\frac{\underline{\underline{iRt}}}{\hbar}} \tag{4}$$

Où T (t) est un opérateur unitaire, périodique de période τ (ou un multiple deτ), et où R est un opérateur hermitien constant.

V (t) s'écrit, en représentation d'interaction, sous la forme

$$V_I = T_I\big(((t))\big)e^{\frac{i\,\underline{\underline{H_0}}\,t}{\hbar}}\,V(t) \tag{5}$$

Utilisant l'équation (3), on a encore:

$$V = T_I(t)e^{-\frac{\underline{\underline{iRt}}}{\hbar}} \tag{6}$$

$$T_I(t) = T((t))e^{\frac{i\,\underline{\underline{H_0}}\,t}{\hbar}} \tag{7}$$

$$T((t)) = T_I(t)e^{-\frac{i\,\underline{\underline{H_0}}\,t}{\hbar}} \tag{8}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$i\hbar\frac{d}{dt}V(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}H_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{9}$$

2.2 METHODE DES MOYENNES RESONANTES (MMR)

La méthode des moyennes résonnantes (MMR) est due à G. Lochak et M. Thiounn [10], et constitue une généralisation de la méthode de Bogolioubov [11]. Elle permet la résolution approchée de l'équation de Schrödinger qui régit l'évolution d'un système quantique en interaction avec un champ périodique.

Il s'agit de l'équation (7) à laquelle nous appliquons la MMR. Les solutions sont obtenues sous la forme d'un développement en série de puissances de ω_1.

L'Hamiltonien H_I (t) peut être écrit comme :

$$H_I(t) = \sum (H_I)_k e^{i\Omega_k t} \quad (10)$$

où $(H_I)_k$ désigne un ensemble d'opérateurs hermétiques constants ; où Ω_k est une suite de fréquences, dont on peut extraire une sous suite comprenant la fréquence Ω_k =0. Supposons que cette sous suite contienne un nombre fini k de fréquences que l'on peut ordonner Ω_0 Ω_1 Ω_k...., et que les autres fréquences Ω_k, Ω_{k+1} ne soient ni harmoniques ni des combinaisons d'harmoniques des k premières. On peut alors écrire l'Hamiltonien d'interaction sous la forme :

$$H_I = \sum_{p=0}^{k-1} (H_I) e^{i\Omega_p t} + \sum_{p=k}^{\infty} (H_I)_p e^{i\Omega_p t} \quad (11)$$

On définit alors deux operateurs appelés « partie moyenne » et partie oscillante » de $(H_I)_k$ respectivement notés $\overline{H}$ et $\widetilde{H}_I$ en posant :

$$\overline{H}_I(t) = \sum_{0}^{k-1} (H_I)_p e^{i\Omega_p t} \quad (12)$$

$$\widetilde{H}_I(t) = \sum_{k}^{\infty} (H_I)_p \frac{e^{i\Omega_p t}}{i\Omega_p} \quad (13)$$

Ces deux opérateurs satisfaisant aux propriétés suivantes :

- $\overline{H}_I$ et $\widetilde{H}_I$ sont périodiques de période τ ou $n\tau$
- $H_I(t)$ étant uniformément borné par rapport au temps, $\overline{H}_I(t)$ et $\widetilde{H}_I(t)$ le sont aussi.

2.3 Decomposition de Floquet (R, T)

2.3.1 Solution non amelioree du premier ordre

C'est l'opérateur ${}^{(1)}V_I(t)$, tel que :

$$i\frac{d\ {}^1V_I(t)}{dt} = \omega_1 H_I(t)\ {}^1V_I(t) \quad (14)$$

Puisque $\overline{H}_I = 0$, nous avons :

$${}^1V_I(t) = {}^1V_I((0)) = 1 \quad (15)$$

Ce qui implique, d'après l'équation (5), que :

$${}^1V_I(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \quad (16)$$

2.3.2 Solution améliorée du premier ordre

C'est l'opérateur ${}^{(1a)}V_I(t)$, tel que :

$${}^{1a}V_I((t)) = A(t)\ {}^1V_I(t) \quad (17)$$

$$A(t)=1-\frac{i}{\hbar}\omega_1\widetilde{H} \quad (18)$$

où ${}^{(1a)}V_I(t)$ peut être écrit sous la forme de Floquet :

$$^{1a}V_I((t)) = {}^{1a}T_1 e^{-\frac{i^{1a}R}{\hbar}} \tag{19}$$

Ainsi, nous avons

$$A\left((t)\ {}^{1}V_I((t)) = {}^{1a}T_1 e^{-\frac{i^{1a}Rt}{\hbar}}\right) \tag{20}$$

En tenant compte des équations (4), (6) et (15), nous pourrons choisir la décomposition de Floquet ($^{1a}T(t)$, ^{1a}R) en posant $^{1a}R=H_0$

$$^{1a}T(t) = B(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0} A(t) e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{21}$$

