International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 22 No. 1 Dec. 2017, pp. 1-11

http://www.ijias.issr-journals.org/

Enseignement et apprentissage de l'étude de fonctions rationnelles en 5^e scientifique et technique industrielle

MAKIADI NZUMBA José Modeste[1], MUSESA LANDA Alain[2], and NGILAMBI - te – AKONAMBI[3]

[1]Institut Supérieur Pédagogique et Technique de Kinshasa, RD Congo

[2]Université de Kinshasa, RD Congo

[3]Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, RD Congo

ABSTRACT: Cet article présente une ingénierie didactique pour l'enseignement et l'apprentissage de l'étude de fonctions rationnelles dans les classes de 5^e scientifique et technique industrielle.
Cette ingénierie fait suite à l'observation de classes et à l'analyse de l'enseignement de l'étude de fonctions rationnelles dans ces classes, que nous avons faites dans certaines écoles de la Ville de Kinshasa.
Une approche méthodologique est utilisée au niveau de l'enseignement pour faciliter les apprentissages et favoriser l'acquisition de connaissances afin que les élèves puissent étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

KEYWORDS: enseignement, apprentissage, étude de fonctions rationnelles, ingénierie didactique.

1 INTRODUCTION

Nous présentons dans ce travail, une ingénierie didactique pour enseigner et apprendre l'étude de fonctions rationnelles.

Pour élaborer cette ingénierie didactique, nous nous servons de quelques éléments de la théorie des situations didactiques de Guy BROUSSEAU et de la dialectique outil-objet de Régine DOUADY.

En effet, pendant la conception et la réalisation des séquences d'enseignement de l'ingénierie didactique sur l'étude de fonctions rationnelles, les notions mathématiques interviennent tantôt comme objets d'enseignement, tantôt comme outils pour résoudre certains problèmes.

Cet article cherche à répondre à la question suivante : comment doit se faire le processus d'enseignement et d'apprentissage de l'étude de fonctions rationnelles pour que les élèves puissent étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés ?

Pour ce faire, nous nous inspirons de Michèle ARTIGUE (1996), en utilisant la méthodologie d'ingénierie didactique qui consiste en la conception, la réalisation (ou l'expérimentation), l'observation et l'analyse des séquences d'enseignement et d'apprentissage de l'étude de fonctions rationnelles ainsi que des notions qui en constituent les étapes.

Nous concevons des situations didactiques (ou situations d'enseignement) permettant de construire des séquences d'enseignement et d'apprentissage des notions qui constituent les étapes de l'étude de fonctions rationnelles. Nous déterminons donc le contenu d'enseignement et la manière d'enseigner chacune de ces notions, en précisant ce que l'enseignant doit faire et ce que les élèves doivent faire pendant la leçon. En effet, en nous référant au contrat didactique, il y a ce que le professeur enseigne et la manière dont il doit l'enseigner, et ce que les élèves doivent savoir et comment ils doivent le savoir.

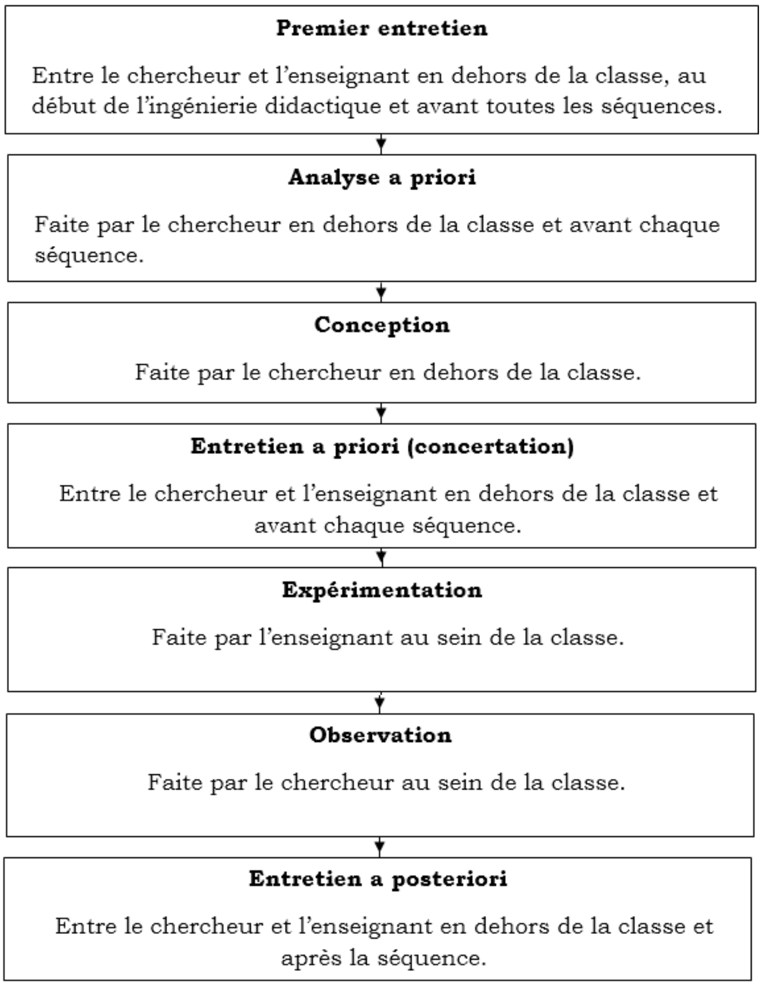
Pour chaque séquence d'enseignement, nous proposons une manière d'enseigner les notions qui constituent les étapes de l'étude de fonctions rationnelles dans le but de faciliter l'apprentissage de ces notions. En procédant ainsi, nous préparons petit à petit l'étude de fonctions rationnelles car, une bonne maîtrise de chacune de ces notions facilite l'étude de fonctions rationnelles qui en est la synthèse.

