International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 23 No. 3 Jun. 2018, pp. 324-340

http://www.ijias.issr-journals.org/

METHODES ANALYTIQUES D'AMELIORATION DE LA CONVERGENCE DES SERIES NUMERIQUES REELLES

[ANALYTICAL METHODS OF AMELIORATION OF CONVERGENCE OF REELS NUMERICALS SERIES]

Théodore Mapendo Wendo

Département de Mathématique-physique,
Institut Supérieur Pédagogique d'Idjwi (ISP-IDJWI),
Idjwi, Sud-Kivu, RD Congo

ABSTRACT: To study the convergence of a real digital series; it calculates the sum Sn of the first n terms. Therefore $\lim_{n\to\infty} S_n$ is calculated (if this limit exists and is equal to S, then the series converges and it converges to S; if this limit doesn't exist or is infinite, then the series diverges). In practice, it is difficult to calculate Sn for some series. In wanting to get around that, mathematicians have developed convergence criteria deciding on the convergence of the series without calculating the sum. Such is the case of D'Alembert, Cauchy, Riemann, RAABE, DUHAMEL, Gauss ... When a series is recognized convergent, we calculate the approximate sum: the series is converging slowly (for its sum precisely, it is necessary take a large number of words), the series is rapidly convergent (for its sum precisely, take a small number of terms). The transition from slow convergence to the rapid convergence is a numerical analysis problem. So, in this article we would like to get this problem of forgetting. The improvement of the convergence of digital series is obtained from certain transformations using various methods.

KEYWORDS: KUMMER'S method, Euler's method, Krylov's method, Trigonometrics series.

RESUME: Pour étudier la convergence d'une série numérique réelle; on en calcule la somme S_n de n premiers termes, on calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$ (si cette limite existe et est égale à S, alors la série converge et elle converge vers S ; si cette limite n'existe pas ou est infinie, alors la série diverge). Dans la pratique, il est difficile de calculer S_n pour certaines séries. En voulant contourner cette difficulté, les mathématiciens ont élaboré des critères de convergence : on décide de la convergence de la série sans en calculer la somme. Tel est le cas de D'ALEMBERT, CAUCHY, RIEMANN, RAABE, DUHAMEL, GAUSS,…Lorsqu'une série est reconnue convergente, on en calcule la somme approchée : la série est lentement convergente (pour obtenir sa somme avec précision, il faut prendre un grand nombre de termes), la série est rapidement convergente (pour obtenir sa somme avec précision, il faut prendre un petit nombre des termes). Le passage de la convergence lente à la convergence rapide est un problème d'analyse numérique. Ainsi, dans cet article nous voudrions faire sortir ce problème de l'oubli. L'amélioration de la convergence des séries numériques est obtenue à partir de certaines transformations utilisant diverses méthodes.

MOTS-CLEFS: méthode de KUMMER, méthode d'Euler, méthode de Krylov, séries trigonométriques.

1 INTRODUCTION

1.1 NOTE LIMINAIRE

L'étude des séries est une notion complexe de l'analyse mathématique. Les notions de généralité présentées dans cet article sont supposées être connues. Ces notions font allusion à la convergence lente ou rapide des séries. Cet article sera plus focalisé au développement de certaines méthodes comme la méthode de KUMMER, ABEL, KRYLOV,…expliquant l'amélioration de la convergence des séries numériques réelles.

1.2 GENERALITES

1.2.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

1.2.1.1 DÉFINITION

- Considérons la suite (u_n) avec $n \in N$. Soit la suite (S_n) définie par $S_n=u_0+u_1$; $S_2=u_0+u_1+u_2$;… ; $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots u_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$. ($S_n$) est une série de nombres réels associée à (u_n). Elle est appelée série numérique et u_0, u_1, $u_2 \ldots u_n$…en sont les termes. S_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série.
- Une série (S_n) est dite convergente, si la suite (S_n) des sommes partielles tend vers une limite S quand n augmente indéfiniment ; c'est-à-dire S=$\lim_{n\to\infty} Sn$. S est appelée somme de la série. On note S=$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $\sum u_n$.
- La série (S_n) sera divergente si la limite de la suite (S_n) n'existe pas ou est infinie quand n tend vers l'infini.

EXEMPLES:

1) considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$.

   S_0=1=2-1; $S_1 = 1 + \frac{1}{2}$=2-½,…, S_n=$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$. On a: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$. La série est convergente et sa somme vaut 2
2) Considérons la série de terme général u_n= $(-1)^n$. S_n=1-1+1-…+ $(-1)^n$. Pour cette série, S_0=1, S_1=1-1,S_2=1-1+1,…, S_{2n}=1, S_{2n+1}=0 (n∈N). La suite (S_n) des sommes partielles d'ordre n n'a pas de limite, elle est divergente : la série est divergente
3) soit la série de terme général a_n et de somme S_n=$\frac{n^2+1}{n-1}$, est divergente. En effet, S=$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n-1} = \infty$, avec $n \in N^*$.

1.2.1.2 PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉ 1 :

- A toute suite (u_n) des nombres réels est associée une série de terme général u_n
- A toute série (S_n) est associé une suite u_n

PROPRIETE 2 :

Pour qu'une série numérique converge, il est nécessaire que son terme général tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini. C'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

DEMONSTRATION :

Soit la série $V_0+V_1+V_2+\ldots+V_n+\ldots$ Si la limite de la suite S_n des sommes partielles S_0, S_1, $S_2 \ldots S_n$, …existe, alors S_n-S_{n-1} tend vers zéro n tend vers l'infini

En effet, si $\lim_{n\to\infty} S_n = a, alors\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = a\ et\ \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$ =a-a=0 or S_n=S_{n-1}

Donc S_n-S_{n-1}=0. Par suite, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

EXEMPLES :

Considérons les séries des termes généraux a$_n$=$\frac{1}{2^n}$ et b$_n$=$\frac{1}{n}$. On a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Mais la première est convergente tandis que la seconde est divergente. 2) La série de terme a$_n$=$e^{\frac{1}{n^2}}$. $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}}=e^0=1$. Cette série diverge.

PROPRIETE 3 :

On ne change pas la nature d'une série en supprimant un nombre fini par des termes.

EXEMPLES :

Considérons la série réelle de terme général S$_n$=$\frac{1}{n(n+1)}$. S$_n$=$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})$+…($\frac{1}{n-2}$- -$\frac{1}{n-1}+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$. S$_n$=(1-$\frac{1}{2}$) et $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

Si nous supprimons les dix premiers termes de la série, alors nous avons u$_{10+1}$+u$_{10+2}$+u$_{10+3}$+…=(S$_n$)-(S$_{10}$).

S-S$_{10}$=1-$\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right]$

$=1-1+\frac{1}{11}=\frac{1}{11}$.

1.2.2 QUELQUES SÉRIES PARTICULIÈRES

1.2.2.1 SÉRIE HARMONIQUE

C'est la série $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}$.

Pour tout naturel non nul n, 2n≥n

Et $|S_{2n}-S_n|$=$\left|(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\right|$

=|$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+1}$|

= $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+1}$

≥ $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots\frac{1}{2n}$ ≥ $\frac{1}{2n}.n$ ≥ $\frac{1}{2}$.

