International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 29 No. 2 May 2020, pp. 298-311

http://www.ijias.issr-journals.org/

L'enseignement de la dérivée dans le processus d'apprentissage en 3ème des humanités scientifiques en République Démocratique du Congo

Jean André MUANZA KAMUANGA

Université Pédagogique Nationale, RD Congo

ABSTRACT: This article focuses on the taeching of the derivative in the 3rd year of science in the Democratic Republic of Congo. He poses the fundamental question of his conceptual meaning " what is it for ?" The field work has highligted the aspect calculations, algorithms of computation. Nothing special about what it's used for. This historical work of interptation of the derivative and to ask the question of how to introduce different aspects in our teaching.

KEYWORDS: Acceleration, increase, director coefficient, derivative, right, limit, inclination, rate, variation, speed.

RÉSUMÉ: Cet article porte sur l'enseignement de la dérivée en 3ème année des humanités scientifiques en République Démocratique du Congo. Il pose la question fondamentale de son sens conceptuel "le à quoi ça sert ? " Les travaux de terrain ont mis en évidence l'aspect calcul, les algorithmiques des calculs. Rien de particulier sur le à quoi sert la dérivée. Le travail historique et épistémologique de la dérivée nous a conduits à mettre en évidence un nombre d'interprétations de la dérivée et à se poser la question de comment s'y prendre pour introduire différents aspects dans notre enseignement.

MOTS-CLEFS: Accélération, accroissement, coefficient directeur, dérivée, droite, limite, pente, taux, variation, vitesse.

1 INTRODUCTION

Nous présentons, dans ces pages, notre travail de recherche mené depuis 2017 et qui a pour objet "l'enseignement-apprentissage de la dérivée en troisième année des humanités scientifiques en République Démocratique du Congo".

Il semble exister un malaise dans l'enseignement-apprentissage de la notion de dérivée qui est un des concepts qui posent des problèmes d'apprentissage en mathématiques.

Les élèves qui l'apprennent, la mémorisent plus qu'ils la comprennent. De manière procédurale ou calculatoire, ils manipulent bien les formules apprises, ils parviennent de fois aux résultats attendus, mais quant à comment le réinvestir au quotidien, les problèmes se posent.

Cet enseignement est resté théorique, centré sur la reproduction des élèves, ce qui implique son caractère informatif et algorithmique. Ceci ne permet nullement aux apprenants à s'approprier des connaissances qui sont à leur portée afin de les mobiliser dans des situations nouvelles ou dans d'autres sciences comme la physique, la biologie, la chimie…, dans le cadre de l'interdisciplinarité scolaire.

Nous pensons que ce qui cause très souvent les soucis, c'est sa manière assez contractuelle, le fait qu'il y a beaucoup de façons de comprendre cette notion. La pire des démarches à ne pas suivre, c'est d'envisager une seule façon d'introduire cette notion comme nous le faisons si souvent dans notre enseignement-apprentissage en suivant la marche des manuels utilisés.

C'est rare de constater qu'après avoir enseigné la droite en deuxième scientifique, l'enseignant puisse aller très loin pour faire voir aux élèves l'importance que revêt la notion de pente et à quoi elle pouvait les amener dans la classe montante.

Beaucoup d'enseignants suivent la procédure de manuel scolaire qui reste disponible et peu sont ceux qui peuvent réfléchir personnellement pour introduire la notion de la dérivée par la pente de la droite malgré l'usage de la limite.

Notre principale hypothèse est que la structuration actuelle de cet enseignement d'introduire uniquement la dérivée par $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ne permet pas aux apprenants de gérer efficacement la complexité de ce concept. C'est ce qui expliquerait pour la plupart de temps leurs difficultés et c'est pourquoi ils privilégient la mémorisation au contenu qui donne du sens.

Nous estimons que le travail a priori de l'enseignant pouvait donner aux apprenants quelques éléments nécessaires qui entreraient en compte dans le travail de recherche de la situation-problème appropriée et adaptée.

Ainsi pour réaliser un tel travail de recherche, nous avons pu recourir aux quatre points essentiels comme une des procédures à adopter pour que l'apprenant, dans son étude de la dérivée, apprenne certains sens de cette notion mathématiques et à quoi ça sert.

2 ÉLEMENTS DE L'APPROCHE HISTORIQUE ET DE L'APPROCHE PEDAGOGIQUE

2.1 POINTS D'HISTOIRE

Les problèmes de tangentes appelés (dérivation) et de calculs d'aire (intégration) ont passionné plusieurs mathématiciens depuis **Archimède**. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac **Newton et Gottfried Wilhelm Von Leibniz**. Ils sont maintenant considérés comme **Co-inventeurs du calcul différentiel.**

Malgré la controverse qui a longtemps fait rage, du vivant de **Newton et Leibniz**, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Mais au finish, on est arrivé à concilier les deux notations de Leibniz et de Newton.

