International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 4 Nov. 2017, pp. 640-655

http://www.ijias.issr-journals.org/

THEOREME DE GODEL

A.-Roger LULA BABOLE[1-2]

[1]Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

[2]Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

ABSTRACT: The GÖDEL's theorem is intrinsically a theorem of limitation of the formals systems. The theorem shows that the coherence of PEANO's arithmetic cannot be demonstrate by a simple way. This constitutes an opposite shock in metamathematic design in HILBERT's perspective. Finally, if we want a proof of arithmetic coherence, it is sufficient to approve the arbitrary notions the type of function and function of function, and that next to concretes symbols.

KEYWORDS: incompleteness, indecidability, demonstrability, truth, coherence.

RESUME: Le théorème de GÖDEL est intrinsèquement un théorème de limitation des systèmes formels. En tant que tel, il démontre que la cohérence de l'arithmétique de PEANO ne peut se montrer de façon élémentaire. Celui-ci constitue un contrecoup dans la métamathématique conçue dans la perspective hilbertienne : finitaire. Donc, si l'on veut une démonstration de la cohérence de l'arithmétique, il suffit d'admettre les notions abstraites du type de fonction et fonction de fonction, et cela à côté des symboles concrets.

MOTS-CLEFS: incomplétude, indécidabilité, démontrabilité, vérité, cohérence.

1 EXPOSÉ DE GÖDEL[1]

La preuve des théorèmes d'incomplétude de GÖDEL constitue un cas particulier d'une théorie axiomatique, qui repose sur le système formel des *Principia Mathematica* de RUSSELL et WHITEHEAD auquel GÖDEL a ajouté les axiomes de PEANO pour l'arithmétique et a, en outre, précisé que cette preuve reste valable pour un certain nombre de théories mathématiques. Au fond, les avancées en logique doivent permettre d'obtenir une preuve plus générale qui soit valable pour toutes les théories logico-mathématiques.

1.1 ENONCÉ DU THÉORÈME

Le système SFG contient une expression prédicative telle que $ni\ G$ ni $\neg G$ ne sont des propositions prouvables dans SFG. En d'autres termes, ce théorème peut être formulé comme suit :

Le système SFG contient une proposition fermée G qui est indécidable.

[1] *Nous nous inspirons largement de l'exposé de GÖDEL présenté par J. LADRIERE, Les limitations internes des formalismes, pp. 130-140.*

En clair, la proposition fermée G affirme sa propre indémontrabilité. Dans SFG, la proposition G représente l'énoncé métathéorique :

La proposition G est indémontrable dans SFG [9].

1.2 FONCTION ABRÉGÉE

Elle représente récursivement la substitution d'un chiffre à une autre variable du 1[er] type dans une proposition donnée. Supposons que A soit une proposition de SFG contenant la variable libre du type *x.* Et supposons que a soit le ndg de A et sachant que le ndg de x étant 17. Finalement supposer que Nn soit le chiffre représentant, dans SFG, l'entier *n*. Nous pouvons alors affirmer que le ndg de N_n est Ngd (N_n). Cela tient à des conventions relatives à l'arithmétisation récursive. De plus, le nombre N_n est toujours plus grand que n.

Illustrons cela par un exemple :

Ngd (N_o) =1, Ngd (N_1) =24, Ngd(N_2) =42.809.164.217.126.613.999.000.

Sur ce, il y a lieu de substituer N_n à x dans A, et cela va donner la proposition [x/N_n] A. Dans ce cas, on obtient Sub a 17 Ngd (N_n), c'est le Ndg de la nouvelle proposition. On voit dès lors être construite la fonction Sbs, de manière que cette transformation soit bien décrite. Nous pouvons la définir comme suit :

Sub x y =Sub x17 Ngd (N_y)

Si a est le Ndg d'une proposition de SFG et b, un certain nombre entier, alors on a Sbs a b =Sub a 17 Ngd (N_b).

Puisque la fonction de substitution Sub est récursive, de même sa fonction abrégée Sbs l'est également. Nous déduisons qu'elle est représentable dans SFG.

Ce qui nous amène à former Sbs a a.

Nous pouvons nous interroger sur la signification que revêt cette fonction, qui apparait complexe. Par définition, on a :

Subs a a=Sub 17 Ngd (Na).

1.3 CONSTRUCTION DE LA PROPORTION G

La propriété que nous devons prendre en considération est celle qui n'est pas une proposition prouvable.

Nous pouvons dire que GÖDEL a construit la formule $G\ (\forall k)\neg\ Dem\ (k, Sub(a, 13, a))$ obtenue, en remplaçant à la formule initiale de code n, à la variation y, le numéro 13 dans la relation.

Alors, le nombre de GÖDEL de G n'est autre que Sub (a, 13, a)=n

G a été obtenue en substituant a à y dans la formule portant le nombre de GÖDEL a, et Sub (a,13,a) est le nombre de GÖDEL de la formule obtenue en remplaçant a à 13, dans la formule portant le nombre de GÖDEL a, G est l'expression arithmétique de l'assertion métamathématique : « la formule qui porte le nombre de GÖDEL Sub (a, 13,a) n'est pas prouvable. Ainsi, GÖDEL a fidèlement construit une formule G, qui affirme d'elle-même qu'elle n'est pas prouvable [12].

Supposons que a soit le ndg d'une certaine proposition A de SFG. Dire que cette proposition est prouvable dans SFG, signifie qu'il existe une certaine suite de propositions, de ndgs, telle qu'on ait Rsa.

A *contrario,* une certaine proposition A n'est pas prouvable dans SFG, cela revient à dire qu'il n'y a aucune suite des propositions de SFG, qui forme une dérivation de cette proposition.

Ou encore, cela signifie que, quelle que soit la suite de propositions que l'on prend en compte, cette suite n'a pas la dérivation ou la démonstration de A.

Cet énoncé peut être exprimé arithmétiquement comme suit :

$\neg\forall x \neg \mathrm{R}\, xa$, qui signifie qu'il n'existe aucun nombre qui soit le ndg d'une suite des propositions qui forment une démonstration de A.

Si c'est le ndg qui est une suite de proposition Sp et a le ndg d'une proposition A, l'énoncé arithmétique $\neg \mathrm{Rs}a$ veut dire : *la suite Sp n'est pas une démonstration de A.*

Le prédicat R étant récursif, le prédicat $\hat{x}\hat{y}\ \ (\neg\ Rxy)$ l'est également.

Afin d'avoir une proposition appliquant cette propriété à elle-même, et de construire une proposition auto-référentielle, nous employons le même procédé qu'auparavant. Mais, étant donné que nous devrons introduire au préalable un quantificateur universel pour aboutir à la proposition attendue, il nous faudra procéder par étapes.

Construisons, comme suit, la forme de l'énoncé métathéorique :

La suite Ngd^{-1} (s) ne forme pas une démonstration de la proposition de SFG dont le ndg est Sbs aa.

On peut exprimer cet énoncé sous la forme d'un énoncé arithmétique A : $\neg\, Rs(Sbs\ aa)$.

Le prédicat $\hat{x}\hat{y}\ \ (\neg\, Rxy)$ est récursif et la fonction Sbs est également récursive. Au regard de ce théorème, l'énoncé A peut donc avoir été pris comme constitué d'un prédicat récursif appliqué aux deux entiers s et a.

Dès lors, il existe, en vertu du lemme de GÖDEL, une expression prédicative Q, de ndg SFG, qui contient deux variables libres x et y telle que :

1) ¬ Rs (Sbs a a) →Dem $[Subp\ 17\ 19\ Ngd(N_s)Ngd(N_a)]$(*)

et

2) Rs (Sbs a a) →Dem $[NegSubp\ 17\ 19\ Ngd(N_s)Ngd(N_a)]$ (**)

Dans ces énoncés métathéoriques, 17 et 19 sont les ndg respectivement des variables libres x et y. Ngd (N_s) et Ngd (N_a) sont les ndg des chiffres correspondant respectivement aux nombres entiers s et a.

