International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 3 Oct. 2017, pp. 492-498

http://www.ijias.issr-journals.org/

UN NOUVEL ALGORITHME POUR RESOUDRE LE PROBLEME DU FLOT FLOU MAXIMAL

***Fernand MAMANYA TAPASA*[1] *and Rostin MABELA MAKENGO*[2]**

[1]Assistant, Université Pédagogique Nationale, Département de Mathématique et Informatique, RD Congo

[2]Professeur, Université de Kinshasa, Département de Mathématique-Informatique, RD Congo

ABSTRACT: In this article, we first present a theory cadre about the fuzzy flow and we propose a variant of the algorithm of Ford and Fulkerson which permits to calculate the maximal fuzzy flow.

KEYWORDS: maximal fuzzy flow, algorithm.

RESUME: Dans cet article, nous présentons d'abord un cadre théorique sur le flot flou et proposons une variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson qui permet de calculer le flot flou maximal.

MOTS-CLEFS: flot flou maximal, algorithme.

1 INTRODUCTION

C'est depuis la deuxième moitié du siècle passé, que Ford et Fulkerson ont développé le célèbre algorithme pour résoudre le problème de flot maximal en environnement classique ou déterministe[$Mamanya$ 2012].

Dans la pratique, la plupart des variables utilisées dans un tel environnement ne sont pas mesurées exactement ou de façon précise. C'est le cas des urgences sur les routes, le temps de parcours, le prix du carburant, le nombre de véhicules, le nombre d'accidents,…d'un réseau de transport.

De telles variables sont dites « variables vagues » ou « variables imprécises » ou « variables floues ». Elles font appel aux ensembles flous et aux nombres flous de Zadeh, [$Dubois, D; Prades, H$ 1980] qui permettent de mieux modéliser les imprécisions.

Dans la littérature, le problème de flot flou maximal est moins étudié [*Bozhenyuk, A et al.*]. [Kumar, A and Kaur, M.2013], proposent un nouvel algorithme pour résoudre le problème du plus court chemin en environnement flou .C'est la méthode de comparaison des nombres flous. [Bagherian 2012], propose une approche du réseau résiduel flou pouvant supporter le flot du cout minimum. [Shengwei Han, Zixiong Peng et Shunqin Wang 2013], présentent le concept de la fonction maximum d'écoulement et appliquent la théorie de l'incertitude au problème de flot maximal.

Cet article propose une variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson pour calculer le flot flou maximal. Nous considérons les arcs du graphe ayant les longueurs floues.

La méthodologie utilisée consistait à lire et à résumer les ouvrages ayant traits au flot maximal (flot flou maximal). Cette synthèse a permît d'élaborer la nouvelle variante.

Notre contribution dans cet article est d'avoir proposé cette variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson qui permet de calculer le flot flou maximal dans un réseau de transport flou. Quelques définitions sur le flot flou ont été proposées.

La structure de cet article se présente de la manière suivante :

Section 2 : Rappels de l'arithmétique floue,
Section 3 : Flot flou
Section 4 : Quelques définitions sur le flot flou maximal,
Section 5 : Enoncé du problème du flot flou maximal
Section 6 : Algorithme proposé
Section 7 : Exemple numérique.
Section 8 : Conclusion

2 ARITHMÉTIQUE SUR LES NOMBRES FLOUS

Nous recourons à l'addition, à la soustraction et à la comparaison des nombres flous triangulaires utiles dans cet article. Un nombre flou, est dit triangulaire s'il existe trois réels a, b, et c tq a$< b < c$, on a :

$$\mu_{\tilde{A}}=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}\ si\ a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}\ si\ b < x < c \\ \quad 0\end{cases} \tag{1}$$

Il est noté par $\tilde{A} = (a, b, c)$ où a et c sont les écarts respectivement à gauche et à droite et b la valeur centrale (le mode). L'arithmétique floue est basée sur deux approches :

- L'approche du principe d'extension de Zadeh dont les deux opérations citées ci-haut sont représentées dans le tableau 1.