D'où /S_{2n}-S_n/ ≥ $\frac{1}{2}$;

Ce qui traduit que la suite considérée n'est pas convergente. Ainsi la série harmonique est divergente.

1.2.2.2 SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

Soit u_1 un réel fixe. On appelle série géométrique de premier terme u_1 et de raison k, la série de terme général u_n = $u_1 .k^n$.

- b_n = $\sum_{i=0}^{n} u_1 . k^n$ = u_1 (1+k+$k^2+\cdots+k^n$)
  - Si k = 1, alors S_n = $u_1(n+1)$. $\lim_{n\to\infty} S_n$ = +∞ : la série est divergente.
  - Si k = -1, alors $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i$: la série est divergente (la limite de S_n n'existe pas lorsque n tend vers l'infini)
- Si |k|≠1, alors S_n = $u_1\frac{1-k^{n+1}}{1-k}$
  - Si k < 1, alors $\lim_{n\to\infty} S_n$ = $\frac{u_1}{1-k}$ ∈ R : la série est convergente et on écrit $\sum_0^n u_1 k=\frac{u_1}{1-k}$
  - Si k < 1, alors $\lim_{n\to\infty} S_n$ = +∞ : la série est divergente.

1.2.3 SÉRIE À TERMES POSITIFS

1.2.3.1 DÉFINITION

Une série numérique réelle de terme général u_n est dite à termes positifs si pour tout naturel non nul n, $u_n \geq 0$. Toute série à termes positifs a toujours une somme finie ou infinie.

1.2.3.2 CRITÈRES DE CONVERGENCE

Pour les séries à termes positifs, le calcul de S_n pour l'étude de convergence, pose problème. Ainsi, pour décider de la convergence de ces types des séries, on se sert des critères de convergence.

1° CRITERE DE RIEMANN :

Soit (u_n)une série à termes positifs. Supposons qu'il existe α ∈ R tel que $\lim\limits_{n\to\infty} n^a\, u_n$ = 1. Alors, on a :

- α $>$ 1 et l ∈ $\mathcal{R} \Rightarrow$ la série (u_n) converge.
- α $\leq$ 1 et l ∈ $\overline{\mathcal{R}}$ /{O} $\Rightarrow$ la série diverge.

2° CRITERE DE CAUCHY :

Soit u_n une série telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \; = l$. Alors on a :

- $l \; < 1 \Rightarrow$ la série converge
- $l \; > 1 \Rightarrow$ la série diverge
- $l = 1$: on ne peut rien conclure (cas douteux). Si en particulier $l = 1$ par valeurs inférieures, alors la série diverge.

3° SÉRIES DE D'ALEMBERT :

Soit (u_n) une série telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ =L. Alors on a :

- $l \; < 1 \Rightarrow$ la série converge
- $l \; > 1 \Rightarrow$ la série diverge
- $l = 1$: on ne peut rien conclure (cas douteux). Si en particulier $l = 1$ par valeurs supérieures, alors la série diverge.

4° REMARQUES :

- Lorsque le critère de D'ALEMBERT est en défaut, on applique le critère de RAABE :

  Si $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ = L, alors la série converge si $L \; > 1$; diverge si $L < 1$ et peut ou ne pas converge si $L = 1$.
- Lorsque, de plus, le critère de RAABE fait défaut, alors on peut recourir au critère de GAUSS :

  Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \; = 1 - \frac{L}{n} + \frac{C_n}{n^2}$;$|C_n| <$ p $\forall n \; > k$, alors la série converge si $L \; > 1$ et diverge si $L \; \leq 1$.
- Si la série (u_n) n'est pas nécessairement à termes positifs, alors on remplace u_{n+1} et u_n par $|u_{n+1}|$ et $|u_n|$ dans le dans le critère de CAUCHY de D'ALELBERT.

EXEMPLE :

Considérons la série numérique dont le terme général est u_n = $\frac{n}{n^2+1}$.

En appliquant le critère d'ALEMBERT, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n^2+2n+2)n}$ = 1.

Comme $l \; = 1$, on ne peut rien conclure.

D'après le critère de RAABE, $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2+n-1)}{(n^2+2n+2)} = 1$; ce qui fait défaut.

Appliquant le critère de GAUSS, on obtient : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^2+2n^2+2n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} . \frac{1\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{C_n}{n}$

Avec $C_n = \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}$ $\forall n \in N *, \frac{4}{5} < C_n < 1$: la série est donc divergente.

1.2.4 SÉRIES ALTERNÉES

1.2.4.1 DÉFINITION

On appelle série réelle alternée, toute série (u_n) dont les termes sont alternativement positifs ou négatifs: c'est-à-dire $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|, \forall n \in N$. Si on pose $|u_n| = X_n$, alors la série alternée s'écrit : $X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + (-1)^{n+1}X_n + \cdots$Ou $-X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + \cdots + (-1)^n X_n + \cdots$

1.2.4.2 CONDITION DE CONVERGENCE

Soit (u_n) une série alternée telle que, pour tout naturel non nul, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$.

Alors la série est convergente et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. On dit que la série alternée (u_n) est absolument convergente si la série $(|u_n|)$ est convergente.

Notons que la convergence de toute série positive (u_n) entraine sa convergence absolue. La réciproque est vraie. Si la série alternée (u_n) converge et que la série $(|u_n|)$ diverge, alors on dit que la série (u_n) est semi-convergente.

EXEMPLES :

1) La série de terme général est $u_n = (-1)^n.\frac{1}{n}$ est semi-convergente.
   En effet, $|u_n| = \frac{1}{n}$ et $|u_n| = \frac{1}{n+1}$. Or n $\leq n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Donc $|u_{n+1}| \leq |u_n|$: c'est la série de LEIBNTZ. Mais la série est divergente (série harmonique).
2) Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ Cette série est alternée, son terme général est $(u_n) = (-1)^n.\frac{1}{2^n}$.
   i.e. $(|u_n|) = (\left|(-1)^n.\frac{1}{2^n}\right|) = \left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$ qui est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$; donc convergence.
   On conclut que la série alternée est absolument convergente.

2 METHODE DE KUMMER

Pour améliorer la convergence d'une série donnée par cette méthode, on divise cette série donnée par une autre série auxiliaire choisie et on calcule la somme du reste de la division. Si la série donnée est une série dont le termes sont des fonctions rationnelles, alors on utilise d'abord l'idée de STIRLING qui consiste à mettre le terme général de la série donnée sous la forme d'une somme finie des factorielles inverses avant la division de la série donnée par sa série auxiliaire et le calcul de la somme du reste. Soit $a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots$ une série lentement convergente. En effet, pour obtenir sa somme avec une précision voulue, il faut prendre un très grand nombre de ses termes. Supposons, par exemple, qu'il faut trouver la somme de la série $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ à 10^{-6} près. L'estimation du n[ième] reste de la série s'écrit $R_n \prec \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} = \varepsilon$.