Voici comment, dans Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), Newton exprime sa vision des dérivées : "*Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut* **".** La vision de Newton est très proche de la définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement.

2.2 APPROCHE PEDAGOGIQUE ENVISAGEABLE

L'histoire du concept de dérivée est complexe. Pour l'aborder de façon plus claire, nous prenons le parti de la comparer avec la présentation que donnent de ce même concept les programmes actuels de notre enseignement secondaire. La dérivée est une des notions centrales de notre programme de mathématique. La dérivabilité en un réel x_0 et l'éventuel nombre dérivé en x_0 sont d'abord définis à partir du concept de limite (en o ou en x_0). Il s'agit là de *notions locales* qui ne dépendent que des restrictions de la fonction au voisinage du réel considéré.

Le nombre dérivé, s'il existe, s'interprète de plusieurs façons :

- *Cinématiquement*, en termes de vitesse instantanée ;
- *Numériquement,* en termes d'approximation affine ;
- *Géométriquement*, en termes de tangente ;
- En *économie*, il est lié aux quantités marginales.

Dans un second temps, *on passe du local au global, en définissant la dérivabilité sur un intervalle, et la fonction dérivée*. On s'intéresse alors aux variations de la fonction que l'on dérive, et aux problèmes d'optimisation. On développe de purs calculs, des algorithmes de dérivation : dérivées des fonctions de référence, dérivées de fonctions obtenues en composant d'autres fonctions par les opérations classiques : +, −, ×, /, o .

C'est ce travail algorithmique que réussissent si bien les logiciels de calcul formel.

2.3 APPROCHE PEDAGOGIQUE ET APPROCHE HISTORIQUE

2.3.1 POINTS COMMUNS POSSIBLES

- Didactiquement comme historiquement, on ne saurait établir un calcul différentiel sans posséder le concept de fonction.

  Trois aspects majeurs du concept de fonction sont à distinguer :

  1. L'aspect calculatoire ou algébrique, suivant lequel une fonction est définie par une formule ;
  2. L'aspect graphique et géométrique, pour lequel une fonction est assimilée à sa courbe représentative dans un repère ;
  3. L'aspect intuitif et causal, qui considère une quantité y dépendant d'une quantité x (*on dit alors que y varie en fonction de x*).

C'est pourquoi il faut lui donner une telle importance, dès le secondaire général appelé maintenant éducation de base (7ème et 8ème années) en RDC.

Cependant, historiquement, cette notion a émergé parallèlement et non préalablement au calcul différentiel et sous des aspects variés :

- Courbes représentatives (au xviième siècle, on disait « lignes ») ;
- Formules algébriques ;
- Lois de mouvement (la variable est alors le temps).

Le concept moderne de fonction est plus abstrait et plus général, mais ces anciennes représentations ont abondamment prouvé leur puissance et leur fécondité, même si elles n'allaient pas sans certaines naïvetés.

- Entre notre enseignement et l'évolution historique du concept de dérivée, l'importance du point de vue cinématique ; C'est grâce à lui qu'a pu se forger une *intuition du nombre dérivé*, comme *vitesse instantanée d'un mobile* se déplaçant sur un axe. Il est à l'origine de l'une des deux formalisations du calcul différentiel, celle d'Isaac Newton qui, à partir d'une quantité x qui varie (la fluente) considère la variation de x (la fluxion, notée $\dot{x}$), façon de voir équivalente à notre opération de dérivation qui, à partir de f donne$f\ '$.

Dès avant Newton, la représentation cinématique avait une importance primordiale, due à ses aspects intuitif et physique. C'est en se plaçant à ce point de vue que Galilée intègre l'équation différentielle $y' = Ct$ (par une méthode sommatoire, d'origine médiévale), et que ses successeurs déterminent diverses primitives, donc, par renversement de la démarche, diverses vitesses de mouvements, ainsi que de nombreuses tangentes, en décomposant le mouvement suivant deux axes perpendiculaires : ce fut le travail, en particulier, de Torricelli, de Roberval, de Barrow, le maître de Newton. On voit donc que la cinématique est historiquement la source principale de la notion de dérivée.

- L'histoire et l'enseignement se rejoignent également dans l'intérêt qu'ils portent aux problèmes d'optimisation.

« Kepler, en 1615, fait l'observation, que l'on trouve déjà chez Nicole Oresme et qui n'avait pas échappé même aux astronomes babyloniens, que *la variation d'une fonction est particulièrement lente au voisinage d'un maximum*[1] ». Pierre de Fermat, surtout, s'intéresse à ce type de problèmes, qu'il résout par une méthode d'ailleurs plus algébrique qu'analytique, que nous interpréterions comme un cas particulier d'équation $f'(xo) = 0$.

