International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 34 No. 3 Nov. 2021, pp. 513-520
© 2021 Innovative Space of Scientific Research Journals
http://www.ijias.issr-journals.org/

Intégrale double d'Henstock d'une fonction floue dont l'une des variables est floue

[Henstock Double integral of a fuzzy function where one of the variables is fuzzy]

Kumwimba Seya Didier, Zerbo Sieka, Banza Mwape Josline, and Ikuwe Ndjeka Graciel

Université de Lubumbashi, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et informatique,
Lubumbashi, BP 1825, RD Congo

ABSTRACT: In this article, Simpson's rule for the double integral of a fuzzy-valued function, one of whose variables is classical, is proposed using the Hausdorff distance. Also, fine partitions are introduced. The integration domain is a quasi-fuzzy rectangle.

KEYWORDS: fuzzy-valued function, Hausdorff distance, quasi-fuzzy rectangle, Henstock integral.

RESUME: Dans cet article, la règle de Simpson pour l'intégrale double d'une fonction à valeur floue dont l"une des variables est floue et l'autre classique, est proposée en utilisant la distance de Hausdorff. Le domaine d'intégration est un rectangle quasi-flou.

MOTS-CLEFS: fonction floue, distance de Hausdorff, rectangle quasi-floue, intégrale de Henstock.

1 INTRODUCTION

Le concept de l'intégrale flou a été introduit par Sugeno [9]. Dans l'ordre d'évaluer un ensemble flou, quelques méthodes numériques ont été proposées récemment. Wu [10, 11], Allahviranloo [1] et Fariborzi [2, 3] ont proposé quelques méthodes numériques pour calculer les intégrales floues en utilisant les méthodes quadratiques et la définition des ensembles de niveau.

Wu et Gong [10] ont proposé l'intégrale de Henstock d'une fonction à valeur floue et par la suite ont mis au point ce travail en appliquant le concept de différentiabilité de fonction floue.

Bede et Gal [4] ont appliqué la règle de quadrature pour évaluer l'intégrale d'une fonction à valeur floue.

Dans le présent article, nous développons cette idée pour une fonction à valeur floue (fonction à deux variables dont l'une est floue) en appliquant la règle de Simpson et en introduisant l'intégrale double de Henstock. Dans la section deux, nous présenterons quelques notions préliminaires sur les ensembles flous ainsi que quelques théorèmes fondamentaux que nous utiliserons par la suite. Dans la section trois, nous introduisons la règle de Simpson pour calculer l'intégrale double floue de Henstock sur un rectangle quasi-flou.

2 PRELIMINAIRES

Dans cette section, il est question de donner quelques notions basiques à la théorie des ensembles flous qui nous utiles dans la suite.

Définition (ensemble flou, [12]): Soit X un ensemble de référence non vide. Un sous ensemble flou (ensemble flou) de X est un ensemble non vide $\{ (x, \tilde{A}\,(x)) : x \in X\}$ de $X \times\ [0{,}1]$ tel que $\tilde{A} : X \mapsto\ [0{,}1]$. La fonction $\tilde{A}$ est souvent elle-même appelée ensemble flou. $\tilde{A}\,(x)$ désigne le degré d'appartenance de l'élément x à l'ensemble flou $\tilde{A}$.

Notation: on note par $\mathbb{F}\,(X)$ la collection de tous les sous-ensembles flous de X.

Propriétés [12, 13]: Soit $\tilde{u} : \mathbb{R} \mapsto\ [0{,}1]$ un sous ensemble flou. On dit que $\tilde{u}$ est un nombre flou s'il vérifie les propriétés suivantes:

i) $\tilde{u}$ est normal, c'est-à-dire $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{u}(x_0) = 1$;

ii) $\tilde{u}$ est flou convexe (c'est-à-dire $\tilde{u}\,(\lambda x +\ (1-\lambda)\, y \geq \min\{\tilde{u}\,(x), \tilde{u}\,(y)\,\}$, pour tout $\lambda \in\ [0{,}1], x, y \in \mathbb{R}$).

iii) $\tilde{u}$ est semi-continue sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \tilde{u}\,(x)\ - \tilde{u}(x_0) < \varepsilon$)

$\tilde{u}$ est a support compact, c'est- $\dot{a}$ -dire cl $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{u}\,(x)\ > 0\}$ est compact

L'ensemble de niveau α d'un ensemble flou vérifie les propriétés suivantes: pour tout $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha, \beta \in I =\ (0{,}1]$

iv) $\tilde{u}_0 = \mathbb{R}^n$,

v) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \tilde{u}_\beta \subset \tilde{u}_\alpha$

vi) $\tilde{u}_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \tilde{u}_\beta$

vii) $(\tilde{u} \vee \tilde{v})_{\ \alpha} = \tilde{u}_\alpha \cup \tilde{v}_\alpha, (\tilde{u} \wedge \tilde{v})_{\ \alpha} = \tilde{u}_\alpha \cap \tilde{v}_\alpha$

Le théorème suivant affirme que tout ensemble flou peut être représenté par une famille de ses α coupes $\{\tilde{u}_\alpha : \alpha \in I\}$, et même il peut être représenté par ses ensembles dénombrables de niveau α notés $\{\tilde{u}_\alpha : \alpha \in I \cap \mathbb{Q}\}$.