L'ingénierie didactique mise en place est une succession ou mieux un enchainement de situations d'enseignement et d'apprentissage pour permettre aux élèves d'étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

La réalisation de l'ingénierie didactique s'est faite dans 5 classes ordinaires de 5è[1] scientifique ou technique industrielle de 5 écoles différentes.

Soit un total de 236 élèves et 5 enseignants ont participé à l'expérimentation de notre ingénierie didactique.

Schéma de la mise en place de l'ingénierie didactique



[1] La classe de 5e secondaire en République Démocratique du Congo est l'avant-dernière classe dans l'enseignement secondaire.

↓

Analyse a posteriori et évaluation

Faite par le chercheur en dehors de la classe et après la séquence.

↓

Entretien final

Entre le chercheur et l'enseignant en dehors de la classe et après toutes les séquences.

↓

Analyse finale et évaluation globale

Faites par le chercheur en dehors de la classe et à la fin de l'ingénierie didactique.

2 DIFFÉRENTES SITUATIONS DIDACTIQUES

Nous mettons en place une ingénierie didactique en utilisant une approche par situations d'enseignement.

Ainsi, nous partons de la situation d'enseignement de l'étude d'une fonction rationnelle comme situation didactique principale (ou fondamentale).

A partir de cette situation didactique principale, nous construisons des séquences d'enseignement des notions qui constituent les étapes de l'étude de fonctions rationnelles. Chacune de ces séquences constitue une situation didactique (ou d'enseignement) secondaire.

Les situations didactiques secondaires mises successivement ensemble permettent de résoudre la situation didactique principale.

En effet, les différentes situations d'enseignement secondaires fournissent des moyens à mettre en œuvre, par les élèves, pour résoudre l'activité proposée dans la situation d'enseignement principale, qui est d'étudier une fonction rationnelle.

L'ingénierie didactique construite s'articule autour de la situation didactique principale car le but de ce travail est de permettre aux élèves d'étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

Les activités, à proposer aux élèves dans chaque séquence (ou situation didactique secondaire), se présentent sous forme des exercices (à résoudre en classe ou en dehors de la classe). En effet, Annick FLUCKIGER (2000, p9), dans sa thèse de doctorat, met en évidence la remarque des didacticiens des mathématiques qui ont montré que : « *l'accès de l'élève au sens des concepts se fait à travers son activité et non pas à partir d'un discours aussi parfait soit-il* ».

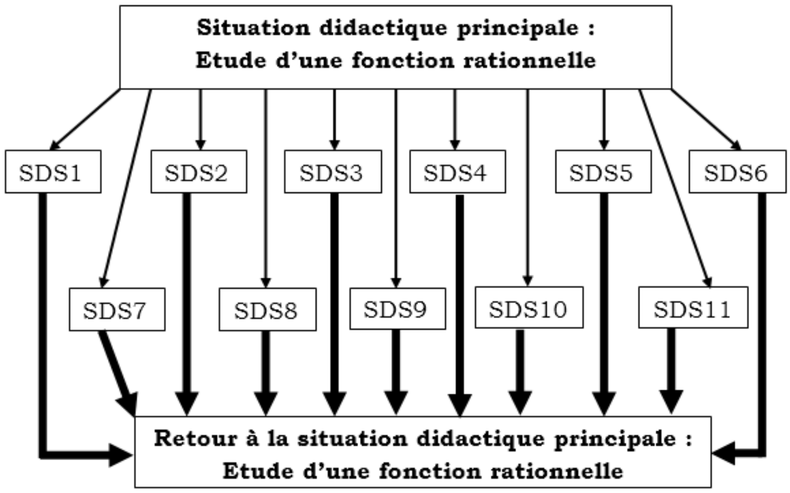
Il précise que : « *activité est en général, dans l'enseignement des mathématiques, assimilé à résolution des problèmes* ».