Tableau 1 : Somme et différence de deux nombres flous triangulaires de type L-R

type	Somme de deux nombres flous triangulaires	Différence de deux nombres flous triangulaires
Triangulaire	(b +b', a+ a', c+c')$_{LR}$	(b-b', a+a', c+c')$_{LR}$

Source: Kampempe 2014, Dubois et Prade 1980 et Kaufmann 1973.

- Approche basée sur une arithmétique des α-coupes et intervalles :

On appelle $\alpha - coupe$ ou coupe de niveau α d'un sous-ensemble flou Ã, l'ensemble classique suivant$[Mukeba\ 2016]$:

$$\widetilde{A_\alpha} = \{x \in E/\mu_{(\tilde{A})}(x) \geq \alpha\}=[\alpha_1, \alpha_1]. \tag{2}$$

On définit l'opération $*$ entre deux nombres flous par :

$$[a_1, b_1] * [a_2, b_2]=[\min K, maxK] \tag{3}$$

$$\text{avec } K=[a_1 * b_{1,}, a_1 * b_2, b_1 * a_2, b_1 * b_2] \tag{4}$$

Dans la pratique, $[Mukeba\ 2016]$ propose le schéma suivant si on veut effectuer les quatre opérations fondamentales sur deux nombres flous pour l'approche des $\alpha - coupe\ et\ intervalle$:

<u>Etape 1 :</u> Défuzzyfication qui consiste à rendre non flou un nombre flou. C'est l'écrire sous forme d'intervalle de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{A_\alpha}=[(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c] \tag{5}$$

<u>Etape 2 :</u> calcul ordinaire : C'est l'application de la relation (3)

Pour + et -, on a :

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]\ et$$
$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2]$$

<u>Etape 3 :</u> Fuzzification : rendre flou le résultat obtenu en (3)

3 FLOT FLOU

Considérons le réseau de transport $\tilde{R}$=(X, $\tilde{K}, \tilde{C}$) où X est l'ensemble des nœuds du réseau, $\tilde{K}$=XxX, le produit cartésien de X dont les éléments sont des arcs flous et $\tilde{C}$ l'ensemble des capacités floues des arcs flous de $\tilde{R}$.

Soient deux nœuds de $\tilde{R}$: P_1 et P_N et appelons P_1 entrée et P_N sortie de $\tilde{R}$. Soient $\widetilde{E_\iota}$ l'ensemble de communications du réseau partant du point P_1 et $\widetilde{E'_\iota}$ l'ensemble des communications du réseau qui finissent au point P_N. Comme tous les arcs flous (arêtes) ont de noyaux positifs, $\tilde{R}$ est un réseau de transport flou. Une fonction $\widetilde{f_{\iota J}}$ = *$\tilde{x}(k_{ij})$,* définie sur l'ensemble $\tilde{K}$ satisfaisant aux conditions :

$$
\begin{cases}
\sum_{k_{ij}\in E_i} \tilde{x}\left(k_{ij}\right) - \sum_{k_{ji}} \tilde{x}\left(k_{ji}\right) = 0, \forall\, i \neq 1, N & (6)\\
\widetilde{x_1} = \sum_{k_{ij}\in E_i} \tilde{x}\left(k_{ij}\right) = -\widetilde{x_N}\ , i = 1\ ou\ i = N & (7)\\
0 \leq \tilde{x}\left(k_{ij}\right) \leq \tilde{c}\left(k_{ij}\right), k_{ij}\ \in \tilde{K} & (8)\\
\widetilde{x_{k_{\iota J}}}\ \geq 0 & (9)
\end{cases}
$$

s'appelle « flot flou » du *réseau* $\tilde{R}$(compatible avec la fonction $\tilde{C}$ (k_{ij}), $k_{ij} \in \tilde{K}$ et dirigé de P_1 vers P_N. la relation (6) indique que la somme de flots flous sortant à un nœud égale à la somme de flot flous entrant en ce même nœud. C'est le principe de conservation de flots flous, sauf pour les sommets entré et sortie du réseau.