Par conséquent, la précision imposée ne peut être assurée que par la somme de 1000 000 de termes ; ce qui est pratiquement impossible. Dans la recherche de la solution du problème donné, la série doit être considérée comme lentement convergente. D'une manière générale, c'est très difficile et même pratiquement impossible d'obtenir immédiatement la somme d'une telle série avec précision imposée à ε. C'est pourquoi, nous recourrons à la transformation de KUMMER, souvent utile pour la réalisation de la somme A et $b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots$ sa série auxiliaire choisie de somme B connue et telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0$ avec $b_n \neq 0$.

Alors$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = q \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - qb_n) \Leftrightarrow A = qB + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - qb_n)$=qB+$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

En particulier, si $a_n \to b_n$, on a q = 1 et A = B +$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$.

Ainsi, dans le cas général, la recherche de la somme de la série a_n est remplacée par la recherche de la somme de la série r_n. Le reste de la série r_n aussi peut se mettre sous la forme :

$$\overline{R_N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - q\frac{b_n}{a_n}\right) a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \text{ ; où } \varepsilon_n = 1 - q\frac{b_n}{a_n} \to 0 \; quand \; n \to \infty.$$

C'est pourquoi la série r_n converge en général plus vite que la série initiale a_n.

Soit $a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 a^{p-1} + \cdots a_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q+1} + \cdots + \beta_q}$ (n=1,2,…) une série dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable entière n et aux signes positifs où p et q sont des entiers non négatifs et $a_0 \succ 0, \beta_0 \succ 0$. Pour que cette série converge, il faut et il suffit que $q \geq p + 2$. Dans ce cas, $a_n = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire a_n est infiniment petit d'ordre m par rapport à $\frac{1}{n^2}$.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^m}$=c $\neq \infty$ et si c $\neq 0$, alors $a_n$est un infiniment petit exactement d'ordre m par rapport à $\frac{1}{n}$. Considérons la série auxiliaire

$S^{(m)} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)}$; m$\in N *$.

Etant donné que

$$\frac{1}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{n \prod_{0}^{m}(n+k-1)} - \frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right];$$

Il vient que $S_N^{(m)} = \sum_{n+1}^{N} \frac{1}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{1.2\ldots k} - \frac{1}{(N+k)}\right]$.

Par conséquent,

$S^m = \lim_{n\to\infty} S_N^{(m)} = \frac{1}{kk!}$. D'après STIRLING, $a_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{A_k}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)} + a_n^{(k)}$

Où $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont les coefficients indéterminés et le reste. Choisissons les coefficients A_i (i = 1, 2,…, k) de telle sorte que $a_n^{(k)} = 0\left(\frac{1}{a^{2+k}}\right)$.

A cet effet, il suffit de définir successivement les coefficients A_i d'après les formules : $A_1 = \lim_{n\to\infty} n(n+1)a_n$, $A_2 = \lim_{n\to\infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n(n+1)}\right] n(n+1)(n+2)$,…

$A_k = \lim_{n\to\infty} a_n - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_1}{n(n+1)\ldots(n+i)}] n \prod_{k=0}^{m}(n+k)$. Conformément au schéma général,

$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{A_k}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right] \Longrightarrow B = A_1 S^{(1)} + A_2 S^{(2)} + \cdots + A_k S^{(k)} = \frac{A_1}{1!1} + \frac{A_2}{2!2} + \cdots \frac{A_k}{k!k}$ (i) qui est une série auxiliaire que nous prenons.

Par suite, il est clair que

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \; et \; S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} \; (ii)$.

Donc ; $r_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$. D'où r_n converge plus rapidement que a_n.

En effet, soit a_{p+1}un terme de la série a_n.

On a : S= $S_p + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{A_k}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)} + a_n^{(k)}.\right]$

$= S_p + A_1 \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{A_2}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + \cdots \frac{A_k}{k} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k-1)} - \frac{1}{n \prod_{k=0}^{m}(n+k)}\right) + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$

$= S_p + A_1 \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \frac{1}{2(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{A_k}{k} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(p+k)} + \cdots \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$.

Ainsi, lorsque k$\to \infty \; et \; a_{n\to 0}^{(k)\to 0}$, nous obtenons le développement de STIRLING.

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \sum_{n-1}^{\infty} a_n + A_1 \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \frac{1}{(p+1)(p+k)} + \cdots + \frac{A_k}{k} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m}(p+k)} + \cdots$$

EXEMPLE :

Trouver la somme de la série $S_n = \frac{1}{n^2+1}$ à 0,001 près.

SOLUTION :

posons ;

$\frac{1}{n^2+1} = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_1}{n(n+1)(p+2)} + \ a_n^{(2)}$.

$$On\ a\ :\ A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2+1} = 1$$

$$A_{1=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n(n+1)}\right] n(n+1)(n+2) = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}{n^2+1} = 1$$

Par conséquent,

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n-n^3-2n^2-n-2-n^2-1}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)}$$

$$= \frac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)}.$$

D'après (i) et (ii), on a : S=$\frac{1}{1.1!} + \frac{1}{2.2!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)}$.

Puisque n ≥ 3, on a : $\frac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)} \leq \frac{1}{n^4}$.

Il vient: $\rho = \frac{n-3}{n(n+1)(n+2)(n^2+1)} \prec \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \prec \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N} \ \leq \ \frac{1}{2}$. 0,001.

Il en résulte que le nombre suffisant des termes à calculer est N=10 ; en outre, ces termes doivent être calculés avec quatre décimales au sens strict. Ainsi, on a :

S ≈ 1,25 + (-0,1667) + (-0,0083) + 0+0,0005+0,0002+0,0002+0,0001

+0,0001+0,0002+0,0002+0,0001+0,0001+0,0001+0,0001=1,0766.

De plus, en retenant que la somme de quatre premiers termes est exacte, on obtient pour l'erreur absolue l'estimation : $\Delta \prec \frac{1}{3}.10^{-3} + 7.\frac{1}{2}.10^{-4} \prec 0{,}7.10^{-3}$. On tire, en arrondissant, la quantité S ≈ 1,077 avec une borne d'erreur absolue $\overline{\Delta}$= 0,7. 10^{-3} + 0,4. 10^{-3}= 1,1. 10^{-3}. Constatons que l'estimation du reste de S_n s'écrit :

$R_N \prec \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \prec \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N} \ \leq \ \frac{1}{2}$. 0,001.

D'où N ≥ 2000. Donc pour obtenir la même précision sans transformation, il faut environ 2000 termes de la série.

REMARQUE :

1) La difficulté principale de l'application de la transformation de KUMMER consiste à choisir la série auxiliaire convenable.
2) Pour calculer la somme approchée de la série a_n de terme général

   $a_n = \frac{a_0+a_1n^{p-1}+\cdots a_p}{\beta_o n^q+\beta_1 n^{q+1}+\cdots+\beta_q}$ (Avec n∈ $N *$).

   On peut faire également appel aux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, etc.$

   En général $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1}}{2} . \frac{B_{2p}(2\pi)^{2p}}{(2p)\,!}$;

Bn (n=1,2,…) sont les nombres de BERNOULLI définis par la formule symbolique de récurrence $(B+1)^n - B^n$=0, dans laquelle, après le développement suivant le binôme de NEWTON, on pose $B^n = B_n$.