En plus, un problème peut-être défini comme étant un exercice un peu plus complexe, qui renferme une ou plusieurs inconnues.

Paul ROBERT (1992, p1534) dans son dictionnaire « le petit Robert 1 » définit un problème comme étant « *une question à résoudre, portant soit sur un résultat inconnu à trouver à partir de certaines données, soit sur la détermination de la méthode à suivre pour obtenir un résultat supposé connu* ». Alors que le dictionnaire LAROUSSE (1996, p824) donne la définition suivante : *« un problème est un exercice scolaire consistant à trouver les réponses à une question posée à partir de données connues* ».

Les situations didactiques sont résumées par le schéma ci-dessous :

SDP signifie : Situation didactique principale.
SDS signifie : Situation didactique secondaire.



SDP : Etude d'une fonction rationnelle.

Activité : Etudier une fonction rationnelle.

SDS 1 : Domaine de définition d'une fonction rationnelle.

SDS2 : Parité d'une fonction rationnelle.

SDS 3 : Limites infinies, Limites pour x tendant vers l'infini et Limites de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

SDS 4 : Asymptotes à la courbe représentative d'une fonction rationnelle.

SDS 5 : Positions relatives de la courbe représentative d'une fonction rationnelle par rapport à ses asymptotes.

SDS 6 : Domaine de continuité d'une fonction rationnelle.

SDS 7 : Calcul de la dérivée d'une fonction rationnelle.

SDS 8 : Calcul de dérivées successives d'une fonction rationnelle.

SDS 9 : Interprétation géométrique de la dérivée-Equation de la tangente en un point d'une courbe.

SDS10 : Propriétés de la dérivée première d'une fonction rationnelle.

SDS11 : Propriétés de la dérivée seconde d'une fonction rationnelle.

Retour à la SDP : Etudier une fonction rationnelle, en dressant le tableau des variations et en construisant la courbe représentative de la fonction.

3 PREMIER ENTRETIEN

Le premier entretien s'est déroulé avant de commencer toutes les séquences d'enseignement. Au cours de cet entretien, nous avons parlé avec chacun des enseignants qui devaient participer à l'expérimentation de l'ingénierie didactique, de l'**objet** de la recherche qui est « *de concevoir, de réaliser (ou d'expérimenter), d'observer et d'analyser des séquences d'enseignement et d'apprentissage de l'étude de fonctions rationnelles ainsi que des notions qui en constituent les étapes* » et cela dans le **but** « *de faciliter l'apprentissage des élèves pour que ces derniers soient capables d'étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés* ». Nous avons également fait allusion à la façon dont la recherche doit se réaliser.

Nous leur avons dit que la méthodologie d'ingénierie didactique que nous utilisons, se caractérise par une situation d'enseignement élaborée par le chercheur et réalisée par l'enseignant.

Nous avons montré à ces enseignants que :

1. C'est en faisant travailler les élèves (ce qui constitue de la dévolution) que l'on va susciter des apprentissages. Il s'agit de donner aux élèves beaucoup d'exercices à faire en classe et en dehors de la classe. Ces exercices doivent être des

applications des notions théoriques enseignées (connaissances déclaratives et procédurales) et portant sur les fonctions rationnelles. C'est-à-dire les situations adidactiques doivent être intégrées dans les situations didactiques. Et à la fin de l'ingénierie, mettre à la disposition des élèves plusieurs fonctions rationnelles à étudier, en tenant compte des degrés et des formes du numérateur et du dénominateur qui constituent des variables didactiques.

2. Les élèves doivent d'abord travailler individuellement. Le rôle de l'enseignant doit être limité à aider les élèves à comprendre l'énoncé de l'exercice et dans certains cas, à donner quelques indications.

   Les élèves doivent produire eux-mêmes les réponses attendues (situation d'action). Et après, l'enseignant doit donner aux élèves, l'occasion de formuler les réponses trouvées à ces exercices (situation de formulation) et de prouver que ces réponses sont correctes (situation de validation) pour les faire profiter à tous.

   Ensuite, l'enseignant doit retenir les bonnes démarches et formulations utilisées par les élèves (situation d'institutionnalisation au cours de laquelle l'enseignant et les élèves travaillent ensemble).