La relation (7) indique que la valeur du flot sortant dans le réseau égale à l'opposée de valeur du flot entrant dans le réseau. Rien ne se perd pendant le transport de matières.

La relation (8) indique que la valeur du noyau du nombre flou représentant le flot flou est toujours supérieure ou égale à 0 et ne dépasse pas la valeur du noyau de la capacité de l'arc flou.

Dans la pratique, le flot flou peut signifier le temps, le coût, l'état de route, la quantité du carburant consommée entre deux arrêts en transitant sûrement sur d'autres, etc.

4 QUELQUES DEFINITIONS SUR LE FLOT FLOU MAXIMAL

- Un arc flou (i,j) est saturé si la valeur modale de sa capacité appelée « noyau du nombre flou » égale à la valeur modale(noyau) du flot qui le traverse.

Pour le nombre flou triangulaire : si la capacité de l'arc flou est $\tilde{C}$(i,j)=(a,b,c) et la valeur du flot flou est $\tilde{X}$(i,j)=(d,e,f) alors b=e, l'arc flou (i,j) est saturé.

- Un chemin flou saturé est celui qui contient au moins un arc flou saturé.
- Un flot flou est complet si tous les chemins flous quittant la source au puits sont saturés.

Pour saturer un arc flou ou un chemin flou, on ajoute à cet arc ou à ce chemin le flot flou résiduel de l'arc ou du chemin.

- Le flot flou résiduel d'un arc noté $\tilde{x}_r$(i,j) est égal à la différence de la capacité floue au flot flou de l'arc flou : $\tilde{x}_r$(i,j)=C(i,j) – x(i,j).
- Le flot flou résiduel ($\tilde{x}_r$) du chemin est le minimum des flots flous résiduels des arcs flous du chemin flou.
- Le graphe résiduel flou est celui qui contient les mêmes sommets que le graphe de départ et sans arcs flous saturés. Il comprend deux types d'arcs :
- arcs flous en sens direct (i,j) dont le flot flou est $\tilde{c}$(i,j)-$\tilde{x}$(i,j)
- arcs flous en sens indirect (j,i) dont le flot flou égal à la valeur modale de la capacité de l'arc (j,i) non nul.
- Un chemin flou augmentant est celui dont les valeurs modales des arcs flous en sens direct n'ont pas atteint leurs limites et les valeurs modales des arcs flous en sens indirect ont un flot (noyau) non nul qui le traverse. L'augmentation est le minimum des écarts entre le flot flou courant et les capacités pour les arcs flou en sens direct ou le flot flou courant pour les arcs en sens indirect.

5 ENONCE DU PROBLEME DE FLOT FLOU MAXIMAL

Connaissant les capacités des arcs d'un réseau de transport flou, le problème du flot flou maximal consiste à trouver la quantité maximale du flot flou qui peut circuler de la source au puits. L'algorithme le plus connu pour résoudre ce problème en mode déterministe est celui de Ford et Fulkerson, dont une variante en mode flou est présentée dans cet article.

6 ALGORITHME PROPOSÉ

Cet algorithme à trois étapes :

Etape 1 : Détermination du flot flou complet

-itération1 : recherche des chemins flous allant de la source au puits

-itération 2 : détermination de chemins flous saturés

-itération 3 : obtention du flot flou complet

Etape 2 : Construction du graphe résiduel flou

-itération 4 : calcul du flot flou résiduel

Itération 5 : détermination des chemins flous augmentant

Etape 3 : détermination du flot flou maximal

-Itération 6 : Existe-t-il de chemin augmentant entre la source et le puits ? Si oui

-itération 7 : Améliorée le flot flou sur le chemin augmentant

-Itération 8 : Marquer les sommets du chemin augmentant et atteindre le puits ;

-Itération 9 : obtenir le flot flou maximal

Fin.