On a en particulier $B_2 = \frac{1}{6}$; $B_4 = -\frac{1}{30}$; $B_6 = \frac{1}{42}$; $B_8 = -\frac{1}{30}$; $B_8 = \frac{1}{66}$.

3 METHODE D'EULER-ABEL

Cette méthode étant applicable sur les séries entières, il convient de parler en premier lieu d'une manière brève des séries entières et leurs convergences. On appelle série entière ou une série de puissance, une série de la forme $a_0 + a_0x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ où $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$. sont des constantes données appelées coefficients de la série de puissances des constantes données appelées coefficients de la série. Un intervalle pouvant se réduire à un point est l'ensemble des points de convergence d'une série entière. D'où les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1 :

1) Si une série entière converge pour une certaine valeur X_0 non nulle, elle converge absolument pour toute valeur de x telle que $|x| \prec |x_0|$;
2) Si une série entière converge pour une certaine valeur X'_0, elle diverge pour tout x telle que $|x| \prec |x'_0|$.

THÉORÈME 2 :

L'ensemble des points de convergence d'une série entière est un intervalle centré sur l'origine des coordonnées.

EXEMPLES :

1) Déterminer l'intervalle de convergence de la série 1+x+$x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

SOLUTION :

En appliquant la règle de D'ALEMERT, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$.

Par conséquent, la série converge pour $|x| \prec 1$ et diverge pour $|x| > 1$. Elle diverge aux points x =$\pm$ 1.

2) Déminer l'intervalle de convergence de la série $\left(\frac{(2x)^n}{n}\right)$.

RÉSOLUTION :

Appliquons la règle de D'ALEMBERT ; $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|.|2x| = |2x|$.

La série converge pour $|2x| \prec 1$ c'est-à-dire si $|x| \prec \frac{1}{2}$; elle converge au point $x = \frac{1}{2}$ et diverge au point $x = \frac{1}{2}$.

3) Déterminer l'intervalle de convergence de la série $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

RÉSOLUTION :

Appliquons la règle de D'ALEMBERT ; $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u^{n+1}}{u^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right|$=0$\prec 1$.

Comme la limite ne dépend pas de x et qu'elle est plus petite que 1, la série converge quel que soit x.

Parlons maintenant de la méthode d'EULER-ABEL qui ne consiste à chercher la variation de la série donnée selon le degré de transformation et le rayon de convergence de la série entière donnée.

Considérons la série entière convergente f(x) = $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où f(x) est la somme de la série.

Supposons que le rayon de convergence R de la série f(x) soit fini et différent de Zéro. Sans porter atteinte à la généralité du raisonnement, on peut considérer la série f(x) sous la forme

$f(x)$=$a_0 + \varphi(x)$, où $\varphi(x)$= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, a_{n+1} x^n$ (i).

En multipliant les deux membres de cette égalité par le binôme $1-x$, on obtient : $(1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}$ (ii).

En posant dans la deuxième somme $n+1=m$ et en tenant compte de ce que la somme ne dépend pas de la désignation de l'indice de sommation, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_m X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.

En effet, si $0 < R < \infty$ et $R \neq 1$, en posant $t = \frac{x}{R}$, on obtient une série entière par rapport à la variable t de rayon de convergence p=1.

Donc $(1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n$- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{n+1}$

$$= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)X^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n X^n,$$

où $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$; $\forall n \in N$: sont les différences premières des coefficients a_n.

Par conséquent, les formules (i) et (ii) permettent de déduire:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}\, x^n = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n \;\; et\ donc\ f(x) = a_0 + \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n.$$

$$soit\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n \;\; (a).$$

D'où la transformation considérée de la série entière s'appelle transformation d'EULER-ABEL.

En appliquant d'une façon analogue la transformation d'EULER-ABEL à la série $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$ on trouve : $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{\Delta a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n$;

où $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n-1} - \Delta a_n$ sont les différences secondes des coefficients a_n.

On en tire en vertu de la formule (a) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\left(\frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n\right) = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2}\left(\frac{x}{1-x}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n.$$

En prenant successivement p fois la transformation d'EULER-ABEL, on a :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \cdots + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n$; où $\Delta^p a_n$=$\Delta^{p-1}a_{n+1}$=$\Delta^{p-1}a_n$;$\forall n \in N$

sont les différences d'ordre p des coefficients $a_{,n}$ et $\Delta^k a_n$(k$\in N$) les différences finies consécutives des coefficients a_n avec n = 0.

Ainsi, f(x)= $\sum_{n=0}^{p-1} \Delta^2 a_n x^n \frac{x^2}{(1-x)^{k+1}}$= $\left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n\ (b)$;

où l'on a posé $\Delta^0 a_0$, si l'ordre de décroissance des différences finies $\Delta^p a_n$ pour n→ ∞ est supérieur à celui des coefficients a_n, il est plus avantageux d'employer (b).

Cette condition se présente assez souvent par exemple, si a_n=$\frac{1}{n}$, on obtient : Ici quand n→ ∞, Δa_n diminue plus que a_n.

En particulier, si a_n=$P(n)$ où $P(n)$ est un polynôme entier de degré $p-1$, la formule (b) donne sous une forme finie la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\ x^n$=$\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k\, p(0)\, \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,(c)$; (|x|<|) du fait que Δ^pp(n)=0.

La formule (b) n'a pas de sens avec $x = 1$.

Pour ce cas, la transformation d'EULER-ABEL peut être modifiée en posant $x = -t$ pour avoir :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{p-1} \Delta^k[(-1)^n\, a_n]n$$

$$= 0\,\frac{x^k}{(1-t)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1+x}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^k[(-1)^n\, a_n]t^n.$$

En revenant à l'ancienne variable on obtient:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\, \Delta^k[(-1)^n a_n]n = 0\,\frac{x^k}{(1+x)^k} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\Delta^p[(-1)^n a_n]\, x^n.$$

Cette formule a également un sens pour x=1.

EXEMPLE1:

Calculer à 0,001 près la somme de la série

$f(x)$=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} pour\ x = -1.$

SOLUTION :

Appliquons deux fois la transformation d'EULER (p=2), on a:

$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)};$

$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = -\frac{2}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$

Par conséquent, $a_0 = \frac{1}{1.2}; \Delta a_0 = \frac{2}{1.2.3}.$

La formule (b) entraine :

$f(-1) = \frac{1}{1.2}.\frac{1}{2} + \frac{2}{1.2.3}.\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(-1)^n$ = $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{3}{2}.\frac{1}{24} - \frac{3}{2}.\frac{1}{120} + \frac{3}{2}.\frac{1}{840} + \frac{3}{2}.\frac{1}{3024} + \frac{3}{2}.\frac{1}{5040} - \cdots$

La série $f(-1)$ est une série alternée à termes décroissantes en module ; par conséquent, si nous nous arrêtons au terme $\frac{3}{2}.\frac{1}{3024} = \frac{1}{2016}$, le reste de la série ne pas supérieur en module au premier terme négligé: $|R| \prec \frac{3}{2}.\frac{1}{5040} = \frac{1}{3360} \prec 3.10^{-4}$.