Ce qui donne en effet :

Si l'énoncé A est vrai, alors la proposition fermée V (de SFG), obtenue en remplaçant dans Q, les variables libres x et y, respectivement par les chiffres $N_s\ \ et\ N_a$, est prouvable dans SFG, et si l'énoncé A n'est pas vrai, alors cette proposition fermée V est réfutable dans SFG.

L'expression prédicative Q contient deux variables libres x et y. Elle s'écrit comme suit :

Q (x,y).

La variable x peut être liée au quantificateur universel au nom de la variable en question. Ainsi, on a une expression prédicative L suivante :

(∀x) Q (x,y)

Soit q le ndg de cette expression.

D'une part, la quantification pratiquée sur Q(x,y) est récursivement représentable. Alors on a :

Q =Unv 17p

Notons qu'en effectuant la même opération sur la seconde variable représentative de Q(x,y), suite à une substitution remplaçant y par le chiffre de p qui correspond au nombre entier q, on a donc une expression prédicative W :

Q (x,N_q).

Soit r le ndg de cette expression.

Donc la substitution effectuée sur Q(x,y) est une opération récursivement représentable. D'où on obtient :

r=b sub p19 Ngd (N_q).

L'expression prédicative W contient encore une variable libre qui peut être liée à un quantificateur universel.

Ainsi, on a une proposition fermée G :

∀(x) Q (x,N_q)

Soit i le ndg de G

Alors on obtient

i= Unv 17 r.

1.4 PREUVE DE L'INDECIDABILITE DE G

''Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration'' [1].

A vrai dire, le théorème de GÖDEL est un métathéorème. Cela signifie qu'il est un théorème qui décrit une propriété particulière, à savoir l'incomplétude d'une théorie, l'arithmétique de PEANO[2].

Sa preuve exige qu'on se place dans une métathéorie, ce qui veut dire qu'il faut accepter les axiomes se trouvant aussi être, dans ce cas, l'arithmétique de PEANO. Au fond, un système formel beaucoup plus faible suffit dans la représentation de l'arithmétique de PEANO. En présentant des propositions indécidables à l'intérieur d'un système formel du genre des *Principia Mathematica*, on se rend compte que le phénomène d'incomplétude montre qu'il y a des énoncés reconnus comme étant valides à l'extérieur du système formel qui, par suite, seront formalisés par des formules indécidables.

G est prouvable si et seulement (¬G) est prouvable.

Cette expression signifie en d'autres termes que G n'est pas formellement prouvable. Nous pensons que cela consiste à prouver que : si G est prouvable, alors soit (¬G), cela signifie que ¬(∀x) ¬ Dem(x,Sub(a,13,a)) l'est également et ce de manière réciproque.

Au fond, nous estimons que ce n'est pas cette réciproque qu'établit effectivement GÖDEL.

A ce sujet, Barkley ROSSER estime que, pour la partie indirecte, le raisonnement en question est le suivant : si G est prouvable, alors il existe dans ce cas, une suite de formules à l'intérieur de l'arithmétique qui est une preuve de G.

Supposons que k soit le nombre de GÖDEL de cette preuve. Nous déduisons que le prédicat Dem(x,z) vaut entre k et Sub (a,13,a). Cela signifie en quelque sorte que Dem (k, Sub(a,13,a)) est donc une formule arithmétique vraie. Ce qui fait penser que ce prédicat arithmétique est tel que s'il vaut entre une certaine formule paire de nombre S, alors nous déduisons immédiatement que la formule qui exprime ce fait est prouvable.

Quant à la formule Dem (k, Sub(a,13,a)), nous pensons qu'elle est non seulement vraie, mais elle est également prouvable. En clair, elle est donc un théorème. Nous sommes arrivés à l'idée de penser que les règles de transformation de quantificateur qu'il soit universel ou qu'il soit existentiel, permettent de dériver le théorème ayant la formule : ¬(''x)¬Dem (x,Sub(a,13,a)), cela s'explique par le fait que la formule du théorème équivaut à Sx Dem (x,Sub, (a,13,a)). Ainsi, il est prouvé que si G est prouvable sa négation formelle l'est également.

Nous déduisons de cette démonstration ce qui suit :

- Si G est prouvable, sa négation formelle l'est également, sinon la théorie formalisée de l'arithmétique n'est pas consistante ;
- Si, au cas contraire, la théorie formalisée de l'arithmétique est consistante, alors dans ces conditions, la formule G n'est pas prouvable. Ce qui revient donc à dire que la formule G est indécidable [12].

Etablissons à présent le caractère *indécidable* de G. La preuve de la proposition indécidable comporte deux parties :

1. G est indémontrable

En effet, si G est prouvable, c'est-à-dire qu'il existe une certaine suite de propositions de SFG de ndg s, qui est une preuve de G. La condition posée peut être énoncée arithmétiquement comme suit : Rsi

Alors, en conformité avec l'énoncé…, on pourrait avoir :

Dem $[NegSubr\ 17\ Ngd(N_s)]$

Cela veut donc dire que la proposition dont le ndg est

Dem $[Neg\ Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s\ )]$, et est prouvable dans SFG.

[2] *Les métathéorèmes sont des théorèmes qui appartiennent à une métalangue et qui portent sur les propriétés logiques d'une langue-objet.*

Supposons cependant que G soit prouvable, Q $((N_s), (N_q))$ l'est aussi.

On utilise le 1er schéma pour le quantificateur universel pour obtenir en effet :

(x) Q $((N_s), (N_q) \rightarrow$ Q $(N_s), (N_q)$

Conformément à la règle de la conséquence, si G est démontrable, c'est-à-dire (x) Q *(x,*N_q) est prouvable et *Q* (N_s, N_q) l'est aussi. La proposition Q(N_s, N_q) est obtenue en substituant, dans l'expression prédicative W, le chiffre *N*$_s$ à la variable *x*.

Son ndg est donc : *Sub r 17 Ngd (N*$_s$*)*

On a:

$\mathrm{Ngd}^{-1}[NegSubr\ 17\ Ngd\ (N_s)] \leftrightarrow \neg Ngd^{-1}\ [Subr\ 17\ Ngd\ (N_s)]$

Donc on déduit à la fois dans SFG

$Ngd^{-1}\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)]$ ou Q $(N_s), (N_q)$

et $\neg Ngd^{-1}\ [Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_s)]$ ou $\neg$Q $(N_s), (N_q)$

Etant donné que SFG est cohérent, le résultat trouvé est donc impossible.

D'où nous affirmons que l'hypothèse ainsi émise est fausse et G est donc irréfutable.

2. *G est démontrable, pour dire que ¬G est indémontrable.*

Si en effet ¬ G est prouvable.

Dire que ¬ G est prouvable, cela signifie que¬ (x) Q(x, N_q) est prouvable.

D'autre part, conformément à la première partie, la preuve G est non prouvable. Autrement dit, il n'existe aucune suite des propositions de SFG qui forme une preuve de G. Cela peut être exprimé au moyen de l'énoncé arithmétique : $\forall x \neg$ R x i

Donc nous obtenons quel que soit n : ¬R m i

En vertu de l'énoncé… nous avons alors également, quel que soit n : Dem $[Sub\ r\ 17\ Ngd\ (N_n)]$ est prouvable dans SFG.

Pourtant cette proposition est la proposition fermée obtenue, en remplaçant dans Q, la variable x par le chiffreN_n, autrement dit : Q (N_s, N_q).

W est une expression prédicative qui contient une variable.

Nous pensons que cela nous conduit à affirmer à la fois :

a) Quel que soit l'entier $\underline{n}$, la proposition fermée

   Q (N_n, N_q), ou W (N_n) est prouvable dans SFG.

b) Proposition fermée ¬ (x) Q (x, N_q) ou ¬ (x) W (x) est prouvable dans SFG.

Puisque SFG est ω-cohérent, le résultat trouvé est intrinsèquement impossible. D'où nous affirmons que l'hypothèse ainsi émise est fausse et ¬ G n'est pas prouvable.

