International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 20 No. 1 Apr. 2017, pp. 115-123

http://www.ijias.issr-journals.org/

SUR QUELQUES ESPACES IMPORTANTS DE VECTEURS PROPRES DES DISTRIBUTIONS

[ON SOME IMPORTANT SPACES OF VECTORS VALUES DISTRIBUTIONS]

Gordien TAMBA OF'R

Département de Mathématique et Informatique, Université Pédagogique Nationale,
Centre International des Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA),
Kinshasa, Ngaliema, BP 885, RD Congo

ABSTRACT: We define some important spaces of vector valued distributions which will be useful in the study of evolution problems in general, particularly in the NAVIER-STOCKES equations of fluid mechanics, one meets with some of these spaces.

KEYWORDS: Spaces, Evolution problems, Density, Green's formula, Imbedding.

RESUME: Nous définissons quelques importants espaces des vecteurs propres des Distributions, lesquels sont souvent utilisés dans l'étude de problèmes d'évolution en général, spécialement dans les équations de NAVIER-STOKES en Mécanique des Fluides.

MOTS-CLEFS: Espaces, Problèmes d'évolutions, Densité, Formule de GREEN, Inclusion.

INTRODUCTION

Nous savons que les Distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ont des valeurs scalaires c'est-à-dire $T(\phi) \in \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$), $\forall \phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Mais dans l'étude de problèmes d'évolutions (problèmes dépendant de temps) tels que les équations paraboliques et hyperboliques de Physique-Mathématiques [4][5][6], les vecteurs propres des fonctions (espaces vectoriels et les vecteurs des distributions en résultent.

D'où, notre approche de cette présentation des vecteurs propres de distributions sera motivée par le besoin spécifique qui sera utilisé dans l'étude des équations de l'évolution, laquelle a quelques nouvelles difficultés en se référant à la source originale, Laurent Schwartz [1][2][3].

RAPPELS : DÉFINITIONS ET PROPOSITIONS [3][10][18]

Ces propositions sont prises sans démonstrations.

DÉFINITION [0.01] :

Pour $1 \leq p \leq \infty, \mathbb{L}^{\infty}(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V}) \equiv \mathbb{L}^{p}(]\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}[; \boldsymbol{V})$ est un espace linéaire pour toutes les fonctions classes d'équivalence de vecteurs propres $\boldsymbol{w}:]\boldsymbol{0}; \boldsymbol{T}[\hookrightarrow \boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{V}$ lesquelles sont mésurables tels que $\|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})\|_{\boldsymbol{V}} \in \mathbb{L}^{p}(]\boldsymbol{O}; \boldsymbol{T}[)$ c'est-à-dire :

- Pour $1 \leq p < \infty$,

$\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}) = \{w: w:]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[\hookrightarrow \boldsymbol{V}\ mesurable, \int_0^T \|w(t)\|^p{}_V\, dt < +\infty\}$ ayant la norme usuelle : $\forall w \in \mathbb{L}^p(]\boldsymbol{O};\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$,

$$\|w(t)\|_{\mathbb{L}^p(]\boldsymbol{O};\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})} = (\int_0^T \|w(t)\|_V{}^p\, dt)^{\frac{1}{p}}$$

- Pour $p = \infty$

$\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T},\boldsymbol{V}) = \{w: w:]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[\hookrightarrow \boldsymbol{V}\ mesurable, \|\boldsymbol{w(t)}\|_{\boldsymbol{V}}$ est essentiellement bornée sur $]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[, c'est$à $dire\ \|\boldsymbol{w(t)}\|_V \in \mathbb{L}^p(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})\}$ ayant la norme usuelle : $\forall w \in \mathbb{L}^\infty(]\boldsymbol{O};\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$,

$$\|w(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})} = ess_{0<t<T}\|w(t)\|_{\boldsymbol{V}}$$

PROPOSITION (0.02) [18][26]

1. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{L}^p(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$ défini au 0.0.1. est un espace de Banach.
2. Si **V** est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $<.,.>$ et p=2, alors $\mathbb{L}^{\boldsymbol{p}}(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}) = \mathbb{L}^{\boldsymbol{2}}(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$ est un espace de Hilbert équipé du produit scalaire $<.,.>_{\mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})}$ par :

$$< \mathrm{u}, \mathrm{v} >_{\mathbb{L}^2(]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{T}} < \mathrm{u(t)}, \mathrm{v(t)} >_{\boldsymbol{V}} dt$$

3. Pour un espace de Banach séparable **V** et pour $1 \leq p < \infty$, $\left(\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})\right)' = \mathbb{L}^q(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}')$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p \leq \infty$ tel que :

$$< w, z >_{\mathbb{L}^q(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}')x\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})} = \int_0^T < w(t), z(t) >_{VxV'} dt$$

4. Si V est réflexif (**V''=V**) et $1 < p < \infty$, alors $\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$ est réflexif ;
5. Pour p=1, les propriétés suivantes équivalentes dans $\mathbb{L}^1(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$;
   - $w \in \mathbb{L}^1(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}) \Longrightarrow \int_0^T w(t)dt \in \boldsymbol{V}$ est bien défini et appartient à **V**.
   - $\left\|\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{w(t)dt}\right\|_{\boldsymbol{V}} \leq \int_0^{\mathrm{T}} \|\mathrm{w(t)}_{\mathbf{V}}\|\mathrm{dt}$
   - $\forall \mathrm{L} \in \boldsymbol{V}'$,

$$< L, \int_0^T w(t)dt >_{\boldsymbol{V'x V}} = \int_0^T < L, w(t) >_{\boldsymbol{V'xV}} dt$$

Soit $\mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[) = C_0^\infty(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[) = \{\phi: \phi \in C_0^\infty(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[), supp\phi CC]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[\}$ est sous-espace compact de $]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[$.

DÉFINITION (0.0.2) [10][6][11]

Un espace continue et linéaire S : $\mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[) \to V$ de $\mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[)$ dans un espace de Banach **V** est appelé Distribution de vecteurs propres sur $]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[$ laquelle est évaluée dans un espace de Banach **V**, c'est-à-dire :

- S : $\mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[) \to \boldsymbol{V}$ est un espace linéaire à valeurs

$S(\phi) \in \boldsymbol{V}\phi \in \mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[)$;

- Continuité de S :

$$\phi_n \to \phi \text{ dans } \mathfrak{D}(]\boldsymbol{0},\boldsymbol{T}[) \Rightarrow S(\phi_n) \to S(\phi) \in V$$
$$\Rightarrow \|S(\phi_n) - S(\phi)\| \to 0$$

PROPOSITION (0.0.3.)

Soit S : $\mathfrak{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) \to \boldsymbol{V}$ un espace linéaire de $\mathfrak{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$ dans un espace de Banach **V**. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. S est une distribution de vecteurs propres sur $]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[$ à valeurs dans **V**, c'est-à-dire $\boldsymbol{S} \in \mathfrak{D}'\big((]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[);\boldsymbol{V}\big) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\mathfrak{D}}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[);\boldsymbol{V})$
2. $\forall$ Intervalles compacts $K = [a,b]CC]0,T[$, la restriction

   $S_K = S\downarrow_{D_K}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$ de S à $\mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) = \{\phi\colon \phi \in \mathfrak{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[), supp(\phi)CK\}$ est continue, c'est-à-dire $\forall$KCC$]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[$,

   $\boldsymbol{S_K * \phi = S * \phi}$, $\forall\phi \in \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)C\mathfrak{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$

   $\|S_K * \phi\|_V \le \boldsymbol{C_K sup_{t\in K}}|\boldsymbol{\phi(t)}|\ \forall\boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$

$$\Rightarrow \forall \mathrm{KCC}]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[, \boldsymbol{\phi_n} \to \boldsymbol{\phi} \in \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) \Longrightarrow \|\boldsymbol{S_K * \phi - S_K * \phi_n}\|_V \le \boldsymbol{c_K}\sup_{t\in k}|\boldsymbol{\phi(t) - \phi_n(t)}| \to \mathbf{0} \text{ lorsque } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_K}\colon \boldsymbol{\mathfrak{D}_K}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) \Longrightarrow \boldsymbol{V} \text{ est continue } \forall \mathrm{KCC}]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[$$

$$\Rightarrow S\colon \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) \to \boldsymbol{V} \text{ est continue}$$