- Au cours de l'histoire de l'Analyse comme dans la plupart des exercices que nous proposons aux élèves, l'aspect global éclipse largement l'aspect local. Ce point de vue global permet de développer tout le côté *algorithmique du calcul des dérivées*, mais il néglige les difficultés qui peuvent se poser aux points « singuliers ». Ce privilège du global par rapport au local, de la fonction dérivée par rapport au nombre dérivé demande peut-être à être nuancé.

[1] Citation des << Eléments d'Histoire des Mathématiques >>, par Bourbaki, chez Herman, (pp 221-222)

2.3.2 CONTRASTES POSSIBLES

➢ Historiquement, l'idée d'intégrale précède le concept de dérivée, à l'inverse du déroulement de notre enseignement.

L'Analyse tire, en effet, son origine de divers problèmes qui se posaient aux mathématiciens, et qui furent d'abord géométriques. Il s'agissait d'un nombre réduit de problèmes de tangentes, mais surtout de problèmes de type sommatoire (nous dirions aujourd'hui de type intégral).

➢ Le concept de limite, qui est primordial dans notre enseignement, n'occupe pas cette place centrale dans l'histoire des mathématiques.

La plupart des mathématiciens, avant le XIX$^{\text{ème}}$ siècle, utilisaient plutôt le concept d'indivisible, ou d'infiniment petit, lequel n'était pas compatible avec la rigueur logique de l'exposé, mais constitua une source d'inspiration majeure pour les Analystes: Cavalieri, Pascal, Leibniz et ses disciples. C'est cette notion d'infinitésimal qui sous-tend les différentielles de Leibniz, le fameux « dx », mais aussi la notation « o » de Newton (qui, avec les notations de Leibniz, ne serait autre que $(o = dt)$).

Dans le domaine de la dérivée comme dans beaucoup d'autres, le progrès historique et la progression didactique, s'ils se recoupent parfois, ne sauraient coïncider : l'histoire est beaucoup plus complexe, emmêlée, touffue, que ne pourrait l'être aucun enseignement. Mais l'enseignant peut trouver dans l'histoire des concepts une source de réflexion et d'inspiration.

2.4 PROCESSUS D'APPRENTISSAGE

2.4.1 APPROCHE CINÉMATIQUE

Dans ce processus, tout peut aller d'un constat que les maths et les sciences physiques s'interrogent réciproquement en précisant que les mathématiques sont constitutives des sciences physiques et celles-ci utilisent mieux des mathématiques pour son développement intégral d'une part et d'autre part, les principes voudraient que l'on parte des sciences physiques vers les mathématiques tout en regardant comment les physiciens utilisent les mathématiques dans leur vie pratique.

Ainsi pour parler d'un questionnement sur la notion de "vitesse", "accélération" et dérivée", on les définirait respectivement comme taux de variation de la distance parcourue " ; "taux de variation de la vitesse" et "taux de variation d'une grandeur". Cela peut s'illustrer par la balade en voiture et par le sportif de manière suivante :

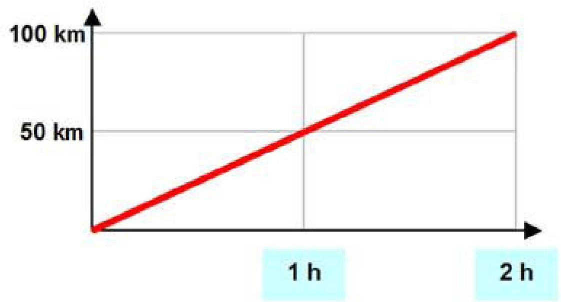
2.4.1.1 LA BALADE EN VOITURE

Nous sommes sur une belle route de la ville et nous notons la distance parcourue :

- En 1 heure, nous faisons 50 km ;
- La 2$^{\text{ème}}$ heure, nous faisons 50 km.

Cela fait un total de 100 km. Donc notre vitesse est vraiment régulière : elle est de *50km/heure.*

Voici le graphique :

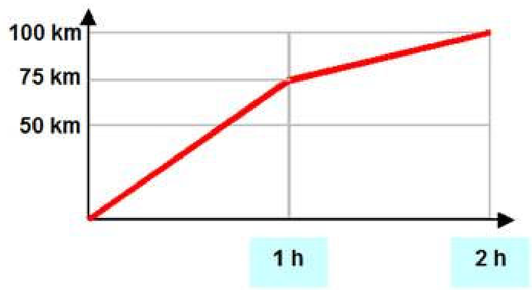


On observe une simple droite sur le graphique.

Le lendemain, nous faisons :

- En 1 h, 75 km ;
- La 2$^{\text{ème}}$ heure, 25 km. Cela fait un total de 100 km.

Voici le graphique :



On observe une fluctuation du trafic : notre vitesse n’est pas la même selon l’heure. La 1ère heure, nous allons plus vite que la seconde. La pente[2] de la droite témoigne de la vitesse. Donc la *vitesse est la pente de la droite dessinée*.