Il en résulte que G est effectivement une proposition indécidable ayant la forme (x) W (x) où W est une expression prédicative à une variable. (W est la proposition Q (x,N_q) contenant x comme seule variable libre).

G est donc une formule arithmétique vraie.

Nous affirmons ici que tout nombre naturel a une certaine propriété arithmétique bien déterminée. Elle est exactement définissable en procédant de façon directe par un raisonnement métamathématique. On obtient ce qui suit :

- L'arithmétique est une théorie consistante ou une théorie formelle consistante. Ce qui veut dire que l'on peut y prouver que l'assertion selon laquelle « la formule (''x) ¬ Dem(x,Sub(a,13,a)) n'est pas prouvable », est donc vraie.

Ainsi, l'assertion est telle qu'elle se représente à l'intérieur du codage par la formule qu'elle a eu à citer. Il est donc évident que les assertions métamathématiques sont codées de telle manière que nous puissions affirmer qu'aux assertions métamathématiques vraies, correspondent des formules arithmétiques vraies. Donc, une corrélation s'établit par la biunivocité partant du codage.

Dès lors, il est permis de déduire que la formule G, correspondant à une assertion métamathématique vraie, doit donc être aussi vraie.

1.5 Signification de la proposition G et remarques

La proposition G affirme sa propre *indémontrabilité*.

Dès lors effet, nous pouvons récapituler les différentes étapes relatives à la construction de la proposition G.

L'expression prédicative Q(x,y) représente, dans SFG, l'énoncé métathéorique.

¬Rx(Sbsxy)

L'expression prédicative L veut dire : (x)Q(x,y), représente, dans SFG, l'énoncé métathéorique.

∀x¬ Rx(Sbsyy)

Qui veut dire : il n'existe pas de preuve de la proposition dont le ndg est (Sbsyy), (ou encore, il n'existe pas de preuve de la proposition Ngd^{-1} (Sbsyy).

L'expression prédicative ω signifiant $Q(x, Nq)$ représente, dans SFG, l'énoncé métathéorique $\neg\ Rx\ (Sbsqq)$

Voulant dire que la suite des propositions $Ngd^{-1}\ (x)$ n'est pas une démonstration de la proposition $Ngd^{-1}\ (Sbsqq)$.

Finalement, la proposition fermée G, c'est-à-dire (x) Q(x,Nq), qui représente, dans SFG, l'énoncé métathéorique.

(∀x¬ R(Sbsqq)

Or, le ndg de G est en effet Sbsqq.

Et Sbsqq est le ndg de la proposition obtenue en remplaçant, dans la proposition Ngd^{-1} (q) (qui est supposée contenir la variable libre x), la variable x par le chiffre correspondant dans SFG du nombre entier q.

La proposition Ngd^{-1} (q), c'est L, et L contient la variable libre y, dont le ndg est 19.

En substituant Nq à y dans L, on a la proposition fermée

(x)Q(x,y), autrement dit, on a la proposition G.

De manière directe, il y a lieu de prouver que

Sbsqq = i

En effet, on a défini Sbs par :

Sbsqq = Sub q 19 Ngd (Nq)

Or q = Unv17p

Il en résulte que

Sbsqq = Sub (Unv17p) 19Ngd (Nq)

Etant donné que les symboles Sub et Unv ne portent pas sur les mêmes variables, nous pouvons ainsi les échanger sans difficulté. Soit une proposition A qui contient les variables libres $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Et soit a le ndg de A et u_1, $u_2,\ldots,u_n$ les ndg des variables x_1, $x_2,\ldots,x_u$.

Construisons, ci-dessous, la proposition ∀x ∀xa :

Son ndg est Unv u_1a.

Elle contient encore les variables libres $x_2,\ldots,x_n$ et elle s'écrit : $\forall_x$ a(x_1, $x_2\ldots\ldots x_n$).

En substituant aux variables $x_2\ldots\ x_n$, les expressions $u_2\ldots.u_n$ dont les ndg sont $e_2\ldots\ e_n$. On a une proposition dont le ndg est Sub (unvu_1-a) $u_2\ldots u_n$ $e_2\ldots..e_n$.

Elle s'écrit : ∀x a (x,$u_2\ldots u_n$). La même proposition peut être obtenue d'une autre manière.

D'abord, on substitue les expressions $u_2 \ldots u_n$ aux variables $x_2 \ldots x_n$.

En effet, on a une proposition dont le ndg est fourni par Sub a $u_2 \ldots u_n\, e_2 \ldots e_n$.

Elle s'écrit comme suit : $a(x,u_2 \ldots u_n)$. On peut lier à présent la variable x au quantificateur universel. Ainsi, on a la proposition : $\forall_x\, a\,(x,u_2 \ldots u_n)$.

Son ndg est donné par

Unv_{u1} (Sub a $u_2, \ldots u_n e_2 \ldots e_n$)

On obtient donc :

Sub (Unv u1a) $u_2 \ldots u_n \ldots e^n{}_n$ = Sub (a $u_2, \ldots u_n e_2 \ldots e_n$)

Lorsque nous appliquons cette propriété, on trouve en effet :

Sbssqq = Unv17 (Sub p 19 Ngd(Nq))

= Unv 17r

= i

Donc Sbsqq est effectivement le ndg de la proposition G. Cela veut dire qu'il n'existe pas de démonstration, dans SFG, de la proposition G. Nous avons ainsi établi la signification de G et nous affirmons donc que G est une proposition de SFG.

De ce qui précède, il est à remarquer

Sub p 1719 Ngd(N_1) Ngd(N_a) = Sub r 17 Ngd(N_s).

Il en résulte que les énoncés…(*) et (**) deviennent respectivement :

(1) ¬Rsi→Dem [Subr17Ngd (N_s)] (***)

(2) Rsi→Dem [Neg Subr17Ngd (N_s)] (****)

Aussi, peut-on retenir que [Sub r 17 Ngd(N_s)] est le ndg de la proposition fermée Q(Ns, Nq). Dans SFG, elle représente l'énoncé métathéorique¬ Rs(Sbsqq) qui veut dire que la suite des propositions Ngd^{-1}(s) n'est pas une démonstration de la proposition fermée Ngd^{-1}(Sbsqq). Cela signifie qu'elle ne prouve pas la proposition fermée Ngd^{-1}(s), c'est-à-dire la proposition G.

L'énoncé 1 (***) veut donc dire :

Si une suite des propositions Ngd^{-1} (s) n'est pas une démonstration de la proposition G, alors la proposition(1) représentant dans SFG l'énoncé *la suite Ngd^{-1} (s) n'est pas une démonstration de G,* est prouvable dans SFG.

Et l'énoncé 2 (****) signifie donc :

Si une suite des propositions Ngd^{-1}(s) est une démonstration de la proposition G, alors la proposition représentant dans SFG l'énoncé *la suite Ngd^{-1} (s) est une démonstration de G,* est non prouvable dans SFG.

Etant vrai et indécidable, le système formel qui en découle est nécessairement incomplet. Donc, ce système formel contient au moins un théorème non prouvable.

GÖDEL cherche si un système formel plus riche, découlant du système formel actuel par ajoute d'axiomes, qui permet à prouver la proposition indécidable précédente serait, lui aussi, complet. Ainsi, dans ce nouveau système formel, on aurait une autre proposition G', qui serait indécidable.

Le théorème d'indécidabilité de GÖDEL a ouvert une brèche au cœur même de la formalisation et du point de vue logique. Ce théorème montre que l'idéal du rationnel d'une théorie absolument prouvable est logiquement impossible. Cela débouche sur l'idée que la preuve de la consistance du système formel, peut se faire éventuellement en ayant recours à un méta système qui comporte des procédés de preuve qui sont extérieurs au système.