PROPOSITION [0.0.4.][13][17][22]

Soient **V, W** deux espaces de Banach tels que $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{W}$, l'inclusion étant continue de V dans W, alors

$$\mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{W}) \text{ C'est-à-dire}$$

1. $S \in \mathfrak{D}'(]0,T[;V) \Longrightarrow S \in \mathfrak{D}'(]0,T[;W)$;
2. $S_n \to S\ dans\ \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}) \Rightarrow S_n \to S\ dans\ \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{W})$

$$\Rightarrow S_n * \phi \to S * \phi \text{ dans W.}$$

$$\Rightarrow \|S * \phi - S_n * \phi\|_w \to 0\ \forall\phi \in \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$$

DÉFINITION [0.0.3]

Soit $S \in \mathfrak{D}'(]0,T[;V)$ une distribution de vecteurs propres à valeurs dans **V**. alors le plan $\phi \in \mathfrak{D}_K(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[) \hookrightarrow (-1)^m\langle S, \frac{d^m\phi}{dt^m}\rangle \in \boldsymbol{V}$ est une distribution de vecteurs propres à valeurs dans **V**, laquelle nous notons

$\frac{d^mS}{dt^m} \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$ et appelée la $m^{\text{ième}}$ dérivée de S.

Alors la $m^{\text{ième}}$ dérivée $\frac{d^mS}{dt^m} \in \mathfrak{D}'\ \ (]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$ est définie, $\forall m \in \mathbb{N}$ par $\langle\ \frac{d^mS}{dt^m},\phi\rangle = (-1)^m\langle S,\ \frac{d^m\phi}{dt^m}\rangle$ dans **V** $\forall\phi \in \mathfrak{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$ c'est-à-dire les distributions de vecteurs propres $\mathfrak{D}'\ \ (]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$ sont indéfiniment différentielles.

PROPOSITION [0.0.5]

$\forall m \in \mathbb{N}, \frac{d^m}{dt^m}\colon \mathfrak{D}'\big(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[\,;\boldsymbol{V}\big) \to \mathfrak{D}'\big(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[\,;\boldsymbol{V}\big)$ est continue de $\mathfrak{D}'\big(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[\,;\boldsymbol{V}\big)$ dans $\mathfrak{D}'^{(]0,T[\,;V)}$, c'est-à-dire $S_n \to S$ dans $\mathfrak{D}'\big(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[\,;\boldsymbol{V}\big)$

$$\Longrightarrow \frac{d^mS_n}{dt^m} \longrightarrow \frac{d^mS}{dt^m} \in\ \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$$

DÉFINITION [0.0.4.] [13][17]

Un ensemble d'un espace linéaire partout continue S de $\mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$ dans **V** d'un espace vectoriel des distributions de vecteurs propres sur $(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$ à valeurs dans V, lequel noté $\mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$. Alors par définition ;

$$\mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}) = \mathcal{L}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$$

$\mathcal{L}(\mathcal{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}))$ étant l'espace linéaire de l'espace linéaire continue de $\mathcal{D}(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[$ dans V. $\forall S \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V})$; $V, \forall\phi \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[)$

$$S(\phi) = S.\phi = \langle S,\phi\rangle \in \boldsymbol{V},$$

$S.\phi$ et $\langle S, \phi\rangle$ étant alternatif, équivalentes notations pour $S(\phi)$ utilisées.

ESPACE $\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ [6][14][18]

DÉFINITION 1.1.