Ainsi, si l'on prend deux chiffres de réserves, on a :

$f(-1) = 0{,}25000 + 0{,}08333 + 0{,}06250 - 0{,}01250 + 0{,}00417 - 0{,}00179 + 0{,}00089 - 0{,}00050 = 0{,}38610.$

Avec une erreur absolue $\Delta \prec 5.\frac{1}{2}.10^{-5} + 3.10^{-4} \prec 4.10^{-4}$.

En arrondissant le membre obtenu à trois chiffres, on obtient la valeur approchée de $f(-1) = 0{,}386$; avec une borne de valeur absolue : $\Delta \prec 4.10^{-4} + 1.10^{-4} = \frac{1}{2}.10^{-3}$. La valeur exacte de la somme est : $f(-1) = 21n2 - 1 = 0{,}38630$ … Notons que si l'on applique la série $f(x)$ pour calculer directement $f(-1)$, la précision imposée ne peut s'obtenir qu'en prenant à peu près quarante-cinq termes de cette série.

EXEMPLES :

trouvez la somme de la série f(x)=$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + n + 1)x^n$.

SOLUTION :

Soit $P(n)$ =n²+n+1. La formule c amène : S(x)= $\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}; (|x| \prec 1)$

4 ESTIMATIONS DES COEFFICIENTS DE FOURIER

Rappelons qu'une série trigonométrie ou série de FOURIER est une forme « coefficient de FOURIER » se calculant d'après les formules suivantes :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$;

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$;

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$

Avec f(x) une formation de période 2π.

THÉORÈME DE CONVERGENCE :

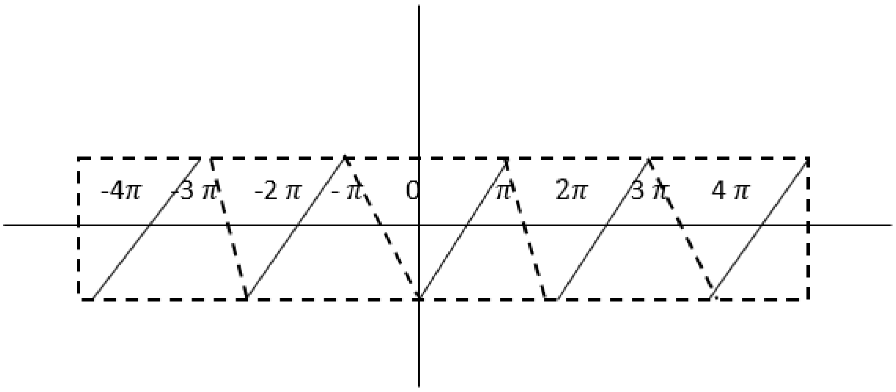
Si la convergence périodique $f(x)$ de période 2π est monotone par tranche et bornée sur le segment $-\pi, \pi$ sa série de FOURIER converge en tous les points. La somme de la série obtenue S(x) est égale à la valeur de la fonction f(x) aux points de continuité. Aux points de discontinuité de $f(x)$, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire si $x = c$ est un point de discontinuité.

De f(x), $s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}; avec\ f(c-0) et\ f(c+0).$

Respectivement limite à gauche et limite à droite.

EXEMPLE :

soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie comme suit : $f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi.$ Représentons graphiquement cette fonction et interprétons :



Cette fonction est monotone par tranches et bornée. Elle admet donc un développement en série de FOURIER. Calculons les coefficients :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin dxnx\right] = 0,$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$

On obtient ainsi la série : $f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \cdots (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right].$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire à zéro.

DÉFINITION:

On dit qu'une fonction $f(x)$ définit sur le segment $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ appartient à la classe de périodicité $C^{(m)}$ si :

1) $f(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre m y compris sont continuités sur le segment$[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$**.**
2) $f^{(k)}(-\pi + \pi) = f^{(k)}(\pi - 0)(k = 0,1,2, \dots, m)$. De ces deux conditions, on déduit que le prolongement périodique de la fonction $f(x)$ appartient à la classe $C^{(m)}$ $[-\infty, +\infty]$.

LEMME :

Si la fonction $f(x)$ appartient à la classe de périodicité $C^{(m)}$ sur le segment $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$**,** ses coefficients de FOURIER $a_n\ et\ b_n$ sont des infiniment petits (lorsque n→ ∞) d'ordre supérieur $a_n=0\left(\frac{1}{n^m}\right)$ et $b_n = \left(\frac{1}{n^m}\right)$.

DÉMONSTRATION :

Intégrons par parties m fois les deuxièmes membres des égalités suivantes :

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx; \forall n \in N$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin \mathrm{nxdx}; \forall n \in N$.

Si on pose $u = f(x)$ et $du\ = cosnx\ dx$, on obtient $du = f(x)\ dx$ et v=$\frac{1}{n}\sin nx$.

Par conséquent, la formule d'intégration par parties à :

$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}f(x)sin\ nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)dx.$

En procédant encore une fois à l'intégration par parties et en considérant que $f'(-\pi) = f'(\pi)$, on obtient:

$a_n = \frac{1}{\pi n}\left\{\left[\frac{1}{n}f'(x)sin\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(\frac{\pi}{2}.2+nx)\,dx\right]\right\} = \frac{1}{nx}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos\left(\frac{\pi}{2}+nx\right)dx.$

Apres m intégrations par parties, on trouve : $a_n = \frac{1}{\pi n^m}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)cos\left(\frac{\pi}{2}.m+nx\right)dx$

De façon analogue : $b_n = \frac{1}{\pi n^m}\int_{-\pi}^{\pi} f^{m}(x)sin\left(\frac{\pi}{2}.m+nx\right)dx.$

Les intégrales : $u_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)cos\left(\frac{\pi}{2}.m+nx\right)dx$ et $v_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)sin\left(\frac{\pi}{2}.m+nx\right)dx$

sont aussi à peu près les coefficients de FOURIER de la fonction $f^{(m)}(x)$ continue selon l'hypothèse. Sachant que même si la série de FOURIER converge ou diverge ses coefficients d'une fonction continue tendant vers zéro lorsque leur rang tend vers l'infini, ou en déduit que $u_n \to \infty\ et\ v_n \to \infty\ quand\ n \to \infty$.

Or $a_n = \frac{u_n}{n^m} et\ b_n = \frac{v_n}{n^m}$. Donc les coefficients a_n et b_n de la fonction $f(x)$ sont des infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\frac{1}{n^m}$: $a_n = 0\left(\frac{1}{n^m}\right)\ et\ b_n = \left(\frac{1}{n^m}\right) cqfd$

REMARQUES :

1) La notation $a_n = 0\left(\frac{1}{n^m}\right)\ signifie\ que\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\frac{1}{n^m}}\right) = 0$
2) Si $f^{(m)}(x)$satisfait aux conditions du théorème de convergence, on montre sans peine que:

   $u_n = 0\left(\frac{1}{n^m}\right)\ et\ v_n = 0\left(\frac{1}{n^m}\right)$.