2.4.1.2 LE SPORTIF

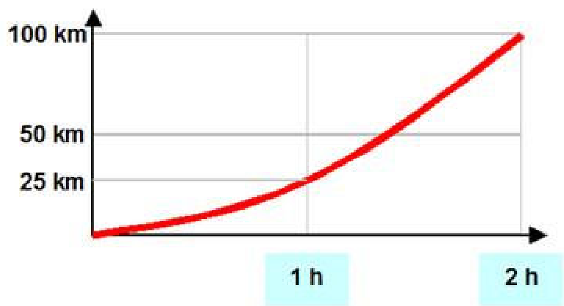
Un sportif en voiture se lance départ, arrête et accélère :

- En 1 heure, il fait 25 km ;
- La 2ème heure, il fait 75 km. Cela fait un total de 100 km

Quelle sa vitesse ?

- Elle change constamment,
- *C’est là qu’intervienne la notion de dérivée.*
- *Comment tracer la pente de la tangente en tout point ?*

Voici le graphique :



La vitesse, c’est la pente de la courbe. Mais quelle pente ?

En effet, prenons la courbe décrite par la fonction (une parabole):

- $y = ax^2$
- Avec au point extrême :

$$x = 2\,h$$
$$y = 100\,km$$
$$Soit\;100 = a.2^2$$
$$a = 25$$

[2] Pente d’une droite : valeur de la tangente de l’angle que forme cette droite avec la projection orthogonale sur le plan horizontal.

L'équation de la courbe devient :

$y = 25x^2$, avec $x = 1 \rightarrow y = 25$

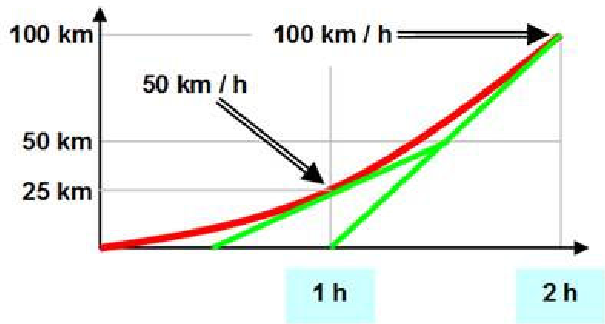
Effectivement, le sportif avait noté qu'il avait fait 25 km au bout de la première heure. On apprendra que la fonction dérivée de $y = ax^2$ est $y' = 2ax$.

Ici, $y' = 50x$.

La constante $2a = 50$ (une accélération) permet de calculer la *vitesse instantanée*. Elle vaut 50km/heure au point $x = 1$ heure et elle vaut 100km/heure au point $x = 2\ heures$.

Ici, cette accélération est constante : elle vaut 50km/h². Ce qui veut dire que la vitesse progresse de 50km/h toutes les heures.

Voici le graphique



On note la distance en fonction du temps : $d = f(t)$.

Mais pour être plus général, nous allons prendre : $y = f(x)$

Ici : $y = 25\,x^2$

La dérivée est $y' = 50\,x$, Avec $x = 1 \rightarrow y' = 50\ km/h$;

C'est notre vitesse au temps 1 heure (droite tangente en vert).

Avec $x = 2 \rightarrow y' = 100\ km/h$; C'est notre vitesse au temps 2 heures (2e droite tangente en vert).

OBSERVATIONS :

On peut se demander pourquoi au bout d'une heure, la vitesse (instantanée) est déjà de 50km/h, alors que nous avons parcouru que 25 km ?

Voyons cela en prenant une échelle de temps plus petite ; voyons ce qui se passe toutes les cinq minutes :

Sur ce tableau ci-dessous à gauche, les valeurs trouvées pour une heure et deux heures de route. Notamment 25 km parcourus avec une vitesse au bout d'une heure qui est grimpée à 50 km/h (sujet de notre interrogation).

x heures	y = 25 x²	y' = 50 x
1	25	50
2	100	100

m minutes	y = 25 m² / 60²	y' = 50 m / 60	Dy	total
0	0,00	0,00		
5	0,17	4,17	0,17	
10	0,69	8,33	0,52	
15	1,56	12,50	0,87	
20	2,78	16,67	1,22	
25	4,34	20,83	1,56	
30	6,25	25,00	1,91	
35	8,51	29,17	2,26	
40	11,11	33,33	2,60	
45	14,06	37,50	2,95	
50	17,36	41,67	3,30	
55	21,01	45,83	3,65	
60	25,00	50,00	3,99	25
65	29,34	54,17		
70	34,03	58,33		
75	39,06	62,50		
80	44,44	66,67		

Sur le tableau à gauche, nous avons le même type de calcul mais avec les minutes comme unité de temps. Nos valeurs au bout d'une heure, c'est-à-dire (60 min) se retrouvent. Nous constatons que la vitesse croit progressivement pour atteindre $50km/h$**.** Calculons la distance parcourue toutes les tranches de cinq minutes. Un calcul approximatif serait le suivant : Autour du temps 5 min, nous prenons la vitesse moyenne (0 + 4,17) / 2 = 2,08 que nous multiplions par la tranche de temps de 5 min. soit 5/60 heure. Résultat : 0,17. La somme de ces parcours élémentaires atteint les 25 km. Nous voilà rassurés.