3. Les activités qui sont les exercices que l'enseignant propose aux élèves, favorisent les apprentissages chez les élèves.

4. En résolvant des nombreux exercices, les élèves ont l'occasion de refaire la matière qu'ils ont étudiée. Ces répétitions multiples permettent de consolider les apprentissages. En effet, on apprend les mathématiques et on ne peut les comprendre qu'en les faisant soi-même.

5. Pour faciliter les apprentissages, les connaissances déclaratives (définitions, propriétés, théorèmes, principes,…) doivent être enseignées avant les connaissances procédurales (règles, formules, calculs, …). Et que la signification des différentes notions enseignées doit précéder tout calcul sur ces notions.

   Certaines difficultés rencontrées par les élèves surviennent parce que les connaissances déclaratives apprises n'ont pas été bien intégrées ou bien utilisées dans les connaissances procédurales.

6. Une connaissance apprise n'est stable dans la mémoire des élèves que si les occasions de l'utiliser sont nombreuses et si les élèves sont capables de pouvoir la mobiliser dans la résolution d'un problème (ou d'un exercice). Il s'agit ici de la dialectique outil-objet.

7. Dans la résolution des exercices qui suivent une leçon théorique, au cours de laquelle un savoir a été présenté, les élèves ne font que rechercher les ressemblances entre l'exercice à résoudre et le savoir qui leur a été présenté par l'enseignant et comment appliquer ou utiliser ce savoir.

8. L'enseignant doit tenir compte des liens existants entre les notions mathématiques à enseigner et celles déjà enseignées et apprises par les élèves (ce qui a trait au caractère outil-objet des notions mathématiques).

9. Une distinction doit être faite entre l'objet mathématique qui est une fonction rationnelle et sa représentation qui est son graphique (ou sa courbe représentative). Ceci, dans le but d'éviter la confusion qui existe chez certains élèves et certains enseignants. En effet, certaines propriétés et notions sont rattachées uniquement à une fonction, telles que :

   - domaine de définition et domaine de continuité d'une fonction
   - parité, limite et dérivées d'une fonction

   D'autres propriétés et notions sont rattachées uniquement à une courbe, telles que :

   - asymptotes à une courbe et tangente en un point d'une courbe
   - sens de concavité d'une courbe et point d'inflexion d'une courbe

   Des correspondances peuvent être faites entre certaines propriétés et notions rattachées à une fonction avec celles rattachées à une courbe, telles que :

   - signes d'une fonction et positions relatives d'une courbe par rapport à l'axe des abscisses et aux quatre quadrants.
   - fonction croissante et courbe ascendante
   - fonction décroissante et courbe descendante
   - valeur maximale d'une fonction et point maximum d'une courbe
   - valeur minimale d'une fonction et point minimum d'une courbe
   - tableau des variations d'une fonction qui associe les propriétés de la fonction et celles de la courbe.

Des indications ont été données aux enseignants sur la façon d'introduire les fonctions rationnelles, au cours de la leçon portant sur la définition d'une fonction réelle (ou numérique) d'une variable réelle et ses différentes formes.

En effet, une fraction rationnelle est une fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P(x) et Q(x) sont de polynômes en x ; c'est donc un quotient de deux polynômes. Une fonction rationnelle est définie par :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

L'image f(x) d'un élément x de $\mathbb{R}$ par une fonction rationnelle est une fraction rationnelle.

Exemples : 1) $f: x \mapsto \frac{2x^2+5x-3}{x+7}$ 2) $f(x) = \frac{7x^2+9}{x^2+5x+6}$ 3) $f: x \mapsto \frac{x^3}{x^2-3}$ 4) $f(x) = \frac{4x+3}{x^3-1}$

Cas particuliers

1. Une fonction polynôme est une fonction rationnelle dont

   $Q(x) = 1$ (polynôme de degré zéro).

2. Au cas où P(x) est un polynôme de degré 1 ou 0 et Q(x) est un polynôme de degré 1, la fonction rationnelle est de la forme :

   $$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
   $$x \mapsto f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ avec } b, c \in \mathbb{R}^* \text{ et } a, d \in \mathbb{R}.$$

   Et est appelée fonction homographique.