   Dans ce cas l'estimation des coefficients de FOURIER est bien meilleure : $a_n = 0\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) et\ b_n = 0\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$.
3) Le résultat du lemme démontré a été utilisé par A. KRYLOV qui l'a mis à la base de sa méthode d'amélioration de la convergence des séries de FOURIER. Parlons maintenant de cette méthode.

5 METHODE DE A. KRYLOV

Nous venons de dire au paragraphe précédent qu'une fonction $f(x)$ définie sur le segment $[-\pi,\pi]$ appartient à la classe de périodicité $C^{(m)}$. Maintenant la méthode de KRYLOV, que nous voulons développer, consiste à extraire une fonction élémentaire g(x) (qui en générale est une fonction polynomiale par morceaux) de même discontinuité que la fonction $f(x)$; les dérivées $g^{(i)}(x)(i = 1,2,\dots,m)$, jusqu'à l'ordre m y compris possédant les même discontinuités que les dérivées correspondantes $f^{(i)}(x)$ de la fonction considérée f(x).

De plus, la fonction $g(x)$ étant telle que $f^{(i)}(-\pi+0) - g^{(i)}(-\pi+0) = f^{(i)}(\pi-0) - g^{(i)}(\pi-0)(i = 1,2,\dots,m)$ dans ce cas, la différence $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ appartient à la classe de périodicité $C^{(m)}$. La série de FOURIER de la fonction $f(x)$ est composée : a) de la partie lentement convergente dont la somme est évidemment la fonction $g(x)$. b) du reste à convergence rapide qui est une série de FOURIER de la fonction $\varphi(x) \in c^{(m)}[-\pi,\pi]$.

Montrons comment en pratique on construit la fonction auxiliaire $g(x)$ à partir de la fonction donnée $f(x)$.

Soit $f(x) = g(x) + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + \beta_n\sin nx)\right]$;

où a_n et β_n désignent les coefficients de FOURIER et en général convergeant rapidement ; c'est-à-dire sont des infiniment petits d'ordre supérieur à m par rapport à $\frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$. Construisons à cet effet par la méthode de récurrence sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$, la suite des fonctions $\sigma_0(x), \sigma_1(x), \dots \sigma_m(x)$ jouissant de la propriété suivante :

$$\sigma_{k^{(k)}}(+0) - \sigma_{k^{(k)}}(-0) = \pi$$

$(k = 0,1,2,3, \dots m)$ et de plus les dérivées $\sigma_{k^{(j)}}(x)$ $(j = 0,1,2,3, \dots m)$ soient continues sur les segments $[-2\pi, 2\pi]$.

La fonction $\sigma_0(x)$ est définie de la manière suivante :

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \dfrac{-\pi - x}{1} \; pour \; 2\pi \prec x \prec 0 \\ \dfrac{\pi - x}{1} \; pour \; 0 \prec x \prec 2\pi \\ 0 \; pour \; x = -2\pi, 0, 2\pi \end{cases}$$

Etant une fonction impaire, sa série de FOURIER ne contient donc que les sinus des arcs multiples :

$\sigma_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$

où $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi - x}{2} \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2\pi} - \frac{1}{2n^2} \sin nx\Big|_0^x\right] = \frac{1}{n}.$

D'où$\sigma_0(x) = \dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \cdots + \dfrac{\sin nx}{n} + \cdots$

Il est évident que la fonction $\sigma_0(x)$ comporte une discontinuité au point x = 0 avec un saut égal à π.

$\sigma_0(+0) - \sigma_0(-0) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Ainsi, la fonction $\psi(x) = \sigma_0(x - x_0)$ $(-\pi \le x \le \pi; -\pi \le x_0 \le \pi)$ fait en x_0 le même saut que la fonction $\sigma_0(x)$: $\psi(x_0 + 0) - \psi(x_0 - 0) = \pi$; le point de discontinuité étant unique sur le segment $[-\pi, \pi]$.

Soient $\sigma_1(x)$ une fonction etC_1 une constante certaine telles que $\sigma_1(x) = c_1 + \int_0^x \sigma_0(x)dx$. Intégrons terme à terme la série $\sigma_0(x)$ pour obtenir : $\sigma_1(x) = c_1 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, dx = C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$

Choisissons la constante C_1 de sorte que le terme constant de cette série soit nulle; $C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \iff C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ égale évidement au terme constant de la série de FOURIER de la fonction $\int_0^x \sigma_0(x)dx$. on en tire en utilisant $\sigma_0(x)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^x dx \int_0^x \sigma_0(x)dx \; \frac{1}{\pi}\int_0^x \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{(\pi - x)^2}{4}\right] dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{12}\right) = \frac{\pi^3}{6}.$

D'où $C_1 = \frac{\pi^2}{6}$. En outre

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{6} + \int_0^x \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(\pi - x)^2}{4}, avec \; 0 \le x \le 2\pi \\ \frac{-\pi^2}{6} - \int_0^x \frac{\pi + x}{2} dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(\pi + x)^2}{4}, avec - 2\pi \le x \le 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur le segment $[-2\pi, 2\pi]$ alors que sa dérivée $\sigma'_0(x) = \sigma_0(x)$ admet une discontinuité en $x = 0$.

De plus $\sigma'_1(+0) = \sigma'_0(-0) = \pi$.

Nous définissons de la même façon les fonctions suivantes :

$\sigma'_2(x) = C_2 + \int_0^x \sigma_1(x)dx$, $\sigma'_3(x) = C_3 + \int_0^x \sigma_2(x)dx$,…,$\sigma'_m(x) = C_m + \int_0^x \sigma_{m-1}(x)dx$

Où les constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_m$ sont choisies de façon que le terme constant de la dérivée de la série de FOURIER correspondante soit nul, c'est-à-dire que les constantes C_k (k = 1,2,…m) s'obtiennent successivement d'après les conditions : $\int_0^{\pi}\left[C_k + \int_0^x \sigma_{k-1}(x)dx\right]$.

Les fonctions $\sigma_{(x)}$ (k = 1, 2, …, m) et toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(k - 1)$ y compris sont continues sur le segment$[-2\pi, 2\pi]$.

Par ailleurs, comme $\sigma_k^{(x)}(x) = \sigma_0(x)$ il vient : $\sigma_k^{(x)}(+0) - \sigma_k^{(x)}(-0) = \pi \ (k = 1,2, \ \ldots . m)$.

Donc la dérivée k-ième de la fonction $\sigma_k^{(x)}(x)$ a une discontinuité en x = 0 ; avec un saut égal à π. Il en résulte que la fonction $\psi_k(x) = \sigma_k(x - x_0)\ (-\pi \leq x \leq \pi; -\pi)$, obtenue par la translation de la fonction, n'a une discontinuité que la dérivée k-ième au point x = x0 : $\psi_k^k(x_0 + 0) - \psi_k^{(k)}(x_0 - 0) = \pi$.