Soit **V** et **W** deux espaces de Banach séparables tels que $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{W}$ l'inclusion étant dense et continue de **V** dans **W**. Alors l'espace $\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}, \mathbb{W})$ est défini, pour $1 < p, q < \infty\ avec\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, par :

$\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}, \mathbb{W}) = \{u; u \in \mathbb{L}^p(O, T, V), \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^q(O, T, W)\}$ (1.1.1)

dans lequel on a défini la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{E}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})} = \|u\|_{\mathbb{L}^p(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{\mathbb{L}^q(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{W})} \quad (1.1.2.)$$

où $\frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^q(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{W})$ ayant un sens pour $u \in \mathbb{L}^p(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V})$ si $\exists v \in \mathbb{L}^q(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{W})$ tel que :

$$\int_O^T v(t)\phi(t)dt = -\int_O^T u\frac{d\phi}{dt}dt\ \ \forall\phi \in \mathcal{L} \text{ alors } v = \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^q(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{W})$$

Pour $1 < q, p < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ et\ v \to w$ une inclusion dense et continue,

$\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}; \mathbb{W})$ est un espace de Banach. (1.1.4)

ESPACE DE HILBERT $\boldsymbol{W_1}(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$[6][12][16][18][27]

Soient **H** et **V** deux espaces (séparables) de Hilbert tels que $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H}$, l'inclusion étant dense et continue, c'est-à-dire :

1. $\boldsymbol{VCH}$;
2. $\boldsymbol{V}\ est\ dense\ dans\ \boldsymbol{H}$
3. $u_n \to u\ dans\ V \Rightarrow u_n \to u \in H$ (1.1.5)

Identifions **H** à son dual **H'**, c'est-à-dire **H=H'**, nous avons $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H'} \hookrightarrow \boldsymbol{V'}$ avec la correspondance de l'inclusion continue de **V** dans **H** et **H** dans **V', V** étant un sous espace dense de **H**.
1.1.6

DÉFINITION 1.1.2.

Pour tout $0 < T < \infty, W_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ un espace linéaire,

$$W_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}) = \left\{u: u \in \mathbb{L}^2(0, T, V), \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(0, T, V')\right\} \quad (1.1.7)$$

ayant la norme $\|.\|_{W_1(0,T;V)}$ définie par :

$$\|u\|_{W_1(\boldsymbol{0},\boldsymbol{T},\boldsymbol{V})} = (\|u\|^2{}_{W_1(\boldsymbol{0},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})})^{\frac{1}{2}} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2{}_{\mathbb{L}^2(\boldsymbol{0},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V'})})^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.8)$$

où $\frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}')$ définie par 1.1.3 avec V'=W et p=q=2, c'est-à-dire pour $v \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}')$,

$$\int_0^T v(t)\phi(t)dt = -\langle u, \frac{d\phi}{dt}\rangle = -\int_0^T u\frac{d\phi}{dt}\ \ \forall\phi \in \mathfrak{D}(]0, T[) \quad (1.1.9)$$

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}') \to \mathfrak{D}'(]0, T[) \to \mathfrak{D}'(]0, T[; V') \quad (1.1.10)$$

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}') \to \mathfrak{D}'(]0, T[; V') \quad (1.1.11)$$

THÉORÈME 1.1.1.

$W_1(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{W})$ défini par 1.1.7 et 1.1.8 est un espace de Hilbert.

PREUVE

Il suffit de montrer que toute suite de Cauchy dans $W_1(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{V})$ est encore convergente dans $W_1(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{W})$.

Soit u_n une suite de cauchy dans $W_1(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{V})$, alors

- (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{V})$ lequel est un espace de Hilbert (voir proposition 0.0.3), donc **V** est un espace de Hilbert
- (u'_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{V}')$ lequel est encore un espace de Hilbert (voir proposition 0.0.3) d'où **V'** est un espace de Hilbert.

D'où, $\exists u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O},\mathbb{T};\mathbb{V})$ et $v_1 \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}')$tel que

$u_n \to u \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$

$u'_n \to u_1 \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}')$

La preuve est terminée si nous montrons que $v_1 = \frac{du}{dt} = u'$.