2.3.3 SOLUTION NON AMELIOREE DU SECOND ORDRE

Elle est définie par l'opérateur :

$$^{(2)}V_I(t) = A(t)\Gamma(t) \tag{22}$$

où Γ(t)est l'opérateur fondamental de l'équation :

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Gamma(t) = F(t)\Gamma(t) \tag{23}$$

F (t) est donné par :

$$F(t) = \omega_1 \overline{H}_I(t) + \frac{i}{\hbar}\omega_1^2 \left\{ \overline{\widetilde{H}_I \overline{H}_I - \overline{H}_I \widetilde{H}_I} + \frac{1}{2}\overline{(\widetilde{H}_I \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I - \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I \widetilde{H}_I)} \right\} \tag{24}$$

L'opérateur $V_I(t)$ est écrit sous la forme de Floquet :

$$^{2}V_I = {}^{2}T_I(t) e^{-\frac{i}{\hbar}{}^{2}Rt} \tag{25}$$

On peut alors écrire la décomposition de Floquet de cet ordre d'approximation, soit ($^{(2)}R$, $^{(2)}T(t)$) , tel que

$$^{(2)}R = H_0 + F(t) \tag{26}$$

$$^{(2)}T(t) = {}^{(1a)}T(t) = B(t) \tag{27}$$

2.3.4 SOLUTION AMÉLIORÉE DU SECOND ORDRE

C'est l'opérateur $^{(2a)}V_I(t)$, tel que :

$$^{(2a)}V_I(t) = A_a(t)\Gamma(t) \tag{28}$$

où Γ(t) est donné par (22) et $A_a(t)$ est défini par

$$A_a = 1 - \frac{i}{\hbar}\omega_1 \widetilde{H}_I + \frac{\omega_1^2}{\hbar^2}\left\{ \overline{\frac{1}{2}(\widetilde{H}_I \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I - \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I \widetilde{H}_I)} + (\overline{\widetilde{H}_I \overline{H}_I - \overline{H}_I \widetilde{H}_I}) - \frac{\widetilde{H}_I^2}{2} \right\} \tag{29}$$

et où

$$A_a((t)) = A((t)) + G(t) \tag{30}$$

en posant

$$G(t) = \frac{\omega_1^2}{\hbar^2}\left\{ \frac{1}{2}\overline{(\widetilde{H}_I \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I - \frac{d}{dt}\widetilde{H}_I \widetilde{H}_I)} + (\overline{\widetilde{H}\,\overline{H}_I - \overline{H}_I \widetilde{H}_I}) - \frac{\widetilde{H}_I^2}{2} \right\} \tag{31}$$

A (t) est donné par l'équation (17).

L'opérateur de Floquet $^{(2a)}V_I$ (t) est donné par

$$^{2a}V_I(t) = {}^{2a}T_I(t)e^{-\frac{i}{\hbar}{}^{2a}Rt} \tag{32}$$

Nous pouvons choisir la décomposition de Floquet à cet ordre d'approximation soit ($^{(2a)}R$, $^{(2a)}T(t)$, en posant :

$$^{2a}R = H_0 + F \tag{33}$$

$$^{2a}T((t)) = B((t)) + G(t) \tag{34}$$

$^{(2a)}R$ étant un opérateur hermitique constant et $^{(2a)}T(t)$ un opérateur périodique de période τ, unitaire à des termes d'ordre 3 prés.

2.3.5 Solution améliorée à l'ordre trois

C'est l'opérateur $^{(3)}V_I$ tel que

$$^{3}V_I = A_a((t))S(t) \tag{35}$$

S (t) satisfait à l'équation

$$i\frac{d}{dt}S((t)) = L((t))S(t) \tag{36}$$

$$E = \overline{H}_I A_2 - A_2\overline{H}_I - \frac{1}{2\hbar^2}(\overline{\overline{H}_I\tilde{H}_I^2 + \tilde{H}_I^2\,\overline{H}_I}) - \frac{1}{2\hbar^2}\frac{d}{dt}H_I^3 + \frac{1}{\hbar^2}\overline{(\tilde{H}_I\overline{H}_I\tilde{H}_I + \tilde{H}_I\frac{d}{dt}\tilde{H}_I\tilde{H}_I)} \tag{37}$$

2.4 Etats permanents du système

La théorie des états permanents a été développée par A.Alaoui et G. Lochak [12,15] Nous allons, en utilisant les résultats du paragraphe précédent, calculer les états permanents aux différents ordres d'approximation.

Les états permanents sont tels que :

$$^{ka}|\Psi_i(t)\rangle = e^{-\frac{i\lambda_{ka}}{\hbar}}\, T(t)^{ka}|r_i\rangle \tag{38}$$

Les $^{ka}\lambda$ sont les valeurs propres de l'opérateur R , et les $^{k}|r\rangle$ les vecteurs propres qui leur correspondent.