Soient maintenant $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_{k0}^{(0)}$ les points de discontinuité de $f(x)$; $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_{k1}^{(1)}$ les points de discontinuité de $f'(x)$;… ;$x_1^{(m)}, x_1^{(m)}, x_1^{(m)}, \ldots, x_{km}^{(m)}$ les points de discontinuité de $f^m(x)$. Certains de ces points pouvant se répéter. Pour les sauts correspondants de la fonction et de ses dérivées, introduisons les notations :

$f^{(1)}\left(x_j^{(1)} + 0\right) - f^{(1)}\left(x_j^{(1)} + 0\right) = h_j^{(i)}$ (1=0, 1, 2, …. , m ; j = 1, 2, …., K1).

Définissons la fonction g(x) (fonctions des sauts) par la formule :

$$g(x) = \sum_{S=1}^{s=k_0} \frac{h_j^{(0)}}{\pi} \sigma_0\left(x - x_S^{(0)}\right) + \sum_{S=1}^{s=k_1} \frac{h_j^{(1)}}{\pi} \sigma_1\left(x - x_S^{(1)}\right) + \cdots \sum_{S=1}^{s=k_m} \frac{h_j^{(m)}}{\pi} \sigma_m\left(x - x_S^{(m)}\right).$$

La fonction $g(x)$ jouit des propriétés suivantes :

i. Aux points $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_{k_0}^{(0)}$ la fonction g(x) est discontinue, les sauts en ces points étant égaux aux sauts de la fonction f(x) en points correspondants :

$$\boldsymbol{g}(x_j^{(1)} + 0) - \boldsymbol{g}(x_j^{(1)} - 0) = \frac{h_j^{(0)}}{\pi}\left[\sigma_0\left(x_j - x_j + 0\right) - \sigma_0\left(x_j - x_j - 0\right)\right] = \frac{h_j^{(0)}}{\pi}.\pi = h_j^{(0)}$$

ii. La dérivée $g^{(1)}(x)$ $(1 = 0, 1, 2, \ldots, m)$ est discontinue aux points de $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_{k0}^{(0)}$.

De plus,

$$\boldsymbol{g}(x_j^{(1)} + 0) - \boldsymbol{g}(x_j^{(1)} - 0) = \frac{h_j^{(1)}}{\pi}\left[\sigma_1\left(x_j - x_j + 0\right) - \sigma_1\left(x_j - x_j - 0\right)\right] = \frac{h_j^{(1)}}{\pi}.\pi = h_j^{(1)}$$

C'est-à-dire $g^{(1)}\left(x_j + 0\right) - g^{(1)}\left(x_j - 0\right) = f^{(1)}\left(x_j + 0\right) - f^{(1)}\left(x_j + 0\right)$

iii. Pour x ≠ $x_j^{(1)}$ la fonction g(x) possède des dérivées continues de tout ordre.

Soit φ(x) = $f(x) - g(x)$. En vertu de i) et ii), on a : $\varphi^{(1)}\left(x_j^{(1)} + 0\right) - \varphi^{(1)}\left(x_j^{(1)} - 0\right) = 0$

où $\varphi(x) \in C^m[-\pi, \pi]$ $(1 = 0, 1, 2, \ldots., m)$. Ainsi, pour développer la fonction f(x),

on peut faire appel à la série de FOURIER $f(x) = g(x) + \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\right]$ à convergence rapide.

REMARQUES :

1) Les développements $\sigma_0\left(x - x_S^{(0)}\right) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\sin n(x - s_S^{(0)})}{n}$;

   $\sigma_0\left(x - x_S^{(1)}\right) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\cos n(x - s_S^{(1)})}{n}$; $\sigma_0\left(x - x_S^{(2)}\right) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{\sin n(x - s_S^{(2)})}{n}$;… permettent de développer aisément la fonction g(x) en série de FOURIER.

2) Si aux extrémités du segment $[-\pi, \pi]$, les valeurs limites de la fonction $f(x)$ ou des dérivées f'(x), f''(x),… , $f^{(k)}(x)$ (k≤ m) ne coïncident pas, c'est-à-dire si $f^{(i)}(-\pi + 0) \neq f^{(i)}(\pi - 0)$, les points x = - π doivent être considérés comme les points de discontinuité de la fonction f(x) ou respectivement des dérivées $f^{(i)}(x)$.

   En supposant que la fonction $f(x)$ soit prolongée périodiquement hors du segment $[-\pi, \pi]$ de 2 π, on obtient que le saut des dérivées en x = - π x = π est le même et égale à $h^{(i)} = f^{(i)}(\pi + 0) - f^{(i)}(\pi - 0)$.

   Par suite de la périodicité de la fonction $\sigma_1(x + \pi) = \sigma_1(x - \pi)$. La fonction $\sigma_i^i(x + \pi)$ sur le segment $[-\pi, \pi]$ admettant deux points de discontinuité (x = - π *et* $x = \pi$) de même saut égal à π. C'est pourquoi, il faut inclure dans la formule définissant $g(x)$ un seul point extrême, par exemple $x = \pi$. En effet, d'après la formule définissant g(x), le saut de la dérivée $g^{(i)}$ au point x = - π est égal à :

$g^{(i)}(-\pi+0)-\ g^{(i)}(\pi-0)=\frac{\mathrm{h}^{(1)}}{\pi}[\sigma^{(i)}(+0)-\sigma^{(1)}(-0)]=\ h^{(1)}.$

La périodicité de $g^{(i)}(x)$ fait que le saut de cette dérivée est également le même pour $x=\pi$. donc, en formant la différence f(x)-g(x)= φ(x), où on ne tient pas compte que du point x = $-\pi$, on suppose la discontinuité de la 1-ième de la fonction φ (x) en $x=-\pi$, de même qu'en $x=\pi$.

EXEMPLE :

Améliorer par la méthode de KRYLOV la convergence de la série de FOURIER de la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1\ si-\pi\ \prec x\prec 0\\ x^2\ si\ 0\ \prec x\ \prec\ \pi\end{cases}$$

SOLUTION :

D'après la remarque (2), la fonction f(x) a sur le segment $[-\pi,\pi]$ pour points de discontinuité x1=$-\pi, x2=0, X3=\pi$. Le calcul des coefficients de FOURIER donne :

$$a_0=1+\frac{2\pi^2}{3}\ ;a_n=1+\frac{2\pi^2}{3}\ (-1)^n;\ b_n=\begin{cases}\frac{-2}{\pi n}\ pour\ n\ impair\\ 0\ pour\ n\ pair\end{cases}$$

Par suite, la série de FOURIER de $f(x)$ s'écrit : $a_0=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$

La convergence de cette série est mauvaise du fait que les $b_n=0(\frac{1}{n})$ coefficients décroissent lentement. Extrayons de la fonction $f(x)$ la fonction des sauts $g(x)$ de façon que

$\varphi(x)=\ [f(x)-g(x)]\ \epsilon\ C^{(m)}[-\pi,\pi].$

Calculons les sauts $h_j^{(0)}(x)$ aux points x_j(j = 1, 2, 3) :

$$h_1^{(0)}(x)=f(-\pi+0)-f(\pi-0)=(\pi^2+1)-\pi^2=1$$

$$h_2^{(0)}(x)=f(+0)-f(-0)=0-1=-1$$

$$h_3^{(0)}(x)=h_1^{(0)}=1$$

Ainsi, on obtient d'après la remarque (2) et la formule définissant g(x).