Avec TARSKI, nous disons que « Toutes les propositions construites selon la méthode de GÖDEL, ont une propriété telle qu'on peut, sur le terrain de la méta-science d'un ordre supérieur, à condition qu'elle possède une définition correcte de la vérité, constater si elles sont vraies ou fausses et trouver ainsi par rapport à ces propositions une décision » [10].

En clair, on peut dépasser ou même transcender une incertitude ou une contradiction, lorsqu'on forme un méta-système. Cela signifie que le méta-système est appelé à embrasser en son sein, le système ou la théorie mais il doit au même moment, ou en plus être doté de plus de potentialités ou de variables d'ordre supérieur ; il doit donc inclure en lui les termes et une problématique logique offrant, du point de vue logique, la définition de la vérité pour le système ou théorie-objet ainsi considéré.

Devant la richesse d'un système formel qui comprend au moins l'addition et la multiplication des nombres naturels, ainsi que les règles de déduction et de syntaxes moins contraignantes du système de départ, on aura évidemment toujours au moins une proposition indécidable. Donc, le système formel sera toujours incomplet [2].

Etablissant la relation entre complétude et arrêt d'un programme, TURING a prouvé, en 1936, son théorème, qui s'énonce en ces termes :

« Il n'existe pas d'algorithme général permettant, au vu du texte d'un programme quelconque, de savoir s'il s'arrête ou s'il calcule indéfiniment sans jamais s'arrêter » [10].

Généralement, le théorème de TURING prouve que pour savoir si un programme s'arrête et donc fournit son résultat, on doit impérativement l'exécuter et, si cette exécution dure plus que le temps à admettre, s'il n'est pas possible de savoir s'il s'arrête, il n'est pas possible non plus de connaître son résultat.

On le sait, un programme est une suite d'instructions écrites en langage informatique, dont l'ensemble des instructions et règles de calcul est donc un système formel. Réciproquement, on notera que tout système axiomatique peut être traduit en un programme à partir duquel, il sera possible avec un ordinateur de déduire, de manière automatique, tous les théorèmes éventuels et ce, par combinaison d'un nombre croissant de déductions. Donc l'exécution d'un programme est une suite de propositions syntaxiquement correctes de ce système axiomatique, et cette exécution est une preuve de son résultat.

Si ce résultat est obtenu en un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire d'instructions exécutées et cela en un temps fini, le programme s'arrête.

Par définition, dans un système axiomatique complet, toute proposition est décidable en un nombre fini d'étapes, d'après lesquelles il est possible de déterminer si elle est vraie ou fausse. Du fait que le théorème de TURING montre qu'on n'est pas, au vu d'une proposition ou du raisonnement programmé qui y conduit, en mesure de déterminer un algorithme général, si ce programme s'arrête. Donc on a des propositions pour lesquelles on n'a pas d'algorithme qui s'arrête, et qui sont dans ce cas indécidables. Cela amène à affirmer que le théorème de TURING entraîne donc l'incomplétude de GÖDEL [10].

INCOMPLETUDE DE L'ARITHMETIQUE

A propos de l'incomplétude de l'arithmétique formelle, une croyance largement répandue à l'époque, voulait que les propriétés vraies soient prouvables. Le théorème de GÖDEL est catégorique. Cela veut dire qu'il existe des propositions indécidables ; ce qui laisse entendre que la prouvabilité formelle n'épuise pas le concept de vérité logico-mathématique. Donc, le programme hilbertien d'une preuve de cohérence pour les axiomes de l'arithmétique est réfuté.

Rappelons que les axiomes d'un système déductif sont complets, si et seulement si, on se rend compte que toute assertion vraie, qui s'exprime dans ce système, est formellement déductible à partir des axiomes ; sinon on affirmerait que le système d'axiomes en question est incomplet.

Pourtant nous savons que GÖDEL a construit une assertion métamathématique vraie à laquelle est associée une formule arithmétique. Disons que ni cette assertion ni celle qui correspond à la négation de cette assertion ne soit prouvable à l'intérieur de son système de codage. Cela signifie clairement que GÖDEL a construit une proposition à la fois vraie et indémontrable, donc indécidable.

La raison fondamentale à évoquer est que la formule G œuvre sans qu'elle soit déductible.

Alors que les axiomes de l'arithmétique, supposés consistants, sont donc incomplets ; d'où il n'est pas possible de déduire de ces axiomes toutes les vérités arithmétiques. En ce sens que ces axiomes sont essentiellement incomplets ou l'arithmétique est essentiellement incomplète. Même si nous admettons les axiomes supplémentaires qui permettent de dériver G ou de l'exclure comme axiome supplémentaire, il serait à ce niveau possible de construire une autre formule, vraie et indécidable, et suivant le même procédé.

Dans la théorie formalisée de l'arithmétique, la prouvabilité de : « si l'arithmétique est consistante, alors elle est incomplète » indique, avons-nous dit, de manière analogue que, GÖDEL construit une formule arithmétique A, qui représente l'assertion métamathématique : « arithmétique est consistante ».

Il prouve

1) Que la formule ''A→G'' est prouvable

2) Que A n'est pas démontrable.

La consistance de l'arithmétique ne peut être établie par un raisonnement susceptible d'être représenté dans la théorie formalisée de l'arithmétique.

Il est à remarquer que ce résultat de GÖDEL n'exclut pas la possibilité d'une démonstration métamathématique de la consistance de l'arithmétique. Ce qui exclut, la possibilité de le faire dans un système formel [12].

2 THEOREME DE GÖDEL ET INTERPRETATIONS

Etant donné que les fonctions et prédicats dans SFG sont représentables, les formules suivantes $D(x_1, x_2)$ et $Dem_S(x_1, x_2)$ les représentent formellement.

2.1 D'APRÈS MENDELSON (NEIL KENNEDY) [3]

- **Le premier théorème d'incomplétude**

En 1934, CARNAP a fait remarquer dans « la syntaxe logique du langage » qu'un des ingrédients essentiels à la preuve des théorèmes de GÖDEL était l'idée de point fixe ou de diagonalisation[3]. Cette notion a la forme du théorème suivant :

- **Théorème du point fixe**

Pour toute formule $A(x_1)$ de SFG d'une seule variable libre x_1, il existe une formule close β telle que :

$\vdash_S ß \Rightarrow A(\ulcorner ß \urcorner)$

Où $\ulcorner \beta \urcorner$ signifie $\overline{\Gamma(ß)}$, ce symbole représente le nombre de GÖDEL de ß.

D'abord, on définit la formule comme $\forall x_2(Ɗ(x_1,x_2) \rightarrow A(x_2))$ où $Ɗ(x_1,x_2)$ est la formule représentant la fonction récursive δ(x).

Ensuite, on pose $\forall x_2(Ɗ(\ulcorner c \urcorner, x_2) \rightarrow A(x_2))$.

D'une manière intuitive, on voit que β se présente comme $\neg A(\delta(\alpha))$ où $a=\Gamma(A(x_1))$.

Appliqué à la formule $\forall x_2 \neg Ɗem_S(x_1,x_2)$, on voit clairement que le premier théorème d'incomplétude est le résultat de l'application du théorème du point fixe.

❒ PREMIER THEOREME D'INCOMPLETUDE

Si SFG est ω-cohérente alors $\nvdash_s \mathcal{G}$ et $\nvdash_s \neg\mathcal{G}$.

Preuve : D'abord supposons que $\vdash_s \mathcal{G}$. Donc, on a un nombre n tel que $Dem_S(n,g)$ où $g = \Gamma(\mathcal{G})$.