Exemples : 1) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ 2) $f(x) = \frac{2x}{x+7}$ 3) $f(x) = \frac{5x-4}{3x}$

4) $f(x) = \frac{-9}{x-13}$ 5) $f(x) = \frac{17}{2x}$ 6) $f(x) = \frac{1}{x}$

4 DÉROULEMENT DES SÉQUENCES D'ENSEIGNEMENT

Pour chaque séquence d'enseignement :

1. Nous précisons le **titre de la matière à enseigner.**
2. Nous faisons une **analyse a priori**, au cours de laquelle nous déterminons :

2.1. Le milieu didactique des élèves qui est la classe.

2.2. Les connaissances antérieures à mobiliser par les élèves.

2.3. Les variables didactiques à manipuler par l'enseignant.

2.4. L'objectif de la leçon.

3. Nous faisons la **conception** de la séquence c'est-à-dire nous déterminons le contenu de la leçon (matière à enseigner) et les exercices à proposer aux élèves.
4. Il y a un **entretien a priori** au cours duquel nous nous concertons avec chacun des enseignants sur :

4.1. L'objectif de la leçon.

4.2. Ce que doit faire l'enseignant (situation didactique)

4.3. Ce que doivent faire les élèves (situation a-didactique)

La résolution des exercices doit constituer également un moment adidactique de cette situation didactique (ou d'enseignement).

Pendant que les élèves doivent travailler, il ne doit pas y avoir d'interventions didactiques (c'est-à-dire d'interventions de l'enseignant pour donner un enseignement, sous forme d'explications, aux élèves).

La dévolution doit se réaliser et il doit y avoir adidacticité.

4.4. Le choix des exercices à faire, par les élèves, en classe ou en dehors de la classe qui est laissé à chacun des enseignants.

Ces exercices sont choisis parmi ceux proposés par le chercheur, en tenant compte des variables didactiques.

4.5. La correction des copies du travail à faire, par les élèves, en dehors de la classe (devoir à domicile), qui doit être faite d'abord par le chercheur et ensuite par l'enseignant.

Le chercheur s'occupe de la mise en œuvre des connaissances apprises en classe. C'est l'enseignant qui attribue une note chiffrée aux élèves.

5. La **réalisation** est conduite par l'enseignant.

6. L'**observation** est faite par le chercheur.

Les observables à notre disposition sont :

- Les différents moments du déroulement de la leçon : ce que fait l'enseignant, ce qu'il dit et écrit au tableau et ce que font les élèves.
- Les actions et les réactions de l'enseignant et des élèves.
- Les questions posées par l'enseignant aux élèves et les réponses des élèves à ces questions.
- Les questions posées par les élèves à l'enseignant et les réponses de l'enseignant à ces questions.
- La production des élèves (en classe ou en dehors de la classe).

7. Il y a un **entretien a posteriori** quelques temps après la leçon : nous nous entretenons avec l'enseignant qui l'a réalisée, sur son déroulement (ce qui s'est passé pendant la leçon) et sur la production des élèves en dehors de la classe (après la leçon).

Pendant la correction de cette production, ce sont les élèves qui doivent travailler. L'enseignant ne fera qu'institutionnaliser les bonnes réponses trouvées par les élèves et le plus souvent, en présence du chercheur.

Les devoirs à domicile consistent en la résolution d'exercices. Le but des devoirs à domicile est de renforcer les connaissances acquises par les élèves, en classe, pendant la leçon. Ce qui permet à l'enseignant d'évaluer les stratégies de résolution mises en œuvre par les élèves afin d'assurer la continuité de l'apprentissage.

8. Il y a une **analyse a posteriori et une évaluation** qui sont basées sur : ce qui a été fait lors de l'analyse a priori, les comportements que l'analyse a priori permet de prévoir et ce qui a été convenu ensemble avec chacun des enseignants lors de l'entretien a priori. Nous essayons de voir si tous ces éléments se sont produits à travers les comportements observés chez les élèves pendant la leçon et dans les travaux (productions des élèves) exécutés en classe ou en dehors de la classe.

Résolution des exercices en classe

Les exercices proposés aux élèves sont ceux dont la résolution nécessite la mobilisation des connaissances (déclaratives et procédurales) apprises.

Les élèves travaillent d'abord individuellement afin de donner à chacun d'eux l'occasion de mettre en œuvre les moyens possibles pour résoudre l'exercice (c'est-à-dire d'agir sur l'exercice, ce qui constitue une situation d'action) et de formuler la réponse trouvée à l'intention de toute la classe (situation de formulation).

En effet, le travail individuel est un facteur qui favorise et consolide les apprentissages. Chaque élève de la classe doit travailler.

Et après, il y a des interactions entre élèves sous forme de discussions pour permettre la validation (justification) de la réponse trouvée qu'on a formulée (situation de validation), le plus souvent, sans l'intervention de l'enseignant.

Ainsi, on ouvre la possibilité de moments adidactiques et l'exercice proposé est considéré comme support possible d'une situation adidactique.

C'est pendant les moments d'institutionnalisation (des réponses trouvées) que la classe travaille en mode collectif c'est-à-dire tous les élèves ensemble avec l'enseignant.