$g(x)=\frac{1}{\pi}\sigma_0(x+\pi)-\ \frac{1}{\pi}\sigma_0(x)$ ou $g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi-(x+\pi)}{2}-\frac{1}{\pi}\frac{(x+\pi)}{2}=-\frac{1}{2};avec-\pi<x<0$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi-(x+\pi)}{2}-\frac{1}{\pi}\frac{(x-\pi)}{2}=-\frac{1}{2};avec\ 0\ <x<\pi$$

En retranchant de la fonction $f(x)$ de la fonction des sauts g(x), on obtient $\varphi(x)=\ x^2+\frac{1}{2}$; continue sur le segment $[-\pi,\pi]$.

Etant donné que $\sigma(x)=\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ et que

$\sigma(x)=\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\pi)}{n}\ \sum_{\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n},$

Il vient

$g(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}\ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\pi)}{n}\ \frac{1}{\pi}\sum_{\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}=\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$

Donc

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{\pi^3}{3}+4\sum_{\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^2}.$

L'ordre de décroissance des coefficients de la série de FOURIER transformée étant $0(\frac{1}{n^2})$.

REMARQUE :

La méthode de KRYLOV est également applicable à la série de FOURIER de période $T = 2l$.

En effet, soit la fonction $f(x)$ définie sur le domaine essentiel $a - l < x < a + l$.

Après avoir effectué la transformation linéaire x = a $+\frac{1}{\pi}t$, on obtient la fonction $F(t)$= (a $+\frac{1}{\pi}t$)2π- périodique définie dans le domaine $-\pi < t < \pi$.

6 SOMMATION APPROCHEE DES SERIES TRIGONOMETRIQUES

La sommation approchée des séries trigonométriques est une application de l'amélioration de la convergence d'une série. En effet, soit la série trigonométrique convergente $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n \cos nx} + b_n \sin nx) = S(x)$ dont la somme $S(x)$ est inconnue. Il faut calculer la valeur approchée de cette somme avec précision donnée à l'avance. Il est évident que plus vite le coefficient $a_n et\ b_n$ de la série donnée tendent vers zéro, moins il faut prendre les termes de la série pour assurer la précisons imposée. Pour cette raison, avant de commencer le calcul, il convient d'améliorer la convergence de la série. A cette fin, on recourt en général à l'artifice suivant : on extrait de la série donnée une certaine série trigonométrique dont la somme $g(x)$ est connue pour que la série resta$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ $a$it une convergence plus rapide que la série initiale.

$$Si\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\overline{a}_n \cos nx + \overline{b}_n \sin nx), vient\ S(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

où $a_{n=a_n - b_n}$ (n=0, 1, 2,….). Dans les cas les plus simples, pour construire les fonctions $g(x)$ on peut utiliser les développements décrits dans ce qui précède.

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi + x}{2}\ (0 < x < 2\pi)$$

$$\sigma_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = \frac{(\pi + x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\sigma_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - 3\pi x^2 + x^3}{12}\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\vdots$$

Parfois, il est utile également de faire appel aux développements

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \ln(2 \sin\frac{x}{2})\ (0 < x < 2\pi)$$

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = \int_0^x \ln(2 \sin\frac{x}{2})dx\ \ (0 < x < 2\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = \int_0^x dx \int_0^x \ln(2 \sin\frac{x}{2})dx\ + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ (0 < x < 2\pi)$$

$$\vdots$$

$$o\text{ù} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ = 1{,}20205690$$

EXEMPLE :

Trouver la somme de la série S(x) = $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+1}}\ \sin sx$ à 0,001 près.

SOLUTION :

L'ordre de décroissance des coefficients de la série $b_n = \frac{n}{n^2+1}\ est\ 0\left(\frac{1}{n}\right)\ puisque\ \lim_{n\infty}\left(\frac{b_n}{\frac{1}{n}}\right) = 1.$

Améliorons la convergence de la série proposée : il est claire que $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + u_n$;

$o\grave{u}\ u_n = \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^3(n^2+1)}$

Alors, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx.$

Mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sigma_0(x) et\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} = -\sigma_2(x).$

Donc S(x) = $\sigma_0(x) + \sigma_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx$;

où $u_n = \frac{1}{n^3(n^2+1)}\ 0(\frac{1}{n^5})$. Soit N le nombre de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_1\ \sin nx$ qu'il faut prendre que le reste R_n verifie l'inégalité $|R_n| = |\sum_{n=1}^{\infty} u_1\ \sin nx| \prec 0{,}001$. Trouver le nombre N, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n^2+1)} \sin nx \prec \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \prec \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{4n^4}$$

En résolvant l'inégalité $\frac{1}{4n^4} \prec 0{,}001$, on voit qu'il suffit de prendre N = 5.

Donc, on a avec la précisons imposée : $S(x) = \frac{\pi+x}{2} - \frac{2\pi^2-3\pi x^2+x^3}{12} + \sum_{n=1}^{5} \frac{\sin nx}{(n^3+1)}\ (0 < x < \pi)$

7 CONCLUSION

A travers ce travail, nous avons développé différentes méthodes de transformation des séries et qui permettent l'amélioration de leurs convergences. Et ce qui nous a permis de calculer la somme de la série considérée. La transformation de KUMMER, ABEL, KRYLOV, l'estimation des coefficients de FOURIER, la sommation approchée des séries trigonométriques facilitent la tâche. Nous avons apporté des analyses de ces méthodes tel était le socle et l'idéal de cet article. Des exemples sont donnés, des exercices résolus et certains résultats (théorèmes) sont vérifiés et pour d'autres qui ne les sont pas, les lecteurs peuvent se servir des différents ouvrages présentés à la bibliographie.

Nous avons focalisé notre attention sur l'amélioration de la convergence des séries numériques réelles et notre prochaine publication se portera sur l'amélioration de la convergence des séries numériques complexes et celle des séries des fonctions.

REFERENCES

[1] AYERS JR,F. (1985), Théorie et applications du calcul différentiel et intégral, Séries-Schaum, Mc Graw-Hill, Paris.
[2] CHILOV, G. (1973), Mathématique analyse, fonction d'une variable réelle, Mir, Moscou.
[3] COUTY, R. et EZRA, J., (1985), Analyse MP 1ère année et spéciales AA', Tome 1, Armand Colin, Paris.
[4] CHEVALLARD, Y. (1979), Théories des séries : séries numériques, Cedic, Paris
[5] DEMIDOVITCH, B. et MARON, I. (1973), Eléments de calcul numérique, Mir, Moscou.
[6] LABORDE, J. (1965), Cours et exercices de calcul numérique, Dunod, Paris.
[7] PISKOUNOV, N. (1970), Calcul différentiel et intégral, Tom 1, Mir, Moscou
[8] QUINET, J. (1973), Cours élémentaires de Mathématique supérieur. Calcul intégral et séries, Dunod, Bordas, Paris.