Etant donné que $Dem_S(x,y)$ est représentable, on obtient $\mathrm{Dem}_S\left(\overline{n}, \overline{g}\right)$, ce qui signifie $\vdash_S Dem_S(\bar{n}, \Gamma_{\mathcal{G}}{}^{\pi})$. Etant donné également que $\mathcal{G}$ est le point fixe de $\forall x_2 \neg Ɗem_S(x_2,x_1)$, on a que $\vdash_s \mathcal{G}$ entraîne $\neg\forall x_2 \vdash_s Ɗem_S(x_2, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. Mais ici, on obtient $\mathrm{Dem}_S\left(\overline{n}, \overline{g}\right)$ aussi, contredisant la ω-cohérence de S. Finalement, on obtient $\neg\mathcal{G} \vdash_s$

Ensuite, supposons que $\neg\mathcal{G}$. Pour la première partie de cette démonstration, on a que $\neg Dem_S$(n,g) pour tout n. Etant donné que Dem_S(x,y) est représentable, on obtient $\neg Dem$ (n,g) pour tout n. Etant donné que Dem_S (x,y) est représentable, on a que $\neg Dem_S$(n,g) pour tout n. Mais de $\forall x_2 \neg Dem_S (x_2,\bar{y})$, ce qui contredit alors l'ω-cohérence de s^n et finalement $\neg\mathcal{G}$.

---

[3]*Du point de vue de la formalisation, J.-Y. GIRARD ramène l'argument diagonal à la recherche d'un point fixe. Souvent, cet argument est utilisé avec un raisonnement par l'absurde. De même, il est utilisé « positivement » aux fins d'établir une preuve constructiviste.*

Comme on le sait, ROSSER a généralisé les hypothèses de ce théorème réduisant l'ω-cohérence à la cohérence seule pour obtenir le résultat tant généralisé.

❒ THEOREME DE GÖDEL – ROSSER

Si SFG est cohérente, alors il existe une formule close $\mathfrak{R}$ telle que $\mathfrak{R}$. La formule $\mathfrak{R}$ s'obtient par l'application du théorème du point fixe à une certaine formule. Pour la définir, il faut d'abord se rappeler que la fonction Neg(x) – comprise comme valeur le nombre de GÖDEL de la négation de l'expression dont le nombre de GÖDEL est x - est récursive.

De ce fait, il existe une formule Neg(x_1, x_2) de SFG qui est sa représentation. La formule est donc

$$\forall x_2(\mathrm{Dem}_S(x_2, x_1) \to \forall x_3(\mathrm{Neg}(x_1, x_2) \to \exists x_4(x_4 \leq x_2 \wedge \mathrm{Dem}_S(x_4, x_3)))$$

A la suite de NEIL KENNEDY [13], on peut généraliser certaines données. Soit SFG une théorie avec égalité qui possède les mêmes symboles que SFG. Si la fonction δ(x) est représentable dans SFG, alors le théorème du point fixe est valide pour SFG. De plus, si :

1. $\mathrm{Dem}_K(x,y)$ est un prédicat récursif ;
2. $\vdash_K 0 \neq 1$;
3. Et toute fonction récursive est représentable dans SFG, alors le premier théorème d'incomplétude tient également pour SFG.

Pour prouver la version généralisée de ROSSER, il faut exiger en plus que, pour tout K.

$$\vdash_K x_1 \leq \bar{n} \Rightarrow (0 \vee x_1\bar{1} \vee \ldots x_1 = \bar{n}) \text{ et } \vdash_K x_1 \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x_1$$

Le premier théorème d'incomplétude étant démontré par l'arithmétique, il nous revient donc de constater que ce système est un exemple de systèmes incomplets axiomatisables par un nombre fini d'axiomes et cela à l'opposé de SFG qui, à cause de l'axiome d'induction, a un nombre infini d'axiomes. D'où, on peut prouver le théorème d'incomplétude dans toute extension récursivement axiomatisable de PA^-, en d'autres termes, une extension de PA^-.

D'où, il y a lieu d'utiliser l'arithmétique qui possède l'axiome d'induction. En effet, l'arithmétique de PRESBURG est l'arithmétique additive. Elle s'obtient de PA quand on supprime les axiomes (Ax7), (Ax8) et le symbole de fonction « . ».

❒ LE DEUXIEME THEOREME DE GÖDEL

Comme on le sait, une théorie SFG est cohérente si, pour toute formule A de SFG, on n'a pas A et $\vdash_K \neg A$. Autrement dit $\vdash_K \forall_K A$ et $\forall_K \neg A$.

En réduisant cette condition, il ressort que toutes les formules de K sont prouvables dès qu'une seule formule et sa négation le sont. Certes, si A est la seule formule qui est, telle que A et $\vdash_K \neg A$, alors étant donné que $\vdash_K \neg A \to (A \to B)$. On en déduit que $\vdash_K \ \vdash_K B$ et ce, qu'elle soit la formule B. La condition de cohérence de SFG est donc réduite à « non A ou non$\neg A$ » pour une des formules A.

En considérant la formule $\vdash_K \neg 0 = 1$, étant donné qu'on n'a eu que $\vdash_K 0 \neq 1$, la cohérence de SFG est réduite à $\vdash_K 0 = 1$ suivant des moyens arithmétiques. En arithmétisant alors la métamathématique, le problème est formulé de la manière suivante :

Preuve: $\forall x_1 \neg \mathrm{Dem}_s(x_1, \ulcorner 0 \urcorner)$ dans SFG signifie arriver à démontrer $\vdash_K \forall x_1 \neg \mathrm{Dem}_s(x_1, \ulcorner 0 \urcorner)$. Pour le second théorème, il est donc impossible que $\forall x_1 \neg \mathrm{Dem}_S(x_1, \ulcorner 0{=}1 \urcorner)$ est non prouvable ou S indécidable dans SFG, désigné par Cohs, la formule $\forall x_1 \neg \mathrm{Dem}_S(x_1, \ulcorner 0 \urcorner)$.

La preuve de ce théorème nous oblige d'abord à faire un détour par les propriétés générales d'un prédicat de prouvabilité. Soit $\mathcal{P}r(x_1)$ la formule $\exists x_2 \mathrm{Dém}_S(x_2, x_1)$. Prouvons que le prédicat $\mathcal{P}r(x_1)$ satisfait les conditions de dérivabilité de HILBERT-BERNAYS.

(HB1) Si A $\vdash_S$ alors $\vdash_S \mathcal{P}r(\ulcorner A \urcorner)$;

(HB2) $\vdash_S \mathcal{P}r(\ulcorner (A \to B) \urcorner) \to (\mathcal{P}r(\ulcorner A \urcorner) \to \mathcal{P}r(\ulcorner B \urcorner))$;

(HB3) $\vdash_S \mathcal{P}r(\ulcorner A \urcorner) \to \mathcal{P}r(\ulcorner \mathcal{P}r(\ulcorner A \urcorner) \urcorner)$.

La preuve du second théorème d'incomplétude est rendue facilement traitable par l'utilisation de ces propriétés. Pour y arriver, il importe de prouver au préalable le théorème de LÖB.

Le théorème de LÖB permet de répondre à une question concernant le point fixe de Ƥr(x_1). Si 'H est un point fixe de Ƥr(x_1), 'H est alors prouvable quand 'H affirme sa propre prouvabilité. A la question ''Est-il prouvable ?''. LÖB répond par l'affirmative, en précisant ce qui suit :

❒ THEOREME DE LÖB

Si 'H est une formule close telle que $\vdash_S$ Ƥr(⌜'H⌝) $\rightarrow$ 'H alors $\vdash_S$ 'H.

❒ DEUXIEME THEOREME D'INCOMPLETUDE

Si S est cohérente, alors $\vdash_S$ cohs.

❒ PREUVE

Déjà, on a obtenu $\vdash$ $0 \neq 1$. Par la cohérence de S, on a que $\forall 0 \neq 1$. Par le théorème, on sait que $\vdash_S$ Ƥr(0=1) $\Rightarrow$ 0=1 entraîne $\vdash_S$ 0=1 ; donc $\vdash_S$ Ƥr(0=1) $\Rightarrow$ 0=1.

Si $\vdash_S$ ¬Ƥr(0=1), par le fait que $\vdash_S$ ¬Ƥr(0=1)$\Rightarrow$ (Ƥr(0=1) $\Rightarrow$0=1(une instance de tautologie), on obtiendrait $\vdash_S$ 0=1 ; donc $\vdash_S$ ¬Ƥr(0=1) aussi. Mais ¬Ƥr(0=1) est certes cohs. On obtient ainsi $\vdash_S$ Coh_S.