Correction des devoirs à domicile

Pour la correction des travaux faits à domicile, les élèves sont chargés de résoudre, un à un, au tableau, les exercices qui leur ont été proposés.

Des discussions sont menées en classe, entre élèves, au cas où une réponse n'est pas bien formulée ou des précisions sont à donner. Ceci, dans le but d'amener l'élève se trouvant au tableau à comprendre son erreur et à la corriger. Ce qui permet de progresser au niveau des connaissances acquises et des méthodes de résolution à utiliser.

5 Retour à la situation didactique principale :

Dernière séquence d'enseignement

1. Matière à enseigner : étude d'une fonction rationnelle.
2. Variables didactiques à manipuler par l'enseignant :

   Le degré et la forme du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle f(x) qui constitue l'image de x par la fonction rationnelle f.
3. Objectif de la leçon :

   Amener les élèves à être capable d'étudier une fonction rationnelle.

   Etudier une fonction rationnelle c'est partir de son expression analytique pour aboutir à sa représentation graphique (ou sa courbe représentative).

   Cette séquence d'enseignement constitue la synthèse des toutes les onze séquences précédentes. Au cours de cette séquence, les élèves doivent utiliser toutes les connaissances apprises lors des séquences précédentes.
4. Conception de la leçon :

   Le contenu de la leçon est constitué de la marche à suivre pour étudier une fonction et de la résolution de quelques exemples sur l'étude d'une fonction rationnelle.
5. Lors de l'entretien a priori, nous nous concertons avec chacun des enseignants sur :

5.1. Ce que doit faire l'enseignant (situation didactique)

- Présenter la marche à suivre pour étudier une fonction.
- A travers les différentes étapes, l'enseignant doit montrer aux élèves que :
  - (1) l'étude du signe de la fonction donne une première idée sur la construction du graphique.

    En effet, les positions relatives de la courbe par rapport à l'axe des abscisses permettent de situer cette courbe dans les quatre quadrants.
  - Pour déterminer les équations des asymptotes verticale et horizontale, on peut se servir des résultats du calcul des limites de la fonction aux bornes du domaine de définition.
  - (2) la détermination des positions relatives de la courbe par rapport aux asymptotes donne une deuxième idée sur la construction du graphique.
  - (3) l'étude du signe de la dérivée première et l'étude des variations de la fonction (croissance, décroissance, extremums) donnent une troisième idée sur la construction du graphique.
  - (4) l'étude du signe de la dérivée seconde, le sens de concavité de la courbe et les points d'inflexion éventuels donnent une quatrième idée sur la construction du graphique.
  - Une erreur commise au point (1), ou au point (2), ou au point (3), ou encore au point (4), va conduire à quelques contradictions sur l'allure de la courbe et des corrections nécessaires doivent être faites.
  - Avec ce qui est fait aux points (1), (2), (3) et (4) ci-dessus, l'allure finale de la courbe est presque totalement déterminée.
- L'enseignant doit indiquer aux élèves que le calcul des limites de la fonction aux bornes du domaine de définition ajoute d'autres précisions sur la courbe et une erreur commise sur ce calcul conduit à quelques contradictions avec ce qui est fait aux points (1), (2), (3) et (4) ci-dessus.
- Pour dresser le tableau des variations de la fonction, l'enseignant doit attirer l'attention des élèves sur :
  - Les valeurs remarquables à mettre sur la ligne de x, qui sont : les bornes du domaine de définition, les abscisses des points de rencontre de la courbe avec l'axe des x, les valeurs se trouvant sur la ligne de x de l'étude du signe de la dérivée première et les valeurs se trouvant sur la ligne de x de l'étude du signe de la dérivée seconde.

- La reprise correcte du résultat de l'étude du signe de la dérivée première sur la ligne de y' ou $f'(x)$ et la reprise correcte du résultat de l'étude du signe de la dérivée seconde sur la ligne de y'' ou $f''(x)$.
- La manière de placer tout ce qui doit se trouver sur la ligne de y ou f(x).

- L'enseignant doit insister sur le fait que le tableau des variations de la fonction est un tableau synthèse qui rassemble tous les résultats obtenus aux étapes précédentes et qui permet de trouver l'allure finale de la courbe représentative de la fonction.

  En y plaçant les limites de la fonction aux bornes du domaine de définition, d'autres précisions s'ajoutent sur le tracé de la courbe.

- L'enseignant doit déterminer, ensemble avec les élèves, les équations des tangentes à la courbe aux points remarquables (points de rencontre de la courbe avec les axes de coordonnées, extremums et points d'inflexion).
- L'enseignant doit construire, ensemble avec les élèves, le graphique ou la courbe représentative de la fonction, en veillant à ce que le repère soit orthonormé.