Généralement :

Si nous voulons calculer la vitesse à laquelle nous roulons à 1 heure :

- Nous regardons la distance parcourue au compteur, 25 km ;
- Nous roulons un peu, disons 10 minute et nous notons à nouveau la distance parcourue, nous trouvons 35 km.

Le calcul classique de vitesse donne : 10 km en 10 minutes ; 6 fois plus en 1 heure, soit 60km/h.

Plus le temps de mesure est court, plus la vitesse instantanée est précise. Pour cela, il faut un compteur kilométrique très précis. Combien de mètres en 10 secondes et même moins ? Pour y parvenir, Newton a trouvé un truc en termes de postulat $y = x^n$ pour s'en sortir dans tous les cas ... avec[3]: ($\boldsymbol{y' = nx^{n-1}}$)

Le second principe voudra qu'avec des situations rencontrées en physique, on peut contextualiser en maths, des techniques plus ou moins explicites des programmes et inversement en mathématiques, il s'agit de prendre en charge l'acquisition des outils et des techniques dont le physicien pourrait avoir besoin.

C'est pour cette raison qu'on évitera à l'enseignant de math de faire de physique et vice versa, mais que les deux en collaboration peuvent enseigner ce qui donne du sens aux apprenants en chacune des branches.

[3] http://villemin.gerard.free/WWWgvmm/analyse/anaderiv.htm$\neq approche$

3 ETUDE DE LA DROITE (APPROCHE ANALYTIQUE)

3.1 LA DROITE

Didactiquement, la droite est une fonction qui peut être écrite sous la forme

$y = mx + b$. Et graphiquement, une droite est une fonction dont l'inclinaison est constante en tout point. Quelles sont les composantes de l'équation de la droite ?

La pente qui est représentée par la lettre m, mesure l'inclinaison de la droite. Elle correspond à la variation de la valeur de y lorsque x augmente d'une unité. Graphiquement, elle exprime la variation verticale de la droite pour un déplacement horizontal d'une unité positive comme le schématise la fig 1 ci-dessous.

Considérons le graphique suivant de l'équation f(x) = 2x + 6 = y tout en cherchant ce qui la caractérise et ce qui pourrait la distinguer d'une autre ligne droite dans le plan cartésien.

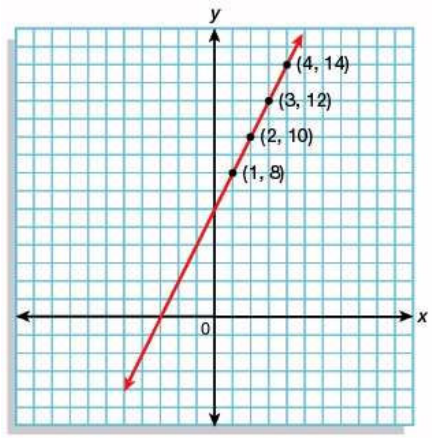


Fig. 1.

OBSERVATIONS :

- Certains feront sans doute l'observation suivante en partant du point (1,8) ; on peut se rendre à un autre point sur la droite, disons (2,10), en se déplaçant d'une unité vers la droite et ensuite 2 unités vers le haut. Si on définit un déplacement vers le bas et un déplacement vers la gauche comme étant tous les deux négatifs, on peut dire un déplacement vertical de - 8 et horizontal de -4 » nous permettra de nous rendre au point (-3,0).

  On conclut donc que si on respecte le rapport $\frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal} = \frac{2}{1} = 2$.

  Avec un point de départ sur la droite, on atterrira toujours sur un autre point sur la droite.

  Ce rapport $m = \frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal}$ est une caractéristique essentielle de cette droite appelée la pente de la droite.

Exemple : l'équation y = 2x – 3 représente une droite dont la pente est 2 (m = 2) et dont l'ordonnée à l'origine est – 3 (b = - 3)

N.B. Les variables x et y sont arbitraires. On peut les renommer comme on veut dans le cas des courbes d'offre et de demande (p, q) pourvu qu'on sache laquelle des deux est variable indépendante à placer horizontalement et dépendante à placer verticalement.

Comment obtenir l'équation d'une droite ?