Donc, la formule Coh_S est indécidable dans SFG.

2.2 D'APRÈS J.-YVES GIRARD [11]

❒ LE PREMIER THEOREME

La démontrabilité dans SFG est l'énoncé expansif par excellence : « il existe une preuve de … dans SFG ».

A l'opposé, la non-prouvabilité et particulièrement la cohérence de SFG sont récessives. On le sait, la cohérence est le fait que l'absurdité (ou encore $0 \neq 0$) n'est pas prouvable dans SFG.

L'énoncé de GÖDEL G s'obtient par une technique de diagonalisation. En effet, cela veut dire simplement : « je ne suis pas prouvable dans SFG ». Il est donc un énoncé récessif. Si G était prouvable dans SFG, alors G serait faux et sa négation ¬G, expansive et vraie, serait prouvable dans SFG. SFG démontrant G et ¬G serait donc contradictoire.

❒ THEOREME 1 (PREMIER THEOREME D'INCOMPLETUDE)

Si SFG est « suffisamment expressive » et cohérente, alors il y a un énoncé G, qui est vrai, mais pas prouvable dans SFG.

Dans ce contexte, on parle d'un énoncé indécidable (ni prouvable, ni réfutable) dans SFG, aux fins d'éviter la mention relative à la notion épistémologiquement suspecte de vérité.

La version originale de GÖDEL (énoncé indécidable) est formalisée avec une hypothèse sur SFG plus forte que la simple cohérence fournie par la variante de ROSSER (1936). Cela signifie que la variante de G de ROSSER n'est ni prouvable, ni réfutable. Mais il s'agit de la généralisation de la notion de cohérence.

❒ LE SECOND THEOREME

Le premier théorème d'incomplétude montre rigoureusement que si SFG est cohérente, alors G n'est pas prouvable dans SFG, et cela dans le formalisme de l'arithmétique de ROBINSON. SFG prouve en effet formellement que la cohérence de SFG notée Coh(SFG), implique la non-prouvabilité de G, c'est-à-dire G.

Cela signifie que SFG prouve l'implication logique Coh(SFG)$\rightarrow$G ; ne démontrant pas G, il ne prouve pas Coh(SFG).

❒ THEOREME 2 (SECOND THEOREME D'INCOMPLETUDE)

Si SFG est « suffisamment expressive » et cohérente, alors SFG ne prouve pas sa propre cohérence.

Quelques remarques s'imposent pour la compréhension de ce théorème :

i. L'idée du « suffisamment expressif » ne signifie pas la même chose dans les deux théorèmes.

Pour le premier théorème, cette idée a très peu de pouvoir expressif dans SFG. Elle sert à pouvoir décalquer un calcul pas à pas.

Pour le second théorème, par contre, l'idée en question a beaucoup plus de pouvoir expressif. Ici, il est possible de produire les raisonnements (très simples) du théorème 1. Au fond, SFG doit permettre des raisonnements par induction sur des énoncés de structure assez simple. C'est l'arithmétique de PEANO qui sert de base théorique pour le second théorème d'incomplétude.

ii. Le second théorème est moins profond que le premier. En clair, ce théorème taille certes rasibus le programme HILBERT. On doit reconnaître que le premier théorème est aussi radical, et d'ailleurs, il est de portée plus générale.

2.3 D'APRÈS DECONINCK MATTHIEU

Le premier théorème d'incomplétude s'énonce comme suit :

❒ **THEOREME G1**

Si SFG est ω-cohérent, il existe un prédicat récursif $R(x_1)$ dans SFG d'une variable libre x et de ndg r telle:

$\neg \mathrm{Dem}_K(\text{Gén}(17,r))$ et $\neg \mathrm{Dem}_K(\mathrm{Neg}(\mathrm{Gen}(17,r)))$ alors $\mathrm{Gen}(17,r)))$ est indécidable.

❒ **PREUVE**

L'idée de la preuve consiste à l'aide du théorème du sens, d'exhiber un prédicat récursif $R(x_1)$ qui dira, par un processus d'autoréférence, qu'il n'est pas prouvable.

Soit Q le prédicat récursif défini sur $\mathbb{N}x\mathbb{N}$ par $Q(x,y) \leftrightarrow \neg \mathrm{Dem}_K(x, \mathrm{Sub}(y,19,N(y)))$.

x_1 est une variable de SFG tandis que x est une variable du métalangage de SFG.

Par le théorème du sens, il existe un prédicat de SFG dont le ndg est q avec les variables libres x_1 et x_2 (de ndg 17 et 19, respectivement) vérifiant, $\forall(x,y) \in \mathbb{N}^2$:

(i). $\neg$ Dem_K(x, Sub(y), 19, N(y))$\rightarrow$ Dem_K(Sub(q ;17, N(x) ; 19, (N(y)))) ;

(ii). Dem_K(x, Sub(y, 19, N(y))) $\rightarrow$ Dem_K(Neg(Sub(q ;17, N(x) ; 19, (N(y))))

Où (Sub(q :17, N(x) ; 19, (N(y))) est le résultat de la substitution des variables 17 et 19 par les termes N(x) et N(y).

D'où :

(iii). p = Gen(17, q)$\cong$ r = Sub(q,19(P)).

Il est à noter que l'égalité (iii) se justifie par le fait que la *généralisation* par rapport à une variable et la *substitution* d'un prédicat à une variable sont des opérations qui commutent sur l'ensemble de formules.

Montrons à présent que ni r ni Neg(r) ne sont K-prouvables. La preuve de G1 comporte deux parties :

1. r n'est pas k-prouvable

Si r était k-prouvable comme r = Sub(q,19(p)), on aurait un x_0 tel $\neg Q(x_0, n)$.

Donc d'après (ii)

Dem_K(Neg(Sub(q ;17, N(x_0) ; 19, (N(n)))))

Donc Dem_K(Neg(Sub(q :17, N(x_0))))

Il est remarqué que la prouvabilité de r implique être k-prouvable ; or cette déduction entre en contradiction avec la consistance (et donc l'ω-consistance) de k, puisque r = 17 Gen q est k-prouvable, on voit que l'axiome de substitution nous amène à considérer que Sub(q :17, N(x_0)) est k-prouvable. Donc r n'est pas k-prouvable.

2. Neg(r) n'est pas k-prouvable

Sachant que r n'est pas k-prouvable. Puisque r = Sub(q,19(p)) et ∀x∈ N tel que Q(x,n). Donc d'après (i), on obtient ∀x tel que Dem_K(Neg(q :17, N(x_0))), ce qui avec l'ω-consistance montre que r = Gen(17,q) n'est pas k-prouvable.

Il est à remarquer qu'il est possible de refaire le schéma de cette preuve en considérant Q(y) = Dem(Sub(y, 19, N(y))) et en supposant que le prédicat y → Dem (= être prouvable) est donc récursif. Cette éventualité amène à une contradiction. D'où y→ Dem y n'est pas récursive.

L'indécidabilité du premier théorème d'incomplétude Gen(17,r) dépend de l'hypothèse de ω-cohérence de SFG. On peut se passer de cette hypothèse en utilisant une astuce proposée par ROSSER et qui consiste à réduire cette hypothèse à la cohérence de SFG seulement.

3. Théorème de G-R

Si SFG est cohérent, il existe un prédicat récursif R(x_1) de SFG d'une variable libre x_1 et de nombre de GÖDEL r tel que¬Dem_K(Gen(17, r)) et ¬Dem_K(Neg(Gen(17, r))). Alors Gen(17,r) est indécidable.

La variante de ROSSER utilise les mêmes outils logiques en substituant la formule Q(x,y) par la formule R(x,y) définie comme suit :

R(x,y) ≡Dem_K(x, Sub(y,19,N(y))) →∃z(z≤x∧Dem_K(z, Neg(Sub(y,19,N(y))))).