  Pour construire la courbe représentative de la fonction, on suit l'ordre suivant :

  a) On trace les axes de coordonnées et on les gradue.

  b) On trace les asymptotes éventuelles.

  c) On place les points remarquables.

  d) On place quelques points supplémentaires choisis judicieusement de manière à faciliter la construction (ou le tracé) de la courbe.

  e) On trace la courbe en s'appuyant sur :

  - les limites de la fonction aux bornes du domaine de définition.
  - les différentes positions relatives de la courbe trouvées aux points (1), (2), (3) et (4).
  - les différents résultats se trouvant sur la ligne de y ou f(x) dans le tableau des variations de la fonction.

  f) On trace les tangentes aux points remarquables.

- L'enseignant doit montrer aux élèves, la compatibilité
  - des positions relatives de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.
  - avec les positions relatives de la courbe par rapport aux asymptotes.
  - avec les variations de la fonction.
  - avec le sens de concavité de la courbe et les points d'inflexion éventuels.

5.2. Ce que doivent faire les élèves (situation adidactique)

- Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité de la fonction.
- Etudier la parité de la fonction.
- Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées, avec l'aide de l'enseignant.
- Etudier le signe de la fonction et participer à la détermination des positions relatives de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.
- Déterminer les bornes du domaine de définition et calculer les limites à ces bornes.
- Déterminer les équations des asymptotes à la courbe, le centre de symétrie de la courbe (s'il existe) et les positions relatives de la courbe par rapport aux asymptotes.
- Calculer la dérivée première de la fonction, étudier le signe de cette dérivée première et étudier les variations de la fonction.
- Calculer la dérivée seconde de la fonction, étudier le signe de cette dérivée seconde et déterminer le sens de concavité de la courbe et les points d'inflexion éventuels.

- Dresser le tableau des variations de la fonction, avec l'aide de l'enseignant.
- Déterminer les équations des tangentes aux points remarquables.
- Construire la courbe représentative de la fonction avec l'aide de l'enseignant. Ils doivent :
  - tracer les axes de coordonnées et les graduer.
  - tracer les asymptotes.
  - placer les points remarquables.
  - choisir quelques points supplémentaires (on choisit l'abscisse et on détermine son ordonnée) et placer ces points dans le plan cartésien, si nécessaire, avec l'aide de l'enseignant.
  - tracer la courbe en s'appuyant sur le tableau des variations de la fonction et en tenant compte : des limites de la fonction aux bornes du domaine de définition, des différentes positions relatives de la courbe trouvées aux étapes précédentes et des différents résultats qui se trouvent sur la ligne de y dans le tableau des variations de la fonction.
  - tracer les tangentes aux points remarquables.

6. Analyse a posteriori et évaluation

   En analysant les productions des élèves en classe ou en dehors de la classe, nous avons constaté que :

   214 élèves sur 236 (soit environ 91%) sont parvenus à :

   étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés c'est-à-dire à partir de l'expression analytique de la fonction, en passant par toutes les étapes jusqu'à aboutir à sa représentation graphique.

   Les 22 élèves, qui ne sont pas parvenus à étudier une fonction rationnelle, ont commis des erreurs à l'une ou l'autre étape de l'étude de la fonction.

6 ENTRETIEN FINAL

A la fin de toutes les séquences d'enseignement, un entretien final a eu lieu avec chacun des enseignants ayant participé à l'expérimentation de l'ingénierie didactique.

Au cours de cet entretien, le chercheur et chacun des enseignants ont parlé du déroulement général de l'ingénierie didactique dans chacune des classes et des résultats auxquels ils ont aboutis.

En effet, l'expérimentation de l'ingénierie didactique s'est passée dans des bonnes conditions, les élèves se sont bien appliqués dans les travaux exécutés en classe ou en dehors de la classe et la grande majorité des élèves est parvenue à étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

7 ANALYSE FINALE ET ÉVALUATION GLOBALE DE L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE

Les résultats de l'analyse des séquences d'enseignement et des productions des élèves montrent que les notions mathématiques qui ont fait l'objet de l'ingénierie didactique sont relativement bien acquises par les élèves et que ces notions sont accessibles aux élèves des classes de 5e scientifique et technique industrielle.

Ces résultats montrent aussi que l'étude de fonctions rationnelles est assimilée par les élèves et elle peut effectivement être enseignée dans ces classes. Après application de cette ingénierie didactique, les élèves sont capables d'étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

Pour la dernière séquence sur l'étude d'une fonction rationnelle, qui constitue la synthèse de toutes les séquences, 214 élèves sur 236 (soit environ 91%) sont parvenus à étudier une fonction rationnelle.