7 EXEMPLE NUMÉRIQUE

Soit à déterminer le flot flou maximal du réseau de la figure n°1.

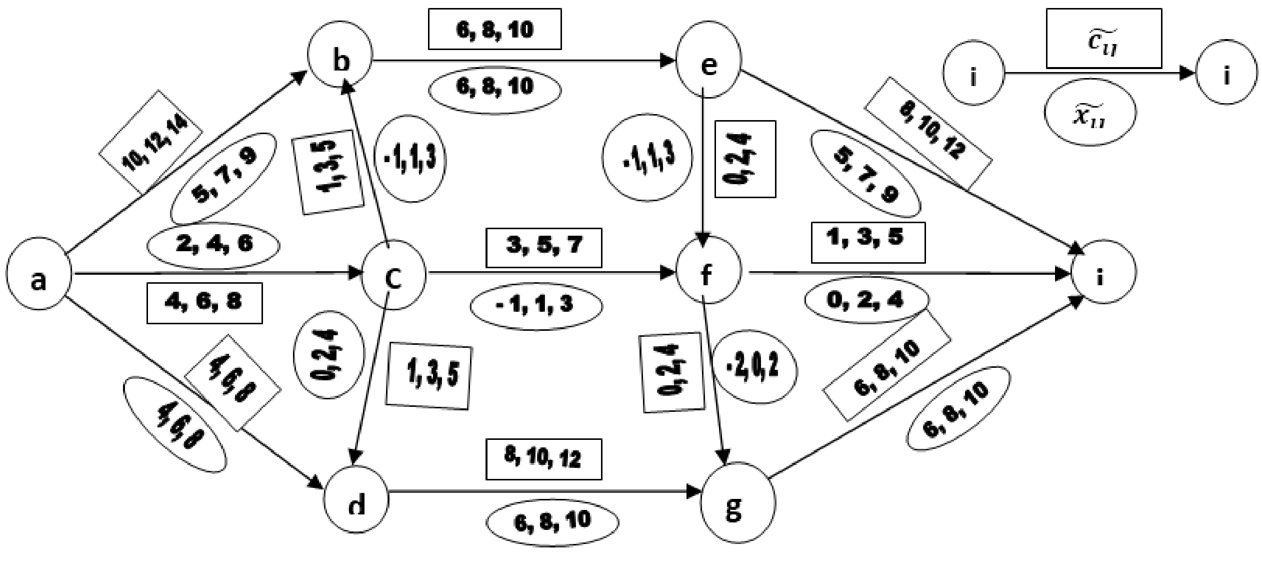

Figure n°1 : Réseau de transport capable de transporter les flots flous

La valeur du flot flou en entré = (11,17, 23)=la valeur du flot flou à la sortie. En chaque nœud du graphe, la somme de valeurs modales entrant= la somme de valeurs modales sortantes .Le principe de conservation de flot flou est respecté. Donc, le réseau en étude peut faire passer le flot flou.

Etape 1 : **Recherche de flot flou complet** :

-Recherche de chemins flous allant de a à I : a-b-e-i, a-c-f-i, a-c-d-g-i, a-c-f-g-i, a-d-g-i : six chemins.

-Détermination de chemins non saturés : un seul : a-c-f-i,

-Le flot en entré n'est pas complet,

-Saturation du chemin a-c-f-i :

a) On calcul le flot flou résiduel sur le chemin non saturé :

$\tilde{x}_r$=min$\{(4,6,8) - (2,4,6), (3,5,7) - (-1,1,3), (2,3,5) - (0,2,4\,)\}$

Le calcul se fait par approche des $\alpha - coupes$ et intervalle proposé par $[Mukeba\ 2016]$, et en utilisant l'approche max-min pour comparer les nombres flous.