En effet $u'_n \to u \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \to u_n \to u \to \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \to u_n \to u \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}')$,

Par proposition 0.0.3 d'où $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \hookrightarrow \boldsymbol{V}'$, avec l'inclusion continue et dense de V dans H et l'inclusion continue de H' dans V', $\mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \to \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}')$ par la proposition 0.0.2.

$$\Rightarrow u_n \to \frac{du}{dt} = u' \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \qquad (1.1.12)$$

Mais

$$u'_n \to v_1 \in \mathbb{L}^2(\mathbf{0},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \to u'_n \to v_1 \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \qquad (1.1.13)$$

d'où, de 1.1.12 et 1.1.13 $u'_n \to \frac{du}{dt} \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}')$ et

$u'_n \to v_1 \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}') \Leftrightarrow v_1 = \frac{du}{dt} = u' \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0},\boldsymbol{T}[;\boldsymbol{V}')$, d'où l'unicité de la limite.

D'où, $u_n \to u \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$, et

$u_n \to \frac{du}{dt} \in \mathbb{L}^2(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V}') \Longrightarrow u_n \longrightarrow u \in W_1(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$

Par conséquent, $W_1(\mathbb{O},\mathbb{T},\mathbb{V})$ est un espace de Hilbert.

REMARQUE 1.1.1

Les espaces $\mathbb{E}(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V};\boldsymbol{W})]$ et $W_1(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$ sont utilisés dans les problèmes d'évolution des équations paraboliques.

Considérons un résultat important dans l'étude des équations d'évolution parabolique.[6][9][16][18][27]

PROPOSITION 1.1.1

Soit **H, V** deux espaces de Hilbert avec $\boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \longrightarrow \boldsymbol{V}'$ l'inclusion $\boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{H}$ étant dense et continue et ainsi que $\boldsymbol{V}' \longrightarrow \boldsymbol{H}'$.

Pour $u \in W_1(\boldsymbol{O},\boldsymbol{T};\boldsymbol{V})$ défini par (1.1.7)-(1.1.8), $v \in V, 0 < T < \infty$,

$$\langle u'(*), v\rangle_{V_X{}'V} = \frac{d}{dt}\langle u(*), v\rangle_H \in \mathfrak{D}'(]0,T[) \qquad (1.1.14)$$

où, $\langle *,*\rangle_{V'XV}$ est la dualité entre **V** et **V'** et $\langle *,*\rangle_H$ le produit scalaire dans **H**.

PREUVE

Etant donné que $u \in \mathbb{L}^2(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V}')$, $t \to \langle u'(t), v\rangle_{V'xV}$ est bien une fonction de $\mathbb{L}^2(]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$, nous avons

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle_{V'xV}\, \phi(t)dt = \int_0^T \langle u'(t)\phi(t), v\rangle_{V'xV}\, dt = \langle \int_0^T \langle u'(t)\phi(t), v\rangle_{V'xV}\, dt\rangle_{v'xv} = -\langle \int_0^T \langle u'(t)\phi(t), v\rangle \quad dt\rangle_{v'xv} \tag{1.1.15}$$

$$= -\int_0^T \langle u'(t)\phi(t), v\rangle_{V'xV}\, dt\ \forall \phi \mathfrak{D}'(]0, T[)$$

Mais $u(t) \in \boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \Longrightarrow u(t) \in \boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{H}'\ \forall t \in]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[\ et\ v \in \boldsymbol{V} \Longrightarrow v \in \boldsymbol{H} \Longrightarrow \langle u(t), v\rangle_H, \langle *,* \rangle$ étant un produit scalaire dans $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'$ alors $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \hookrightarrow \boldsymbol{V}'$ avec une inclusion continue, v étant dense dans H 1.1.17, d'où, de 1.1.15 et 1.1.16, $\forall \phi \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$,

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{V}}\, \phi(t)dt = -\int_0^T \langle u(t), v\rangle_{\boldsymbol{H}}\, \phi'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{\boldsymbol{H}}\, \phi(t)dt$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \left[\langle u'(t), v\rangle_{V'xV} - \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{\boldsymbol{H}}\right] \phi(t)dt = 0\ \forall \phi \mathfrak{D} \quad (]0, T[)$$

$$\Longrightarrow \langle \langle u'(t), v\rangle_{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{V}} - \frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{\boldsymbol{H}}, \phi\ \rangle_{\mathfrak{D}'(]0,T[)*\mathfrak{D}\quad(]0,T[)} \Longrightarrow \forall \phi \mathfrak{D} \quad (]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$$

$$\Longrightarrow \langle u'(*), v\rangle_{V'xV} - \frac{d}{dt}\langle u(*), v\rangle_H \Longrightarrow \forall \phi \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$$

$$\Longrightarrow \langle u'(*), v\rangle_{V'xV} = \frac{d}{dt}\langle u(*), v\rangle_H \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$$

ESPACE DE HILBERT $\mathbb{W}_2(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V})$ [3][6],[17]

DÉFINITION 1.1.3.