- Si la droite passe par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), la pente est obtenue par la relation : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ et l'ordonnée à l'origine qui est représentée par la lettre b, est la valeur de y lorsque x est zéro. Il s'agit là de position de la droite lorsque celle-ci croise l'axe des y comme le stipulent les figures 2 et 3 ci-dessous [4]:

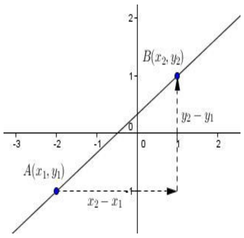


Fig. 2.

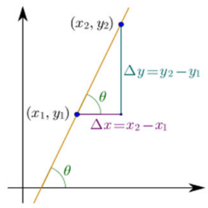


Fig. 3.

EXEMPLE :

Quelle est l'équation de la droite qui passe par les points (2,4) et (3,8) ?

La réponse à cette question est de trouver les valeurs de m et b qui caractérisent la droite.

En effet, par définition la pente est mesurée par la relation $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-2} = \frac{4}{1} = 4.$

Ce qui indique que pour un déplacement d'une unité vers la droite, il y a un déplacement de 4 unités vers le haut. Attention, le choix du 1^er ou 2^è point n'affectera pas le calcul de la pente.

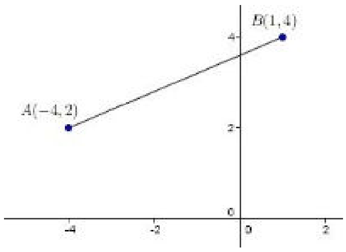
On a : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-8}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4.$

Trouvons b ; on prend $y = mx + b = 4x + b$. Mais nous savons que le point (2,4) se trouve sur une droite et doit donc satisfaire son équation.

On a : $4 = 4(2) + b \rightarrow b = 4 - 8 \rightarrow b = -4$

EXEMPLE :

Calculer la pente du segment suivant.



Pente = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

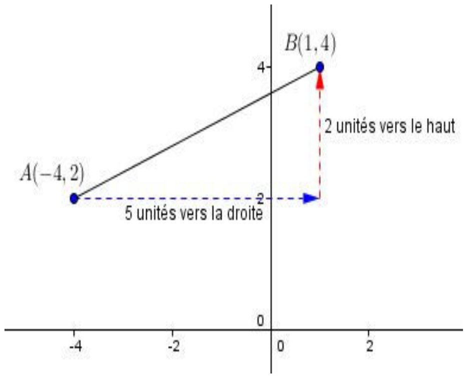
Pente = $\frac{4-2}{1-(-4)}$

Pente = $\frac{2}{5}$

---

[4] http:// commons.wikimedia.org /wiki/ File wiki-stop –in-2d. Svg ? Use Lang = Fr

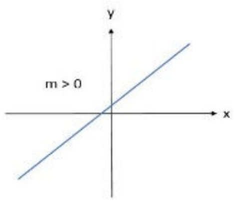
Le taux de variation est donc de $\frac{2}{5}$. Cela signifie qu'à chaque fois que l'on se déplace de 5 unités sur l'axe des x positifs, on monte de 2 unités sur l'axe des y.



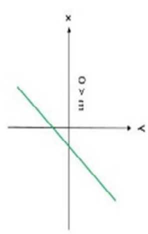
EN RÉSUMÉ :

On peut retrouver 4 inclinaisons différentes selon le type de pente que l'on observe : une droite ascendante a une pente positive ; une droite descendante a une pente négative ; une droite horizontale a une pente nulle; une droite verticale a une pente indéterminée.

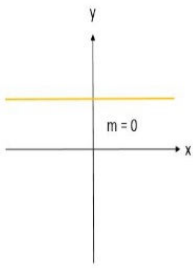
Droite ascendante = pente positive



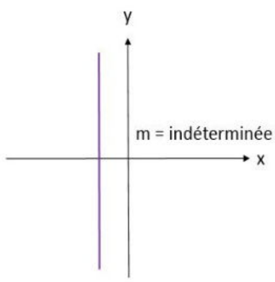
Droite descendante = pente négative



Droite horizontale = pente nulle



Droite verticale = pente indéterminée



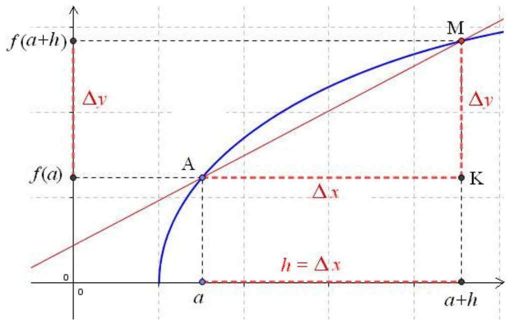
4 LA DERIVEE

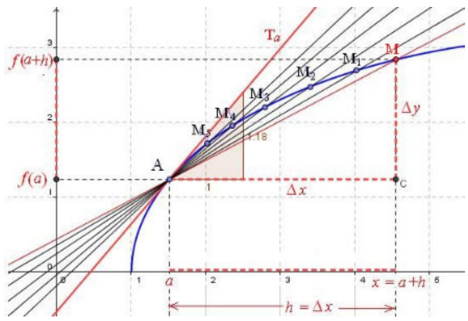
4.1 TANGENTE EN UN POINT D'UNE COURBE

Nous commencerons par l'étude du problème qui consiste à déterminer la pente de la tangente en un point du graphe d'une fonction. Ça nous conduira à la notion de dérivée.