$\tilde{x}_r$=min$\{(-2,2,6), (0,4,8), (-5,1,6)\} = \{(-5,1,6)\}$

On ajoute à tous les arcs du chemin a-c-f-i, le flot flou résiduel. Le graphe devient donc :

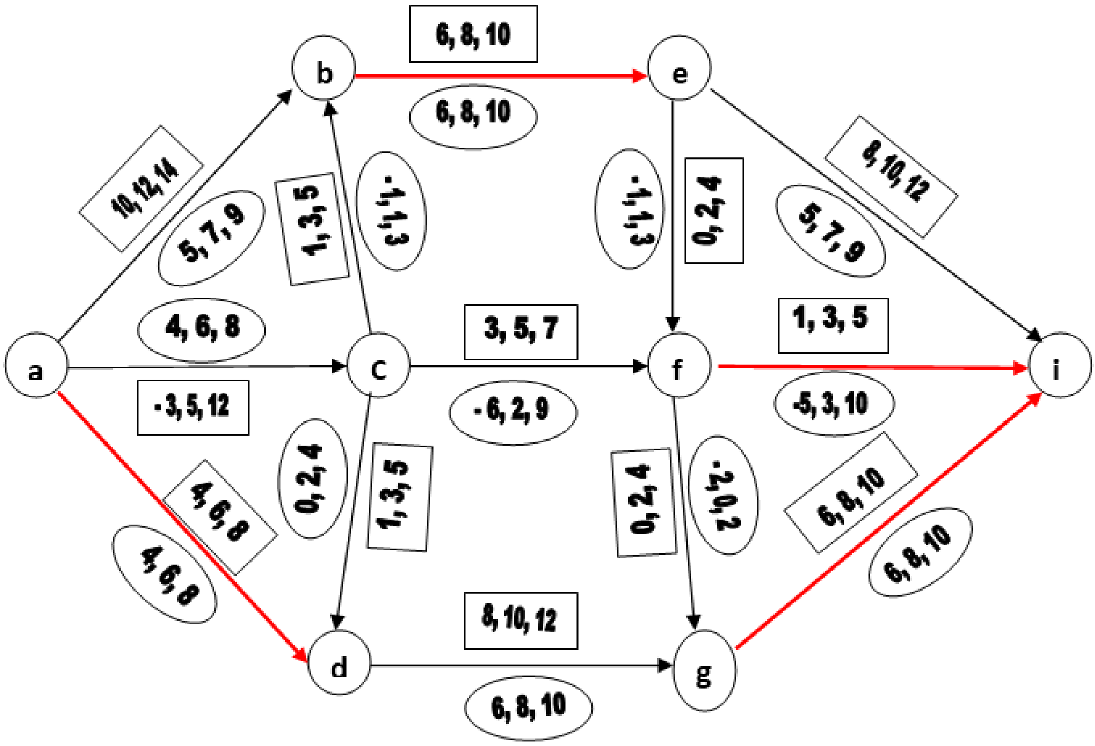

Figure n°2 : Réseau traduisant le flot flou complet

On remarque que la valeur du flot flou en entré=(6,18, 29)= la valeur du flot flou à la sortie.

On constate que tous les chemins allant de a à i sont saturés. Le flot flou est donc complet. Sa valeur est (6, 18, 29). Ce flot flou n'est pas nécessairement maximal.

Etape 2 : construction du graphe résiduel flou : Chemin augmentant et marquage.

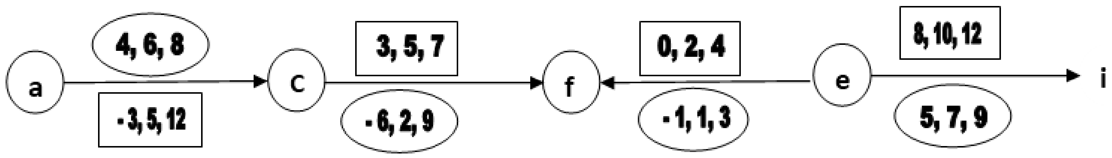

Figure n°3 : chemin à augmenter

Par marquage, nous cherchons le chemin augmentant de a à i.