Soit **V** un espace Hilbert séparable tel que $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \to \boldsymbol{V}'$ avec une inclusion dense et continue 1.1.5 et 1.1.6.

Alors pour $0 < T < \infty$, $\mathbb{W}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V})$ un espace linéaire,

$$\mathbb{W}_2(0, T; V) = \left\{u : u \in \mathbb{L}^2(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V}), \frac{d^2u}{dt^2} \in \mathbb{L}^2(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V})\right\}$$

ayant la norme $\|*\|_{\mathbb{W}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V})}$ définie par (1.1.18)

$$\|u\|_{\mathbb{W}_2(0,T;V)} = (\|u\|^2{}_{\mathbb{L}^2(0,T;V)} + \left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2{}_{\mathbb{L}^2(0,T;V)})^{1/2} \tag{1.1.19}$$

Où $\int_0^T \frac{d^2u}{dt^2}(t)\phi(t)dt = \int_0^T u(t)\frac{d^2\phi}{dt^2}(t)dt\ \ \forall \phi \in \mathfrak{D}'(]\mathbf{0}, \boldsymbol{T}[)$

THÉORÈME 1.1.2

$\mathbb{W}_2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ défini par 1.1.18 et 1.1.19 est un espace de Hilbert.

PREUVE

La preuve est similaire à celle de $\mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$. Elle est obtenue par remplacement de u'_n par u''_n et v_1 par v_2, $\frac{du}{dt}\ par\ \frac{d^2u}{dt^2}$, etc. Ainsi se termine la preuve.

REMARQUE 1.1.2

$\mathbb{W}_2(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ est utilisé pour l'étude des équations d'évolution du type hyperbolique.

DENSITÉ ET INCLUSION

Nous retenons ici quelques résultats importants sans leurs preuves.

THÉORÈME 1.1.3 [DENSITÉ]

Soient **V, W** deux espaces de Banach séparables avec $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$, l'inclusion étant dense et continue de **V** dans **W**. Soit l'espace $\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$ défini aux 1.1.1 et 1.1.4

Soit

$$\mathcal{D}(]O,T[) \equiv C^{\infty}(]O,T[,V) = \{\phi : \phi \in C^{k}(]O,T[,V) \forall k \in \mathbb{N}\} \qquad (1.1.20)$$

Alternativement, $\mathcal{D}(]O,T[) = \{\phi : \exists \psi \in \mathcal{D}(]O,\infty[,V)\}$ à support compact dans $\mathbb{R}$, $\phi = \psi \downharpoonleft_{[0,T]}$ (1.1.21)

Alors $\mathcal{D}([0,T];\ V)$ est dense dans $\mathbb{E}(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}, \mathbb{W})$

THÉORÈME 1.1.4 [DENSITÉ]

$\mathcal{D}([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T}];\ \boldsymbol{V})$ défini au 1.1.20 est dense dans $\mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ (respectivement $\mathbb{W}_2(0,T;V)$) défini au 1.1.7 et 1.1.8 (respectivement 1.1.18 et 1.1.19.