Par la suite, nous oublierons l'aspect géométrique du problème pour définir la dérivée comme limite d'une expression impliquant une fonction. Une fois définie, on peut généraliser ce concept de dérivée à différentes fonctions et développer des règles de dérivation.

Soient deux points distincts $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$ de la courbe représentative de la fonction f, la droite passant par ces deux points est appelée sécante à la courbe de f en A et B. le coefficient directeur de cette sécante vaut: $m = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$





Quand l'abscisse $a + h$ est proche de a, le point M sera proche du point A.

Le coefficient directeur des sécantes (AM) va tendre vers le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A. La tangente est à la position limite de ces sécantes. Son coefficient directeur est égal à la limite quand $h \to 0$. Le coefficient directeur de la tangente s'écrit alors :

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Si cette limite existe, sa valeur m est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a, f(a))$.

4.2 DEFINITION DE LA DERIVEE

4.2.1 DÉFINITION

f '(a) = $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

OBSERVATION :

*« La **dérivée** d'une fonction est le moyen de déterminer combien cette fonction varie quand la quantité dont elle dépend, son argument[5], change. Plus précisément, une dérivée est une expression (numérique ou algébrique) donnant le rapport t entre les variations infinitésimales de la fonction et les variations infinitésimales de son argument ».*

On appelle nombre dérivée d'une fonction f en a, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. On note ce nombre f '(a).

Par exemple, la vitesse est la dérivée du déplacement par rapport au temps, et l'accélération est la dérivée, par rapport au temps, de la vitesse.

4.2.2 DÉFINITIONS

DÉFINITION 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\boldsymbol{R}$ et , $x \in I$, $x \neq a$. On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b,

le *nombre réel* : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, C'est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a, f\ (a))$ et $M(x, f\ (x))$. ou

DÉFINITION 2 :

Si on pose $h = x - a$ alors $x = a + h$ et $\Delta x = h$.

On a une deuxième définition :

[5] Un argument est la variable dont la valeur permet de définir celle d'une fonction. Exemple : x est l'argument de la fonction sin x.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R et a ∈ I . Soit h un nombre réel non nul tel que $a + h \in I$. On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$, le *nombre réel* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, C'est le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + x = h))$.

EXEMPLE

Le taux d'accroissement de la fonction $f : x \to x^2$ entre 1 et $1 + h$ est donné par : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+h^2+2h-1^2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2$

Pour la fonction f : x→ x², ci-dessus, nous avons : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to o} 2 + h = 2$

Donc la fonction carrée $f : x \to x^2$ est dérivable en 1 et $f\,'(1) = 2$.

5 DERIVEE OUTIL POUR LA PHYSIQUE

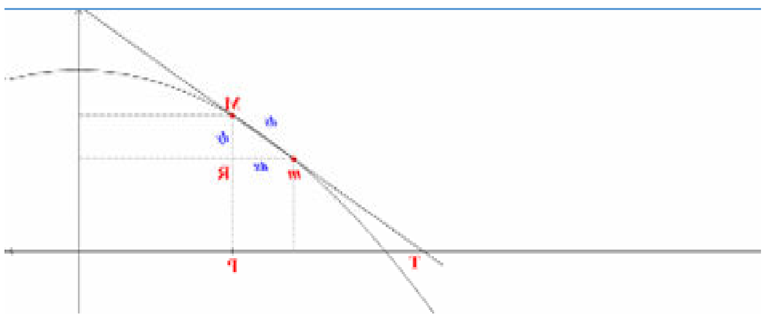
5.1 UN POINT D'HISTOIRE POUR DEUX NOTATIONS[6]

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a, les mathématiciens emploient la notation f '(a) due au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes …».

Pourquoi ces divergences ? Pour répondre à cette interrogation, un point d'histoire est nécessaire … Historiquement, la notion de dérivée découle de celle de différentielle.

Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressaient à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi Archimède (287 −, 212 −) propose une construction de la tangente en un point d'une spirale. Mais, il faut attendre la première moitié du XVIIème siècle avec Descartes, Fermat et Roberval, pour voir apparaître des méthodes plus générales de détermination de tangentes.

Ces méthodes donneront naissance au calcul différentiel développé séparément par Leibniz et par le mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac Newton (1642-1727).