3 Application de la methode a un systeme de particules de spins 1 en interaction avec un champ oscillant

Considérons un ensemble statistique de N particules de spin 1 sans interactions mutuelles; de moment magnétique individuel $\vec{m} = \gamma\hbar\,\vec{I}$; soumis à un champ statique $\vec{h}_0 = h_0\vec{k}$ et à un champ oscillant $\vec{h_1(t)} = 2h_1\cos\omega t\,\vec{i}$

L'Hamiltonien traduisant l'interaction avec ces champs est donné par :

$$H(t) = -\vec{m}(\vec{h}_0 + \vec{h}_1(t)) \tag{39}$$

Nous obtenons

$$H(t) = \hbar\omega_0 I_Z + 2\hbar\omega_1 I_x\cos\omega t \tag{40}$$

En représentation d'interaction

$$H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}H_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{41}$$

où l'Hamiltonien de perturbation est

$$H_1(t) = 2\hbar I_x\cos\omega t \tag{42}$$

Nous pouvons alors écrire l'Hamiltonien d'interaction sous la forme

$$H_I(t) = \frac{\hbar}{2}\{(e^{i(\omega_0+\omega)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t})I_+ + (e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega_0+\omega)t})I_-\} \quad (43a)$$

$$H_I(t) = \overline{H_I} + \frac{d}{dt}\tilde{H}_I \quad (43b)$$

Dans le but d'étudier le comportement du système loin de la résonance$\omega = \omega_0$; isolons la sous suite de fréquences :

$\Omega_0 = 0$

$\Omega_0 = \omega_0 - 3\omega$

$\Omega_0' = 3\omega - \omega_0$

La partie moyenne ne contiendra, par définition, que les termes de l'Hamiltonien où figurent les exponentielles de fréquences appartenant à la sous suite. Nous avons obtenu :

$$\overline{H_I} = 0 \quad (44a)$$

$$\tilde{H}_I(t) = \frac{\hbar}{2}\{(\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}}{i(\omega_0+\omega)} - \frac{e^{-i(\omega-\omega_0)t}}{i(\omega-\omega_0)})I_+ + (\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{i(\omega-\omega_0)} - \frac{e^{-i(\omega_0+\omega)t}}{i(\omega_0+\omega)})I_-\} \quad (44b)$$

3.1 Opérateurs de Floquet

Nous avons utilisé le théorème de Floquet et la méthode des moyennes résonnantes pour réaliser les décompositions de Floquet pour les différents ordres d'approximation en fonction de l'intensité du champ oscillant. Les deux tableaux suivants illustrent les résultats obtenus :

Tableau 1 : Les opérateurs R de Floquet

	Définitions	Résultats obtenus
Premier ordre	${}^{1a}R = H_0$	${}^{1a}R = \hbar\omega_0 I_Z$
Deuxième ordre	${}^{2a}R = H_0 + F_0$ $F_0 = \omega_1\overline{H_I(t)} + \frac{i}{\hbar}\omega_1^2\{\overline{\tilde{H}_I\overline{H}_I - \overline{H}_I\tilde{H}_I} + \frac{1}{2}\overline{(\tilde{H}_I\frac{d}{dt}\tilde{H}_I - \frac{d}{dt}\tilde{H}_I\tilde{H}_I)}\}$	${}^{2a}R = \hbar\omega_0(1 - \frac{\hbar}{\omega^2-\omega_0^2}\omega_1^2)I_Z$
Troisième ordre	${}^{3}R = \hbar\Omega I_Z + e^{-i\Omega I_Z t}L(t)e^{i\Omega I_Z t}$ $L(t) = F_0 + \frac{\omega_1^3}{\hbar^2}\overline{\left\{\tilde{H}_I\frac{d}{dt}\tilde{H}_I\tilde{H}_I - \frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}\tilde{H}_I^3}\right\}}$	${}^{3}R = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & 0 & \beta\\ 0 & \beta & -\alpha\end{pmatrix}$ $\alpha = \hbar\Omega - \frac{\hbar^2}{\omega^2-\omega_0^2}\omega_1^2$ $\beta = -\frac{8\hbar^3\omega\omega_1^3}{\sqrt{2}(\omega-\omega_0)(\omega^2-\omega_0^2)}$