THÉORÈME 1.1.5

Soient **H, V** deux espaces de Hilbert séparables avec $V \to H = H' \to V'$ (voire 1.1.6). Alors $\mathbb{W}_1(0,T;V) \longrightarrow C^0(]O,T[,H)$, c'est-à-dire $u \in \mathbb{W}_1(0,T;V)$, $\exists v \in C^0(]O,T[;H)$ tel que *v=u* sur $]\boldsymbol{O},\boldsymbol{T}[$ et $\exists C > 0$ tel que $\|u\|_{C^0(]O,T[,H)} \le C\|u\|_{\mathbb{W}_1(0,T;V)}$ (1.1.21)

COROLLAIRE 1.1.1

Pour $u \in \mathbb{W}_1(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{T}; \boldsymbol{V}) \to C^0(]\boldsymbol{O}, \boldsymbol{T}[;\ \boldsymbol{H})$ avec $[0,T]C[0,+\infty[, u(0) \in H, u(t) \in H$ appelée traces de u. (1.1.23)

De même nous retenons le résultat sans preuve.

La relation $u \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}) \to u(0) \in H$ est une surjection de $\mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ dans H. (1.1.24)

FORMULE DE GREEN [6] [18] [13] [12] [10] [1]

THÉORÈME 1.1.6

Soient **V, H** deux espaces de Hilbert séparables tels que V soit un sous espace de **H et** $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' \to \boldsymbol{V}'$**,** l'inclusion étant continue. Pour $u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V})$ avec $[0,T]C[0,+\infty[$, la formule suivante est dite de GREEN :

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'xV}\, dt + \int_0^T \langle u(t), v'(t)\rangle_{V'xV}\, dt = \langle u(T), v(T)\rangle_H - \langle u(0), v(0)\rangle_{\boldsymbol{H}} \qquad (1.1.25)$$

où $\langle *,* \rangle_{V*V'}$ (respectivement $\langle *,* \rangle_{V*V'}$) est la dualité entre **V'** et **V** (respectivement **V** et **V'**), $\langle *,* \rangle_{\boldsymbol{H}}$ le produit scalaire dans l'espace de Hilbert **H**.

PREUVE [6]

Les relations :

$$f_1 : t \in]0,T[\to \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'xV} = f_1(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}) \qquad (1.1.26)$$

$$f_2 : t \in]0,T[\to \langle u(t), v'(t)\rangle_{VxV'} = f_2(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}) \qquad (1.1.27)$$

$\forall u, v \in \mathbb{W}_1(0;T;V)$

De 1.1.23, $u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}) \Rightarrow u(0), v(0) \in H\ et\ u(t), v(t) \in H$

De la définition 1.1.2, $u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}) u \Longrightarrow, v \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V})$ et $u', v' \in \mathbb{L}^2(\mathbb{O}, \mathbb{T}, \mathbb{V}')$

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'*V}\, dt \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^T \langle u(t), v'(t)\rangle_{V'*V}\, dt \in \mathbb{R} \qquad (1.1.27)$$

Aussi, de 1.1.20 et 1.1.21

$$u, v \ \in \mathcal{D}([0,T], V) \Rightarrow u^k(t), v^k(t) \ \in V \to H, \forall k \in N, \forall t \in [0,T]$$

D'où, $\forall u, v \ \in \mathcal{D}([0,T], V)$

$$\langle u(t), v'(t)\rangle_{V'XV} = \langle u'(t), v(t)\rangle_{\boldsymbol{H}} \qquad (1.1.28)$$

$$\langle u(t), v'(t)\rangle_{VXV'} = \langle u(t), v'(t)\rangle_{\boldsymbol{H}}$$

et : $\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_H \, dt + \int_0^T \langle u(t), v'(t)\rangle_H \, dt = \int_0^T [\langle u(t), v(t)\rangle_H + \langle u(t), v(t)\rangle_H] dt$

$=\int_0^T \frac{d}{dt}[\langle u(t), v(t)\rangle_H]\, dt = \langle u(t), v(t)\rangle_H|_0^T = \langle u(T), v(T)\rangle_H - \langle u(0), v(0)\rangle_H$ 1.1.29

Mais $\mathcal{D}([0,T], V)$ est dense dans $\mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$ par le théorème 1.1.4 et $\mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}) \to C^0(]O,T[, H)$ par le théorème 1.1.5.