On marque le nœud a, on écrit : a^+, puis on marque le nœud C, on écrit : c^+, on marque ensuite le nœud f, e et on atteint le nœud i, on écrit : f^+, e^+ et i^+.

Le flot flou complet n'est pas le flot flou maximal.

Etape 3 : Détermination du flot flou maximal :

Il s'agit d'amélioré le flot flou du chemin augmentant :a-c-f-e-i.

On calcule le flot flou résiduel du chemin a-c-f-e-i :

$\tilde{x}_r$=min$\{(4,6,8)-(-3,5,12),(3,5,7)-(-6,2,9),(0,2,4)-(-1,1,3),(8,10,12)-(5,7,9)\}$

$\tilde{x}_r$=min$\{(-8,1,11),(-6,3,13),(-3,1,5),(-1,1,7)\}$=$\{(-1,1,5)\}$

Nota : augmenter le flot flou sur l'arc indirect flou f-e signifie réduire. Le chemin devient donc :

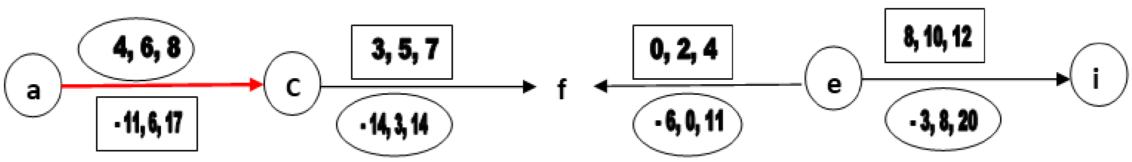

Figure n°4 : Chemin augmentant

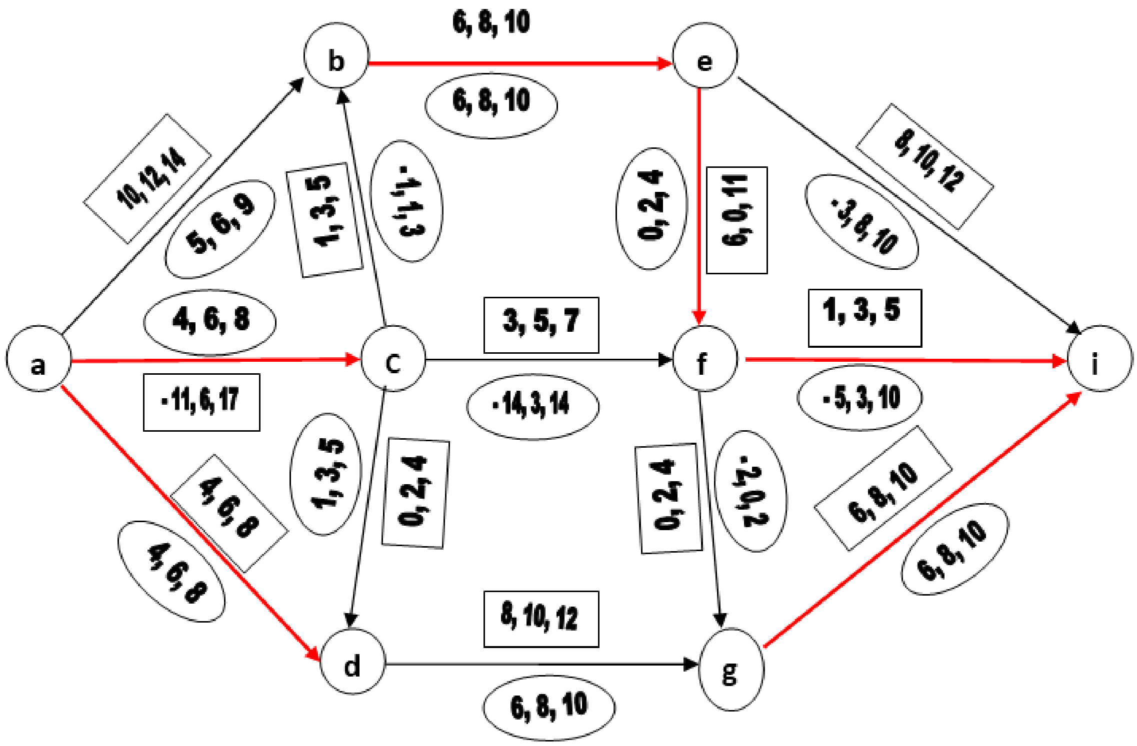

Figure n°5 : Réseau transportant le flot flou maximal

La valeur du flot flou en entré= (-2, 19,34)=la valeur du flot flou à la sortie. A chaque nœud, la somme de valeurs centrales du flot entrant égale à la somme de valeurs centrales des flots flous sortants. Le principe de conservation est respecté. Le flot flou maximal est donc (-2,19, 34).

Interprétation : le flot qui peut circuler dans ce réseau peut varier entre -2 à 34 c'est-à-dire sa petite valeur ne peut pas être inférieur à -2, sa valeur supérieure ne peut pas excéder à 34. Le flot flou maximal est environ (-2,19,34).

8 CONCLUSION

Cet article propose une variante de l'algorithme de Ford et Fulkrson en environnement flou. Nous l'avons appliqué avec les nombres flous triangulaires. L'introduction des nombres flous dans le calcul de flot maximal redonne à ce problème qui a déjà des nombreuses applications en mode déterministe, son sens réel et colle convenablement avec la réalité. Que les scientifiques élargissent l'horizon sur l'application du multiflot dans un réseau de transport flou, qu'ils généralisent le problème du multiflot fou et qu'ils appliquent le flou au calcul de multicoupe.