En clair, R(x,y) est équivalent à : si x est le ndg d'une preuve de la formule dont le ndg est Sub(y, 19, N(y)), dans ce cas, il existe z tel que z est le ndg d'une preuve de la formule dont le ndg est Neg(Sub(y,19,N(y))) et z étant un nombre plus petit que x.

La variante de ROSSER résout un petit problème laissé ouvert par GÖDEL à savoir l'hypothèse de 1-cohérence (ou ω-cohérence) nécessaire pour prouver que ¬G n'est pas démontrable [8].

Cela signifie que l'hypothèse de 1-cohérence nécessaire pour prouver que ¬G est indémontrable.

Etant contraignant, SFG ne démontre A que si¬A n'a pas été démontré dans SFG avec une preuve de ndg plus petit. Cela veut donc dire que Dem'(m,n) : = Dem (m,n) ∧ ∀p <¬ Dem (Neg (⌜m⌝),⌜p⌝), avec Neg (A = A) . Nous supposons que SFG est cohérente ; il va s'en dire qu'il n'y a pas de différence entre SFG et sa version bridée qui a contraint SFG.

Aussi, la version bridée reste-t-elle expansive, puisqu'elle est différente de la version « normale » par une quantification bornée ?

En effet, du point de vue formel, SFG prouve, pour chaque énoncé A indémontrable dans SFG et pour chaque entrée *n* l'énoncé :

Dem (⌜$\bar{A}$⌝ ,⌜$\bar{n}$⌝) →¬ Dem' ⌜(Ax)⌝ .

On voit que le dernier axiome de P$\bar{A}$ signifie $x < \bar{n}$v$x = \bar{n}$v$\bar{n} < x$, où il donne $x = \bar{0}$v$x = \bar{1}$v...vx = $\bar{n}$v$\bar{n} < x$ et la procédure se poursuit cas par cas.

Soit R l'énoncé de ROSSER ou l'énoncé de GÖDEL du système bridé. Nous constatons qu'il n'y a aucune différence significative en cas de prouvabilité. Cela signifie donc que l'énoncé de ROSSER est indémontrable.

Cela signifie que l'énoncé de ROSSER est vrai, si ¬ R est prouvable avec un nombre de GÖDEL ou une démonstration de code n, cette supposition est, en effet, prouvable dans SFG. D'où, dans SFG, on conclut ∀x¬ Dem'($-_{R^{\neg}}x$), l'indémontrabilité bridée de R ou R est indémontrable. Donc ¬R est non prouvable.

De ce résultat, on peut affirmer que la variante de ROSSER est un système paraconsistant. Pour J.-Y. GIRARD, ''cette manière de choisir, entre A et ¬ A, n'a évidemment aucun sens déductif, puisque, par rapport à la moindre conséquence logique, cette plus petite démonstration risque de changer de bord'' [4]. Il poursuit : ''l'astuce de ROSSER qui se décline en techniques variées pour représenter les fonctions etc. dans le cas de théories infidèles''.

Soulignons que dans « Du Concept de Conséquence Logique », TARSKI en 1936 cherche à fonder la logique à travers son approche sémantique de conséquence logique. D'une manière concrète, il critique l'analyse syntaxique du concept de conséquence logique à l'aide de ω-incomplétude et pourtant l'analyse sémantique courante pour la logique du premier ordre est, d'une manière extensionnelle, équivalente à l'analyse syntaxique via le théorème de complétude forte, et cela aux fins de remédier aux défauts liés à l'analyse syntaxique, les logiques d'ordre supérieur prenant la tête en fondant le concept de conséquence sur son approche sémantique [14].

Le second théorème d'incomplétude donne un exemple explicite de formule non prouvable.

4. Théorème G2

Si SFG est cohérent, il n'existe pas de preuve de la cohérence de SFG dans SFG (ou formalisable dans SFG).

5. Preuve

La démonstration du second théorème d'incomplétude tient compte de quelques observations suivantes :

1. Dans la démonstration de G1, l'argument prouvant l'indémontrabilité de Gen(17, r) dépend uniquement de SFG ;
2. Cet argument est, semble-t-il, entièrement formalisable dans SFG par : $\mathrm{Coh}(k) \equiv \forall y \neg(\exists x \mathrm{dem}_K(x,y) \wedge \exists x \mathrm{Dem}_K(x, \mathrm{Neg}(y)))$.

Donc, d'après(2) $\mathrm{Coh}(k) \rightarrow \forall x \neg \mathrm{Dem}_K(x,\mathrm{Gen}(17,r))$. Sachant que Sub(p,19,N(p)) = Gen(17,9,19, N(p)) = Gén(17, Sub(q,19,N(p))) = Gen(17,r). En clair, on a Gen(17,r) = Sub(p,19,N(p)).

On déduit $\mathrm{Coh}(k) \rightarrow \forall x \neg\, \mathrm{Dem}_K(x, \mathrm{Sub}(p, 19, N(p)))$. Donc, on a $\mathrm{Coh}(k) \rightarrow \forall x Q(x,y)$ suivant la définition de la formule Q(x,y). Les méthodes de la preuve étant formalisables, et on pose c comme étant le ndg de Coh(k), c'est ainsi qu'on remarque que Gen(17,r) est, semble-t-il (*), le ndg de $\forall x Q(x,p)$, alors on obtient Imp(c, Gen(17,r)) est k-prouvable, donc $\mathrm{Dem}_K(\mathrm{Imp}(c, \mathrm{Gen}(17,r)))$. Si Coh(SFG) était prouvable, alors on aurait $\mathrm{Dem}_K(c)$ et par la règle de *Modus Ponens* $\mathrm{Dem}_K(\mathrm{Gen}(17,r))$, d'où la contradiction avec le premier théorème d'incomplétude. Donc, on obtient $\neg\mathrm{Dem}_K(c)$. Mais on sait que $\neg\mathrm{Dem}_K$ dit que la formule dont le ndg est < est non prouvable, entendu par ce ndg Coh(SFG). D'où on affirme que la cohérence de SFG est non prouvable dans SFG.

Le programme de HILBERT souffre plus de premier théorème d'incomplétude que du second théorème. Cette argumentation tient au fait que le premier théorème n'exclut pas seulement une formalisation complète des mathématiques mais met aussi en cause, la conservativité des mathématiques par rapport aux mathématiques dites finitistes. En effet, la vérité de la proposition finitiste correspondant à la formule φ du premier théorème d'incomplétude, ne peut être prouvée que par des méthodes qui dépassent les mathématiques finitistes codifiées dans l'arithmétique du PEANO.

En plus, ce théorème n'établit pas l'équivalence entre la conservativité et la consistance par le raisonnement signalé ci-haut, qui paraît avoir été celui de HILBERT.

La leçon à tirer du second théorème d'incomplétude est que les méthodes finitistes ne suffisent pas. En clair, elles ne sont pas en mesure de rendre formellement compte de la cohérence.

2.4 COMPARAISON DES APPROCHES

Nous nous proposons de comparer les différentes interprétations faites par des logiciens ci-haut étudiés en présentant les particularités au niveau des approches.

- MENDELSON construit et démontre le théorème de GÖDEL à partir de l'idée de diagonalisation. L'énoncé du théorème de GÖDEL est construit en mode conditionnel. La généralisation par ROSSER du théorème de GÖDEL se fait par la réduction de w-cohérence à la cohérence seule. La preuve de la version généralisée impose la condition suivante : pour tout K.

$$\vdash_{k} x_1 \leq \bar{n} \Rightarrow \left(0 \vee x_1 \bar{1} \vee \ldots x_1 = \bar{n}\right) \text{ et } \vdash_{k} x_1 \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x_1$$

MENDELSON démontre le second théorème en ayant recours à la preuve au préalable du théorème de LOB.