Le calcul différentiel permit alors aux physiciens de déterminer la vitesse d'évolution d'un phénomène. Considérons par exemple le mouvement d'un mobile se déplaçant sur une droite. À un instant t, le mobile se trouve à une abscisse x.

6 . Références : « Des tangentes aux infiniment petits » IREM de Poitiers - 1998

Si on considère une distance infiniment petite dx correspondant à un temps infiniment petit dt, la vitesse instantanée à l'instant t s'exprime par $v(t) = \frac{dx}{dt}$

Ainsi, si l'on connaît la courbe d'évolution de x en fonction du temps, la vitesse à un instant donné sera le coefficient directeur de la tangente au point considéré.

5.2 FINALEMENT, A QUOI SERT UNE DERIVEE ?

La dérivée sert au moins à :

- Calculer, de manière approchée, une variation d'une grandeur en un point ;
- Remplacer localement une courbe par une droite.

Etudier une courbe est souvent plus difficile qu'étudier une droite. Pour faciliter l'étude d'une courbe au voisinage d'un point (par exemple une route dont le profil est courbe), on peut remplacer la courbe par la droite qui correspondrait `à une route dont le profil serait rectiligne, avec comme pente, la pente de la route en ce point (donc la dérivée du profil).

On peut montrer que cette droite est celle qui approche le mieux la courbe au voisinage du point. L'avantage est qu'on simplifie, mais l'inconvénient est qu'on n'a plus les valeurs exactes.

6 CONCLUSION

Dans l'enseignement-apprentissage de la notion de dérivée en RDC, seule la définition de la limite d'un taux d'accroissement est envisagée. Cette définition, présentée parfois de manière brute, ne peut donner exactement son sens. L'enseignant qui la soumet aux apprenants n'a pour objectif que de permettre à ces derniers de l'utiliser simplement dans les différents calculs. Sous d'autres cieux, cette notion est introduite, soit par la vitesse, soit par la succession de la vitesse et de calcul de la limite de taux d'accroissement dans le souci de chercher son sens.

Comme on veut éviter à l'enseignant de maths de faire la physique et vice versa, la collaboration entre les deux s'avère nécessaire et devraient aller dans une progression concertée tout expliquant chacun dans son langage ce que c'est la dérivée (la vitesse). C'est-à-dire la vitesse = coefficient directeur de la tangente au sens mathématique et elle est la longueur du vecteur vitesse au sens physique.

En nous appuyant sur ce que les prédécesseurs ont fait, nous avons cherché à introduire l'enseignement de la dérivée qui donne du sens en approximant une longueur d'une courbe parmi d'autres aspects. Pour y arriver, nous avons cherché à passer par certaines étapes pour introduire la dérivée en lui donnant tout son contenu notionnel. Trois fiches de préparation ont été confectionnées :

- La première portant sur la familiarité des termes utilisés : fonction, vitesse, accélération, limite, droite ;
- La deuxième fiche a fait allusion à l'étude d'une droite : droites parallèles, droites sécantes, pente de la droite, coefficient angulaire etc.
- La troisième a introduit la dérivée et après évaluation, les élèves ont su ce que c'est la dérivée et à quoi ça sert.

Donc, en dehors de la cinématique, de la limite des taux d'accroissement, ou de variation instantanée, nous sommes parvenus à approximer une longueur d'une courbe et avons démontré que la dérivée n'est rien d'autre que le calcul de la pente de cette droite courbe en passant par celle de la droite en général. Voilà ce qui confirme notre hypothèse.

REFERENCES

[1] BARBIN, E. (2006), La révolution mathématique du XVII^{e} siècle, Eclipse.

[2] BLOCH, L. (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11^{e} Ecole d'été de didactique des mathématiques* 21- 30/08/2001. Corps- France. Pensée Sauvage.

[3] BOS H.J. M. (1980), Newton, Leibniz and Leibnizian tradition, dans *from the calculus to set theory, 1630-1910 : an introductory history, I* Grattan-Guinness, London.

[4] *BROUSSEAU, G. (1998), La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée Sauvage.

[5] DALMEDICO, A & PEIFFER, J. (1986), Une histoire des mathématiques, Seuil, Paris.

[6] DIEUDONNE, J. (1986), Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann Editeur, Paris.

[7] MASCHIETTO, M. (2004), le jeu entre le point de vue local et point de vue global en analyse : une ingénierie didactique à visée diagnostique niveau de la première. Acte du colloque Mulhouse 8-9 mars 2002. IREM de Strasbourg.

[8] MOPONDI, B. (2015), Didactique des mathématiques- Eléments de contextualisation de l'enseignement en République Démocratique du Congo. Ed. L'harmattan.

[9] NEWTON, I (1740), la méthode des fluxions et les suites infinies, par M. le chevalier de Newton, traduction de Buffon.