D'où, $\forall u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V}), u(T), v(T), u(0), v(0) \in H$ et la fonctionnelle bilinéaire continue s'annulant sur $(\mathcal{D}([0,T];\ V))^2$, c'est-à-dire

$(u,v) \in (\mathcal{D}([0,T], V))^2 \to \left[\int_0^T [\langle u(t), v'(t)\rangle_H + \langle u'(t), v(t)\rangle_H\right] dt - \langle u(T), v(T)\rangle_H + \langle u(0), v(0)\rangle_H] = 0$ et peut être prolongée par à une fonctionnelle bilinéaire continue s'annulant sur

$\mathbb{W}_1(0,T;V)x\mathbb{W}_1(0,T;V)$ c'est-à-dire $\forall u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$,

$$\left[\int_0^T [\langle u(t), v'(t)\rangle_H + \langle u'(t), v(t)\rangle_H\right] dt - \langle u(T), v(T)\rangle_H + \langle u(0), v(0)\rangle_H] = 0 \qquad (1.1.31)$$

$\langle u'(t), v(t)\rangle_H$ (respectivement $\langle u'(t), v(t)\rangle_H$) est identifiée avec $\langle u'(t), v(t)\rangle_{V'xV}$ (respectivement $\langle u'(t), v(t)\rangle_{V'xV}$) (1.1.32).

En vertu de l'inclusion continue $V \to H = H' \to V'$ et la densité de V dans H.

Alors le résultat 1.1.25 suit 1.1.31 $\forall u, v \in \mathbb{W}_1(\mathbb{O}, \mathbb{T}; \mathbb{V})$.

REFERENCES

[1] L.Schawrtz, 1966, théorie des distributions, Hermans, Paris.
[2] L.Schawrtz, 1967, Distributions à valeurs vectorielles, Ann de l'Inst Fourier, Paris.
[3] R.A.Adams, 1975, Sobolev Spaces, Academic Press, New York
[4] O.Pironneau, 1988, Méthodes des éléments finis pour les fluides, Masson, Paris.
[5] L.Tatar, 1978, Topics in Non Linear Analysis, Publication livre Math. D'Orsay. Dept de Math.Orsay.France : Université de Paris-Sud.
[6] P.K. Bhahacharryya, 2012, Distributions-Generalized functions with applications en Sobolev Spaces, De Gruyter. Germany.
[7] H. Brezis, 1983, Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications, Masson, Paris.
[8] R.M. Dudley, 2002, Real Analysis and Probability, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
[9] W. Rudin, 1991, Functionnal Analysis, Mc Graw Hill, USA.
[10] L. Schawrtz, 1966, Théorie des Distributions, Hermann, Paris.
[11] E. Roubine, 1990, Distribution-Signal, Eyrolles.
[12] C. Zuily, 2010, Problèmes de Distributions, Cassini.
[13] C. Zuily, 2010, Distributions et Equations aux dérivées partielles, Hermann, Paris.
[14] R. Courant, D, Hilbert, 1975, Methods of Mathematical Physics, Vol2, Wiley Eastern Private Ltd, New Delphi.
[15] C. Berg, JP. R. Christensen, P. Ressel, 1984, Harmonic Analysis on Semigroup, Spring Verlay, New York.
[16] C. Gasquet, Witomski, 1990, Fourier analysis and Applications, Springer-Verlag, New York.
[17] B. Fuglede, F. Topsoe, Jensen-Shannon, 2003, Divergence and Helbert Space Embedding, Preprint.
[18] I.M. Gelfand, G.E. Chilov, 1975, Les distributions (4 volumes), Dunod, Paris
[19] A. Berlinet, C. Thomas-Argan, 2004, Reproducting Kernel Hilbert Spaces in Probability And Statictics, Kluwer academic Publishers, London, UK
[20] T. LindVall, 1992, Lectures onthe Coupling method, John Wiley & Sons, New York
[21] J.C Nedlec, 1966, Notions sur les Equations Intégrales de la Physique : Théorie et approximation Palaiseau, France : Centre de Mathématique Appliquées
[22] F. Trèves, 2007, Topological vector spaces, Distributions and Kernels, Dover Publications Inc.
[23] C.A Micchelli, Y. Xu, H. Zhang, 2006, Universal Kernels, Journals of Machine Learning Research