Tableau 2 : Les opérateurs T de Floquet

	Définitions	Résultats obtenus
Premier ordre	$^{1a}T\,(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}A\,(t)e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}$ $A\,(t)=1-\frac{i}{\hbar}\omega_1\tilde{H}_I$	$^{1a}T(t)=1-\frac{\omega_1}{2}[I_+\left((\frac{e^{i\omega t}}{\omega+\omega_0}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0}\right))+I_-\left((\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right)]$
deuxième ordre	$^{2a}T\,(t)=\,^{1a}T\,(t)+G\,(t)$ $G\,(t)=\frac{\omega_1^2}{\hbar^2}\{\frac{1}{2}(\tilde{H}_I\frac{d}{dt}\tilde{H}_I-\frac{d}{dt}\tilde{H}_I\tilde{H}_I)-\frac{\tilde{H}_I^2}{2}\}$	$^{2a}T(t)$=1-$\frac{\omega_1}{2}\left\{\left(I_+\left((\frac{e^{i\omega t}}{\omega+\omega_0}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0}\right)\right)+I_-\left(\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right)\right)\right)\right.+$ $\omega_1^2\{\mu_1 I_z+\quad\mu_2 I_+I_++\mu_3(I_+I_-+I_-I_+)+\mu_4 I_-I_-\}$
Troisième ordre	$^{3}T\,(t)=^{2a}T\,(t)+M\,(t)$ $M\,(t)=\frac{\omega_1^3}{\hbar^2}\left\{\overline{\tilde{H}_I\frac{d}{dt}\tilde{H}_I\tilde{H}_I}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tilde{H}_I^3\right\}$	$^{3}T\big((t)\big)=\,^{2a}T\big((t)\big)+\frac{\omega_1^3}{\hbar^2}[AI_+I_+I_-+BI_+I_-I_++CI_+I_-I_-+DI_-I_+I_+$ $+EI_-I_+I_-+FI_-I_-I_++GI_-I_-I_-]$

Avec :

$$\mu_1=\frac{\hbar\omega_0}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)}(e^{2i\omega t}-e^{-2i\omega t})$$

$$\mu_2=-\frac{1}{4}((-\frac{e^{2i((\omega+\omega_0))t}}{(\omega\ \ +\omega_0\ )^2}-\frac{e^{-2i((\omega-\omega_0))t}}{(\omega\ \ -\omega_0\ )^2}+\frac{2e^{2i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$\mu_3=-\frac{1}{4}((-\frac{e^{2i(\omega)t}+e^{-2i(\omega)t}}{\omega^2-\omega_0^2}-\frac{2(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}$$

$$\mu_4=-\frac{e^{2i((\omega-\omega_0))t}}{(\omega\ \ -\omega_0\ )^2}-\frac{e^{-2i((\omega+\omega_0))t}}{(\omega\ \ +\omega_0\ )^2}+\frac{2e^{-2i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}$$

$$A=B=-\frac{e^{i((\omega-\omega_0))t}}{i((\omega+\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)}+\{\left[\frac{2((\omega^2+\omega_0^2))}{(\omega^2+\omega_0^2)^2((\omega+\omega_0))}+\frac{1}{i((\omega-\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\}e^{i(((\omega+\omega_0)))t}$$
$$-[\frac{2((\omega^2+\omega_0^2))}{(\omega^2+\omega_0^2)^2((\omega-\omega_0))}+\frac{1}{i((\omega\mp))(\omega^2-\omega_0^2)}]e^{i((\omega+\omega_0))t}$$

$$C=-\frac{e^{-i((3\omega-\omega_0))t}}{i(\omega+\omega_0)^2((\omega-\omega_0))}+\left\{[\left[\frac{1}{i(\omega\ \ -\omega_0\ )^3}+\frac{2}{i((\omega-\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\right\}]e^{i\left(((\omega+\omega_0))\right)t}$$
$$-\left\{[\left[\frac{1}{i(\omega\ \ -\omega_0\ )^3((\omega-\omega_0))}-\frac{2}{i((\omega-\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\right\}]e^{i(((\omega+\omega_0)))t}$$

$$D = -\frac{e^{-i((3\omega-\omega_0))t}}{i(\omega+\omega_0)^2((\omega-\omega_0))} + \left[\left[\frac{2}{i((\omega-\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)} - \frac{1}{i(\omega \quad -\omega_0\ )^3}\right]\right] e^{i(((\omega+\omega_0)))t} - \left[\frac{1}{i(\omega \quad -\omega_0\ )^3} - \frac{2}{i((\omega+\omega_0))(\omega^2-\omega_0^2)}\right] e^{-i((\omega+\omega_0))t}$$

$$E = \frac{e^{-i((3\omega-\omega_0))t}}{i(\omega^2-\omega_0^2)^2((\omega+\omega_0))} + \left[\left[\frac{2(\omega^2+\omega_0^2)}{i((\omega_0-\omega))(\omega^2-\omega_0^2)^2} - \frac{1}{i(\omega+\omega_0)(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\right] e^{i(((\omega+\omega_0)))t} - \left[\left[\frac{2(\omega^2+\omega_0^2)}{i((\omega_0-\omega))(\omega^2-\omega_0^2)^2} - \frac{1}{i(\omega-\omega_0)(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\right] e^{-i(((\omega+\omega_0)))t}$$

$$F = \frac{e^{-i((3\omega-\omega_0))t}}{i(\omega^2-\omega_0^2()(\omega+\omega_0))} + \left[\left[\frac{2(\omega^2+\omega_0^2)}{i((\omega_0+\omega))(\omega^2-\omega_0^2)} - \frac{1}{i(\omega-\omega_0)(\omega^2-\omega_0^2)}\right]\right] e^{i(((\omega+\omega_0)))t} - e^{-i(((\omega+\omega_0)))t}$$