Au cours de cette dernière séquence d'enseignement, une grande importance est accordée au tableau des variations et à la construction de la courbe représentative de la fonction. Car, ils prennent en compte tout ce qui a été fait avant. Plusieurs précisions sont données sur la résolution de chacune de ces deux étapes.

Le degré et la forme du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle f(x) qui constitue l'image de x par la fonction rationnelle f, sont des variables didactiques qui sont à la disposition de l'enseignant et qu'il peut manipuler.

Le changement d'un de ces éléments conduit à un changement de stratégies de résolution chez les élèves et les pousse à mobiliser d'autres connaissances. Pour le degré, nous avons :

$$\frac{1^{\text{er}}\ \text{degré}}{1^{\text{er}}\ \text{degré}} \quad \text{(fonction homographique)}; \quad \frac{2^{\text{e}}\ \text{degré}}{1^{\text{er}}\ \text{degré}};\ \frac{1^{\text{er}}\ \text{degré}}{2^{\text{e}}\ \text{degré}};$$

$$\frac{2^{\text{e}}\ \text{degré}}{2^{\text{e}}\ \text{degré}};\ \frac{3^{\text{e}}\ \text{degré}}{1^{\text{er}}\ \text{degré}};\ \frac{1^{\text{er}}\ \text{degré}}{3^{\text{e}}\ \text{degré}};\ \frac{3^{\text{e}}\ \text{degré}}{2^{\text{e}}\ \text{degré}}\ \text{et}\ \frac{2^{\text{e}}\ \text{degré}}{3^{\text{e}}\ \text{degré}}.$$

Pour la forme, nous avons : monôme, binôme, trinôme, produit de deux formes précédentes.

Le caractère outil-objet de plusieurs notions mathématiques est présent lors de la réalisation de l'ingénierie didactique. Nous avons noté chez les élèves une forte mobilisation des connaissances antérieures, qui sont des outils nécessaires dans la résolution des activités proposées à chaque séquence d'enseignement.

8 CONCLUSION

Dans l'ingénierie didactique construite, nous avons fourni aux enseignants une approche pour enseigner et aux élèves des stratégies pour apprendre l'étude de fonctions rationnelles.

Dans les activités que nous avons proposées pendant la réalisation de l'ingénierie didactique, le rôle de l'enseignant était limité. Il pouvait aider les élèves à comprendre l'énoncé de l'activité et dans certains cas, donner quelques précisions. Les élèves devaient trouver eux-mêmes la réponse attendue.

Ce changement de contrat didactique permet aux élèves d'entrer dans la situation adidactique qui favorise et consolide les apprentissages. En plus, il n'y a pas apprentissage sans adidacticité.

Des exercices bien choisis ont été proposés aux élèves pendant les séquences d'enseignement ou sous forme des travaux à faire en dehors de la classe.

Ces exercices sont des supports des situations adidactiques permettant des apprentissages chez les élèves et poussent ceux-ci à la mobilisation et à l'usage des connaissances que requiert la résolution de ces exercices.

Ainsi donc, un enseignement approprié de l'étude de fonctions rationnelles ainsi que des notions qui en constituent les étapes :

- facilite les apprentissages des élèves ;
- favorise l'acquisition de connaissances chez les élèves ;
- conduit au fonctionnement correct du savoir enseigné ;
- et permet aux élèves d'étudier une fonction rationnelle sans trop de difficultés.

Par stratégies fournies aux élèves pour apprendre, il faut entendre : la manière de faire tout ce qui est demandé aux élèves de faire en classe ou en dehors de la classe. Il s'agit donc d'un ensemble d'actions soigneusement coordonnées en vue de faciliter l'apprentissage.

REFERENCES

[1] ARTIGUE, M. (1996). Ingénierie didactique. Dans J. BRUN, (dir), *Didactique des mathématiques*, (pp 243-274). Lausanne, Paris : Delachaux et Niestlé.

[2] BROUSSEAU, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy BROUSSEAU du titre de Docteur honoris causa de l'Université de Montréal. *Revue : Interactions didactiques*, pp 1-57.

[3] DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Revue : Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°7 (2), pp 5-31.

[4] FLUCKIGER, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique : la notion de division comme modèle de connaissances numériques*. Thèse de Doctorat, Université de Genèse, Suisse.

[5] ROBERT, P. (1992). *Le petit Robert 1, dictionnaire de la langue française*. Paris, France : Editions Dictionnaires Le Robert.

[6] DICTIONNAIRE LAROUSSE (1996). Belgique.