Nous ne partageons pas les points de Van HEIJE NOORT et NEIL KENNEDY, qui estiment prouver des failles dans la preuve de GÖDEL. Comme nous avons démontré le contraire en nous inspirant de J. LADRIERE et J.Y. GIRARD. La preuve de GÖDEL ne comporte pas d'erreur technique et cela, c'est-à-dire, dans la confusion d'après Van HEIJENOORT: From to Gödel A Source Book in Mathematical Logic Cambridge (Mass) London: Harvard University Press 2002. et NEIL KENNEDY entre SFG et Π, c'est-à-dire entre langage SFG et métalangage Π.

- C'est dans la perspective de la logique linéaire qu'Yves GIRARD présente et démontre le théorème de GODEL en se servant des propriétés d'expansivité et de récessivité. Pour cet auteur, l'énoncé de GODEL G est obtenu par une technique de diagonalisation. Il est formulé en mode conditionnel : la variante de ROSSER est une généralisation de la notion de cohérence. Les deux théorèmes d'incomplétude sont expliqués en termes de cohérence avec nuance sur l'expression « suffisamment expressive ».
- DECONNINCK MATTHIEU présente et prouve le théorème de GODEL à l'aide du Lemme de GODEL ou théorème du sens en exhibant un prédicat récursif R(x1) en processus d'autoréférence. L'énoncé du théorème est formulé en mode conditionnel. L'auteur s'appuie sur les propriétés de l'arithmétisation de la syntaxe pour démontrer ce théorème. La variante de ROSSER utilise les mêmes outils logiques de ces propriétés.

3 CONCLUSION

Le premier théorème d'incomplétude de GÖDEL renseigne que la propriété du tiers exclu fait défaut à la prouvabilité dans des systèmes arithmétiques. Ainsi, il existe des formules vraies qui sont indémontrables (et des formules fausses qui sont irréfutables). Tel est le principal problème du théorème de GÖDEL.

L'idée de distinguer la prouvabilité de la vérité est perçue tardivement en logique. Jusqu'alors il y avait cette prémisse tacite en sciences mathématiques. On sait qu'une formule vraie est forcément prouvable et que sa vérité est liée à sa prouvabilité. Le premier théorème de GÖDEL et, par la suite, le théorème de TARSKI, ont fait tomber ce mythe mais l'étonnement est persistant. Cela s'explique par le fait que le système d'axiomes définissant l'arithmétique, semble partiellement modifié par une ontologie réaliste où le tiers exclu est valide. En d'autres termes, le théorème d'incomplétude de GÖDEL a montré que le programme de HILBERT ne peut pas se réaliser, étant donné que le prédicat « être prouvable » pour un système, est tel que celui de l'arithmétique élémentaire, n'est pas finitiste ou récursif [5].

Peu importe la formule Ƒ, l'expression ainsi obtenue $\vdash$ƑV¬ Ƒ, n'entraîne pas que $\vdash$ƑV $\vdash$¬Ƒ. De manière similaire, quand bien même on peut prouver que ¬¬Ƒ$\rightarrow$Ƒ, il n'est généralement pas possible d'avoir non - $\vdash$¬Ƒ qui entraine $\vdash$Ƒ. Finalement, utilisant des quantificateurs de $\vdash$Ƒ($\bar{n}$) pour tout n, cela n'entraîne pas toujours $\forall$xƑ(x) (SFG n'est pas ω-complète).

La preuve du premier théorème d'incomplétude donne ¬Dem(n,g), pour tout n (où g=Γ(ς). On a par représentabilité de Dem(x,y) $\vdash_S$¬Dem($\bar{n}$, $\bar{g}$) pour tout n. Mais, il n'est pas possible d'obtenir$\vdash_S \forall x_2$¬Dem(x_2, $\bar{g}$) n'eût été cela, on aurait $\vdash_S$ς. De ce même fait, on dit que le prédicat de prouvabilité. « $\vdash_S$ » n'exprime pas fidèlement la signification des opérateurs du langage-objet au métalangage. Donc, il apparaît une certaine opacité. Cela est une autre chose pour le prédicat de vérité qui est fidèle à la signification de « $\forall$ », « ¬ » et « $\rightarrow$ ».

A notre humble avis, nous estimons que c'est le premier théorème d'incomplétude qui met en effet en question, le programme métamathématique de HILBERT, et que le second théorème vient juste pour le perfectionnement. Donc, c'est le premier et non le second théorème, qui a eu à supprimer le programme de HILBERT [6].

Au vu des résultats d'incomplétude de GÖDEL, et en se libérant du fardeau Wittgensteinien à la faveur de la métaphysique kantienne, CARNAP estime, en rapport avec le premier théorème d'incomplétude, que la prouvabilité dans un système formel, constitue un critère insuffisant pour expliquer correctement la notion de vérité logico-mathématique [7]. Cela signifie donc que toute proposition vraie n'est pas nécessairement prouvable. C'est donc une séparation nette et distincte entre la vérité et la prouvabilité. On pourrait dire que le mécanisme de la raison humaine comporte les limites intrinsèques.

REFERENCES

[1] Aristote : *Les seconds analytiques* (Traduction et notes par TRICOT), Paris, Vrin, 1979, p.8.

[2] E. Nagel and J.R. NEWMANN: Gödel *Proof*, (éd) Douglas R. HOGSTANDTER, Edition révisée, New-York, New-York University Press 2001.

[3] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*, 3ième éd. Monterey (Califormier), Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.

[4] J-Y, Girard : Le Point Aveugle, Cours de logique. Tome 1 ; vers la perfection, Marseille, Institut de Mathématiques de Luminy, 1989.

[5] Jean LARGEAULT : *Logique mathématique*, *textes*, Paris : Armand Colin, 1972.

[6] M. Detlefsen, "On an Alleged Refutation of HILBERT's program using GÖDEL's First Incompleteness Theorem", Journal of Philosophical Logic, 19, pp.343-377, 1990.

[7] S. Awodey & A. W. Carus, From Wittgenstein's Prison to the Boundless ocean : Carnap's Dream of Logical Syntax, wagner, P. (ed), Carnap's Logical Syntax of Langage, Basingstoke, Pagrave Marcmillan, pp.79-108, 2009.

[8] K. GÖDEL, E. NAGEL, J.R. NEWMANN, et J.-Y. GIRARD, *Le théorème de GÔDEL, Source du savoir,Paris :Le Seuil,1989.Voir aussi J.-Y GIRARD ;Point Aveugle*, Tom 1. Vers la perfection.

[9] J. Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.

[10] A. Tarski, « La conception sémantique de la vérité », *logique, Sémantique, Métamathématique*, T.2, Paris, Armand-colin, pp265-305,1974.

[11] J.-Y. GIRARD : *Du pourquoi au comment : la théorie de la démonstration du programme de HILBERT à la logique linéaire*, leçons de mathématiques d'aujourd'hui, ads cassini, 2003.

[12] M.J. DURAND-RICHARD, *Des lois de la pensée à l'intelligence* artificielle (Paris : Université Paris 8 Vincennes Saint-Denis (Département de Mathématiques et d'histoires des sciences). Notes de cours [s.d], https://www.u-picardie.fr/~furst/docs/2-Aube_IA.pdf, (décembre 2013).

[13] N. Kennedy, *Recherches logiques et philosophiques sur le concept de métalangage*, Mémoire de Maîtrise en Philosophie, Montréal : Université du Québec à Montréal, août 2006. Voir aussi N. Kennedy, *Les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL : un guide de démonstration*.

[14] A. TARSKI, « Du Concept de Conséquence Logique », 1936, BONNAY, D & M. COZIX (dire) Philosophie de la logique. Conséquence preuve et vérité, Paris : Vrin, 89-97, 2009. Mais le calcul des séquents de GENTZEN nous présente une justification purement syntaxique des règles logiques. Là, on voit la complétude y apparaître comme une propriété interne, exprimée par l'élimination des coupures. Voir J-Y, GIRARD, « From Foundations ludics », *Bulletin of Symbolic Logic*, 9 (2), pp. 131-168, 2003.