3.2 ETATS PERMANENTS DU SYSTÈME

En utilisant les équations citées dans la partie II.4 ; nous avons obtenu les résultats rassemblés dans le tableau suivant :

Tableau 3 : Les états permanents du système

Premier ordre	$^{1a}\lvert\psi_1(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\{\omega_1 m_1\lvert 0\rangle + \lvert 1\rangle\}$ $^{1a}\lvert\psi_2(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}\{m_1\lvert -1\rangle + \lvert 0\rangle + \omega_1 m_1\lvert 1\rangle\}$ $^{1a}\lvert\psi_3(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_{-1} t}{\hbar}}\left\{\lvert -1\rangle + \omega_1\left(\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega+\omega_0} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0}\right)\lvert 0\rangle\right\}\right.$
deuxième ordre	$^{2a}\lvert\psi_1(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\{n_1\omega_1\lvert -1\rangle + \{1-\omega_1^2 n_2\}\lvert 0\rangle + n_3\lvert 1\rangle\}$ $^{2a}\lvert\psi_2(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}\{n_1\lvert -1\rangle + n_2\lvert 0\rangle + \{1+\omega_1^2\, n_3\}\lvert 1\rangle\}$ $^{2a}\lvert\psi_3(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}\{\{1+\omega_1^2 n_1\}\lvert -1\rangle - n_2\lvert 0\rangle + n_3\lvert 1\rangle\}$
Troisième ordre	$^{3}\lvert\psi_1(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}t}\left\{\left[n_1''\omega_1 + n_2'\omega_1^3\right]\lvert -1\rangle + \left[\frac{\alpha}{\theta} + \omega_1^2 n_1' + n_1''\omega_1^3\right]\lvert 0\rangle + [n_1'\omega_1 + n_1\omega_1^3]\lvert 1\rangle\right\}$ $^{3}\lvert\psi_2(t)\rvert\rangle = e^{-i\frac{\theta}{\hbar}t}\left\{n_2''\omega_1^4\lvert -1\rangle + \frac{\beta}{\theta}\omega_1^3\lvert 0\rangle + n_3'\omega_1^4\lvert 1\rangle\right\}$ $^{3}\lvert\psi_3(t)\rvert\rangle = e^{i\frac{\theta}{\hbar}t}\left\{-n_1''\ \ \omega_1^4\lvert -1\rangle + \frac{\beta}{\theta}\omega_1^3\lvert 0\rangle - n_2''\omega_1^4\lvert 1\rangle\right\}$

Avec

$$m_1 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right)$$

$$m_1' = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega+\omega_0} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0}\right)$$

$$n_1 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right)$$

$$n_2 = \frac{-\hbar^3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e^{2i\omega t}+e^{-2i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}+\frac{2(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2+\omega_0^2)^2}\right)$$

$$n_3 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega+\omega_0}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\omega_0}\right)$$

$$n'_1 = \frac{-\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e^{2i(\omega+\omega_0)t}}{(\omega+\omega_0)^2}+\frac{+e^{-2i(\omega-\omega_0)t}}{(\omega-\omega_0)^2}+\frac{2e^{-2i\omega t}}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$$

$$n'_2 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}$$

$$n'_3 = \frac{\hbar^2\omega_0(e^{2i\omega t}-e^{-2i\omega t})}{\omega\,(\omega^2-\omega_0^2)} - \frac{-\hbar^2}{2}\left(\frac{(e^{2i\omega t}-e^{-2i\omega t})}{(\omega^2-\omega_0^2)}+\frac{2((\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right.$$

$$n''_1 = \frac{-\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{e^{2i(\omega-\omega_0)t}}{(\omega+\omega_0)^2}+\frac{+e^{-2i(\omega+\omega_0)t}}{(\omega-\omega_0)^2}+\frac{2e^{-2i\omega t}}{\omega^2+\omega_0^2}\right)$$

$$n''_2 = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_0}$$

$$n''_3 = \frac{\hbar^2\omega_0(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})}{\omega\,(\omega^2+\omega_0^2)} - \frac{-\hbar^2}{2}\left(\frac{(e^{2i\omega t}-e^{-2i\omega t})}{(\omega^2+\omega_0^2)}+\frac{2((\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega_0}\right.$$

3.3 AIMANTATION ET SUSCEPTIBILITE MAGNETIQUE DU SYSTEME DE N PARTICULES DE SPINS 1 EN INTERACTION AVEC UN CHAMP OSCILLANT

L'étude de l'aimantation est très importante pour comprendre les propriétés magnétiques du système, nous nous proposons de calculer les composantes de l'aimantation et la susceptibilité magnétique de notre système jusqu' à l'ordre trois.