REFERENCES

[1] Bagherian, M. A Fuzzy Residual Network Approach to Minimum Cost Flow problem with Fuzzy parameters, ARPN Journal of Science and Technology, Vol. 2, No. 10, 2012.

[2] Bozhenyuk, A., Gerasimenko, E. and Rozenberg, I. The Methods of Maximum Flow and Minimum Cost flow Finding Fuzzy network, a forthcoming article, Russia.

[3] Dubois, D. and Prade,H. Fuzzy sets and systems: theory and Applications. Academic Press, New York, 1980.

[4] Kampempe, J.D. Sur la prise en compte de l'imprécision et de l'incertitude en programmation mathématique Multiobjectif, Thèse de Doctorat en sciences mathématiques, Université de Kinshasa, R.D. Congo, 2014

[5] Kaufmann, A. Introduction à la Théories de Sous-ensembles Flous à l'usage des Ingénieurs, Tome 1, Masson et cie, paris, 1973

[6] Kumar, A. and Kaur, M. A new Algorithm for Solving network flow problems with fuzzy lengths, Turkish Journal of Fuzzy Systems, vol. 2, No. 1, pp. 1-13, 2013.

[7] Mamanya Tapasa, F. Etude du Multiflot dans un Réseau de Transport. Cas de la ville province de Kinshasa, mémoire de DEA, Université Pédagogique Nationale, R.D.C, 2012

[8] Mukeba Kanyinda, J.P.Chaines de Markov Floues et Evaluation des Paramètres de Performance d'un Réseau de Files d'Attente Floues à Forme Produit, thèse de doctorat à l'Université pédagogique Nationale, Kinshasa, 2016.

[9] Mukeba, J.P.Application of L-R method to single server fuzzy retrial queue with patient customers, Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications, Volume 16, Number I, 2016, Pages 43-59

[10] Renfrey Potts, Robert. Flows in Transportation Network, Academic Press, New-York and London, 1972.