3.3.1 COMPOSANTES DE L'AIMANTATION

La valeur moyenne de l'aimantation globale, dans le cas général, d'un système physique est définie par :

$$\langle M\rangle = N\gamma\hbar\, Tr\{\rho(t)\, I\} \quad (46)$$

où ρ est la matrice densité. C'est un opérateur diagonal, et donc la relation précédente prend la forme :

$$\langle M_u\rangle = N\gamma\{[\rho(t)]_{\varphi_{11}}[I(t)]_{\varphi_{11}} + [\rho(t)]_{\varphi_{22}}[I(t)]_{\varphi_{22}} + [\rho(t)]_{\varphi_{33}}[I(t)]_{\varphi_{33}}\} \quad (47)$$

où

$$[\rho(t)]_{\chi_{kk}} = \langle\chi_k(t)|\rho(t)|\chi_k(t)\rangle \quad (48)$$

$$[I]_{\chi_{kk}} = \langle\chi_k(t)|I|\chi_k(t)\rangle \quad (49)$$

Dans l'approximation des hautes températures, nous pouvons écrire la matrice densité sous la forme suivante :

$$[\rho(t)]_{\varphi_{kk}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\lambda_k}{KT}\right) \quad (50)$$

Pour que nous calculions les différents éléments de l'aimantation nous avons besoin de développer les composantes de l'aimantation en puissances de ω_1 , puis les développer sous la forme de séries de Fourier.

3.3.2 DÉVELOPPEMENT EN PUISSANCE DE Ω₁

Cherchons les solutions sous la forme d'un développement en puissances de ω_1 :

$$\langle M_Z\rangle = {}^0\langle M_Z\rangle + \omega_1\ {}^1\langle M_Z\rangle + \omega_1^2\ {}^2\langle M_Z\rangle + \cdots .\ \omega_1^n\ {}^n\langle M_Z\rangle ..... \quad (51a)$$

$$\langle M_\pm\rangle = {}^0\langle M_\pm\rangle + \omega_1\ {}^1\langle M_\pm\rangle + \omega_1^2\ {}^2\langle M_\pm\rangle + \cdots .\ \omega_1^n\ {}^n\langle M_\pm\rangle .... \quad (51b)$$

Les seuls termes dépendants du temps au second membre des expressions précédentes étant sinusoïdaux, la solution de ces équations en régime permanent est périodique, on peut la développer en séries de Fourier :

$$^{n}\langle M_{+}\rangle = \sum_{p} {}_{p}^{n}\langle M_{+}\rangle\, e^{ip\omega t} \tag{52a}$$

$$^{n}\langle M_{z}\rangle = \sum_{p} {}_{p}^{n}\langle M_{z}\rangle\, e^{ip\omega t} \tag{52b}$$

3.3.2.1 COMPOSANTES DE L'AIMANTATION À L'ORDRE ZÉRO

Nous les avons déduites à l'aide des relations générales de l'expression de l'aimantation aussi bien à gauche qu'à droite de la résonance

$${}_{0}^{0}\langle M_{z}\rangle = \frac{N\gamma\hbar^{2}}{3}\frac{\hbar\omega_{0}}{KT} \tag{53a}$$

D'où $${}_{0}^{0}\langle M_{z}\rangle = Xh_{0} \tag{53b}$$

Ceci exprime le fait que le système de spin 1 est indépendant du champ oscillant, il est clair que la composante M_z prend la valeur la plus stable en présence du champ statique seul.

3.3.2.2 COMPOSANTES DE L'AIMANTATION ET SUSCEPTIBILITÉ MAGNÉTIQUE À L'ORDRE UN AMÉLIORÉ

Nous avons déduit la valeur moyenne de la composante de l'aimantation à l'ordre un amélioré, nous avons obtenu l'expression de l'aimantation transversale à cet ordre d'approximation sous la forme suivante :

$$\langle M_{+}\rangle = \frac{2N\gamma\hbar}{(\omega^{2}-\omega_{0}^{2})}\left(\frac{\hbar\omega_{0}}{3KT} - \frac{\hbar^{2}}{3}\right)\{\omega_{0}\, cos\omega t - i\, \omega sin\omega t\} \tag{54}$$

D'après ce résultat nous remarquons que la composante de l'aimantation ne dépend que du premier ordre de l'intensité du champ oscillant.

Sachant que la susceptibilité magnétique peut s'écrire :

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) \tag{55}$$

et que la composante de l'aimantation est liée aux termes de dispersion $\chi'(\omega)$ et d'absorption $\chi''(\omega)$par

$$\langle M_{+}\rangle = \chi'(\omega) cos\omega t - i\, \chi''(\omega) sin\omega t \tag{56}$$

nous pouvons déduire la valeur de la susceptibilité magnétique au premier ordre amélioré en fonction de la densité du champ oscillant, nous avons obtenu les résultats suivants.

Le terme de dispersion est donné par l'équation :

$$\chi'(\omega) = \frac{2N\gamma\hbar}{(\omega^{2}-\omega_{0}^{2})}\left(\frac{\hbar\omega_{0}}{3KT} - \frac{\hbar^{2}}{3}\right)\omega_{0} \tag{57}$$

Le terme d'absorption s'écrit

$$\chi''(\omega) = \frac{2N\gamma\hbar}{(\omega^{2}-\omega_{0}^{2})}\left(\frac{\hbar\omega_{0}}{3KT} - \frac{\hbar^{2}}{3}\right)\omega \tag{58}$$

La susceptibilité à l'ordre un est exprimée par l'équation :

$$^{1}\chi(\omega) = {}^{1}\chi_{1}'(\omega) - i\, {}^{1}\chi_{1}''(\omega) \tag{59}$$

D'où nous avons déduit l'équation suivante :

$$^{1}\chi(\omega) = \frac{2N\gamma\hbar}{(\omega^{2}-\omega_{0}^{2})}\left(\frac{\hbar\omega_{0}}{3KT} - \frac{\hbar^{2}}{3}\right)\{\omega_{0} - i\,\omega\} \tag{60}$$

Nous remarquons que la susceptibilité magnétique à l'ordre un est linéaire, et prend sa valeur minimale si ω tend vers zéro.

3.3.2.3 COMPOSANTE DE L'AIMANTATION A L'ORDRE DEUX

A l'ordre deux, seule la composante $\langle M_z \rangle$ est non nulle nous allons l'étudier en nous plaçant très loin de la résonance, notant par ${}_0^0\langle M_z \rangle$ le terme statique en ω_1^2, nous avons montré que la composante de l'aimantation à l'ordre deux peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\langle M_z \rangle = {}_0^0\langle M_z \rangle \left\{1 + \omega_1^2 \left[\frac{2\hbar^3}{3(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{KT}{\omega_0}(2(4B - A) + 4B^2 - \frac{1}{3}(4B^2 - A^2\right]\right\} \tag{61}$$

L'existence du terme en ω_1^2 explique que la non linéarité de $\langle M_z \rangle$ ne peut être considérée comme la conséquence des transitions entre états stationnaires puisque nous sommes en dehors de la résonance $\omega_0 = 3\omega$.

3.3.2.4 AIMANTATIONS ET SUSCEPTIBILITE MAGNETIQUE A L'ORDRE TROIS

A l'ordre trois, seule la composante $\langle M_+ \rangle$ est non nulle, après un calcul analytique nous avons obtenu la composante de l'aimantation à cet ordre d'approximation sous la forme :

$$\begin{aligned}\langle M_+ \rangle = \mathrm{N}\gamma\hbar \Bigg\{&\omega_1 \Big\{\Big[\frac{\hbar^3}{3\mathrm{KT}} - \frac{\hbar^2}{3}\Big]\Big(\frac{\omega+\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}e^{i\omega t} - \frac{\omega-\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}e^{-i\omega t}\Big)\Big\} + \omega_1^3 \Big\{\Big[\frac{-\hbar^3\omega_0}{3(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)} + \frac{\hbar^5\omega_0}{3\mathrm{KT}}\Big(\frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega+\omega_0)} + \\ &\frac{e^{-i\omega_0 t}}{4(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)^2}\Big) + \frac{\hbar^4\omega_0}{6(\omega^2-\omega_0^2)(\omega+\omega_0)}\Big]e^{i\omega t}\Big[\frac{-\hbar^3\omega_0}{3(\omega^2-\omega_0^2)(\omega+\omega_0)} + \Big(\frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)^2}\Big) + \\ &\frac{\hbar^4\omega_0}{6\omega(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)}\Big]e^{-i\omega t} + \Big[\frac{\hbar^5\omega_0 e^{-i\omega_0 t}}{12\mathrm{KT}(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)^2} - \frac{\hbar^4\omega_0}{6\omega(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)}\Big]e^{i3\omega t} + \Big[\frac{\hbar^5\omega_0 e^{-i\omega_0 t}}{12\mathrm{KT}(\omega-\omega_0)(\omega-\omega_0)^2} - \frac{\hbar^4\omega_0}{6\omega(\omega+\omega_0)}\Big]e^{-i3\omega t}\Big\}\Bigg\}\end{aligned} \tag{62}$$

La susceptibilité magnétique à cet ordre d'approximation est donnée par

$$\chi_3(\omega) = \chi_1(\omega) + \omega_1^2\ {}^1\chi_3(\omega) \tag{63}$$

Nous avons obtenu le coefficient de dispersions à l'ordre trois, il est tel que

$$\chi_3'(\omega) = \chi_1'(\omega) + \omega_1^2\ {}^1\chi_3'(\omega) \tag{64a}$$

avec

$${}^1\chi_3'(\omega) = \frac{\hbar^5\omega_0 e^{-i\omega_0 t}}{12\mathrm{KT}(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)^2} - \frac{\hbar^4\omega_0}{6\omega(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)} \tag{64b}$$

Nous avons déduit le coefficient d'absorption à cet ordre d'approximation comme étant

$$\chi_3''(\omega) = \chi_1''(\omega) + \omega_1^2\ {}^1\chi_3''(\omega) \tag{64c}$$

avec

$${}^1\chi_3''(\omega) = \frac{\hbar^5\omega e^{-i\omega_0 t}}{12\mathrm{KT}(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)^2} - \frac{\hbar^4\omega}{6\omega(\omega^2-\omega_0^2)(\omega-\omega_0)} \tag{65}$$

Ce résultat met en évidence la non linéarité qui est apparue dans la formule générale de la susceptibilité magnétique à cet ordre d'approximation, ceci traduit qu'on a une différence de population dans les transitions entre les états stationnaires.

En conclusion, l'effet linéaire est dû au niveau de transition du photon. En outre, l'augmentation du temps de relaxation, peut améliorer cet effet ; nous avons montré aussi que la non linéarité dépend de la température, et d'autres paramètres tels que la structure du matériau.

Nous avons abordé l'étude d'un exemple simple où il est possible, sans trop de complications, de pousser les calculs à des ordres supérieurs. Nous avons mis, ainsi, en évidence des effets « non linéaires » intéressants : effets de saturation et susceptibilité non linéaire.

4 CONCLUSION

Dans cette article, nous avons appliqué le théorème de Floquet et la méthode des moyennes résonantes au traitement de quelques effets qui se produisent lors de l'interaction entre un système de N particules de spin 1 et un champ oscillant périodique.

En conclusion, l'effet linéaire est dû au niveau de transition du photon. En outre, l'augmentation du temps de relaxation, peut améliorer cet effet ; nous avons montré aussi que la non linéarité dépend de la température, et d'autres paramètres tels que la structure du matériau [18].

Nous avons abordé l'étude d'un exemple simple où il est possible, sans trop de complications, de pousser les calculs à des ordres supérieurs. Nous avons mis ainsi en évidence des effets « non linéaires » intéressants : effets de saturation et susceptibilité non linéaire.

Certains des effets que nous avons décrits font actuellement l'objet de nombreux travaux, et de nouvelles branches de recherche sont ainsi apparues : électronique quantique, optique non linéaire et informatique quantique.

REFERENCES

[1] T. R. Fied, Electromagnetic scattering from Random Media, Oxford University Press, Oxford, 2009.
[2] T. R. Fied ; R. J.A. Tough ; J. Math ; Phys. 44; 5212-5223 (2003).
[3] T. R. Fiel , R.J.H.Tough ; Proc. R. Soc. Lond. A2459,2169-2193(2003).
[4] K. X. Guo, Solid state commun 103 (1997) 255.
[5] S.V. Nour,T. Takagahara ; Phys. Rev. B555 (1997).
[6] D. Schooss; A. News, A. Eychmuller; H. Weller ; Phys. Rev. B49, 5(1994) 17072.
[7] Xiaobo Feng. GuiguangXiong, Xizhang; Haiyan Gao, Physica B 383(2006) 207-212.
[8] C. P. Slichter; Principals of Magnetic Resonace (Springer, Berlin;1989).
[9] P. T. Eles; C. A. Michal ; Two-photon two-color nuclear magnettic resonance, J. Chem. Phys.121 (2004) 10173.
[10] G. Lochak; Ann. Fond. Louis de Broglie; p.56; 1976
[11] M. Bogolioubov, J. Mmitropolsky ; les méthodes des asymptotiques dans la théorie des oscillation non linéaires-Gauthier- Villar ; Paris,1963.
[12] G. Lochak. C.R.A.S. Série B, A/272. P.1281.1971.
[13] A. Erbeia , Résoances magnétiques-Masson, Paris, 1969.
[14] A. Alaoui , thèse de 3ième cycle- Paris VI-1975.
[15] P. Horowitz, W. Hill, The Art of Electronics, seconded, Cambridge University Press, 1989.
[16] C. P. Slichter, Principles of Magnetic Resonance, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[17] R. R. Ernst, Sensitivity enhancement in magnetic resonance, Adv. Magn. Reson.2 (1966) 1–135.
[18] J. M. Böhlen, G. Bodenhausen, les méthodes des asymptotiques dans la théorie des oscillations non linéaires-Gauthier-Villar.1963.