Théorème 1 [13]: Soit $\tilde{u} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\{\tilde{u}_\alpha : \alpha \in I\}$ une famille de ses ensembles de niveau α**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a:

$$\tilde{u}\,(x)\ = \sup_{\alpha \in I}\left[\alpha \cdot I_{\tilde{u}_\alpha}\,(x)\,\right] = \sup_{\alpha \in I \cap \mathbb{Q}}\left[\alpha \cdot I_{\tilde{u}_\alpha}\,(x)\,\right]$$

que l'on peut aussi écrire

$$\tilde{u}\,(x)\ = \sup\{\alpha \in I : x \in \tilde{u}_\alpha\} = \sup\{\alpha \in I \cap \mathbb{Q} : x \in \tilde{u}_\alpha\}$$

Soit $\{M_\alpha : \alpha \in I \cap Q\}$ une famille d'ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$M_\alpha \supset M_\beta \text{ pour tout } \alpha, \beta \in I \cap \mathbb{Q} \quad \text{avec} \quad \alpha < \beta$$

Alors la fonction $\tilde{u}$ définie par

$$\tilde{u}\,(x)\ = \sup\{\alpha \in I \cap \mathbb{Q} : x \in M_\alpha\}$$

est semi-continue supérieurement. De plus, elle vérifie

$$\tilde{u}_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap\ (0,1]} M_\beta\,, \alpha \in\ (0{,}1]$$

Propriétés (convexité, [13]): Un ensemble flou $\tilde{u}$ est dit convexe si pour tout $\alpha \in I$, l'ensemble de niveau $\tilde{u}_\alpha$ est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. $\tilde{u}$ est convexe dans le sens ci-dessus si et seulement si

$$\tilde{u}\,(\lambda x +\ (1-\lambda)\,y)\ \geq \min\{\tilde{u}\,(x), \tilde{u}\,(y)\,\} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in I$$

Notons que cette définition est différente de celle de la concavité (ou convexité) des fonctions au sens usuel:

$$u\,(\lambda x +\ (1-\lambda)\,y)\ \geq\ (ou \leq)\ \lambda u\,(x)\ +\ (1-\lambda)\,u\,(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in I$$

La famille de tous les ensembles flous convexes est notée par $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}^n)$. Et par $\mathbb{F}_{kc}(\mathbb{R}^n)$ celle des ensembles flous convexes tels que $\tilde{u}_{0_+} = cl\{x \in \mathbb{R}^n \mid u\,(x) > 0\} \in K_{kc}(\mathbb{R}^n)$.

Définition (Opérations, [12, 13]): Soient $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les deux opérations d'addition et de multiplication de la manière suivante:

$$(\tilde{u} \oplus \tilde{v})\,(x) = \sup\left\{\alpha \in I : x \in \tilde{u}_\alpha \underset{\text{int}}{\oplus} \tilde{v}_\alpha\right\}$$

et

$$(\lambda \odot \tilde{u})\,(x) = \begin{cases} \tilde{u}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ I_0\,(x) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

où I_0 est la fonction caractéristique du singleton $\{0\}$.

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, si $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{F}_{kc}(\mathbb{R}^n)$alors on a

$$(\tilde{u} \oplus \tilde{v})_\alpha = \tilde{u}_\alpha \underset{\text{int}}{\oplus} \tilde{v}_\alpha \text{ et } (\lambda \odot \tilde{u})_\alpha = \lambda \underset{\text{int}}{\odot} \tilde{u}_\alpha$$

On note que les opérations sur $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ sont les extensions des opérations addition et multiplication par un scalaire sur $K(\mathbb{R}^n)$.

Soient $\tilde{u}, \tilde{v}$, deux ensembles flous convexes, une autre définition de l'addition est donnée par

$$(\tilde{u} \oplus \tilde{v})\,(x) = \sup_{x = x_1 + x_2} \min\{\tilde{u}(x_1), \tilde{v}(x_2)\}, x \in \mathbb{R}^n$$

Définitions (distance de Hausdorff [12]): Les trois métriques suivantes sur $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}^n)$ sont souvent utilisées. Elles généralisent la métrique de Hausdorff: pour $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbf{D}_\infty\,(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{\alpha \in (0,1]} D(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha)$$

$$\mathbf{D}_1\,(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^1 D\,(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha) d\alpha$$

et

$$\mathbf{D}_p\,(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left\{\int_0^1 [D(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\alpha)]^p\, d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p > 1$$

On note par

$$\|\,\tilde{u}\,\|_{\mathbf{F}} := \mathbf{D}_\infty(\tilde{u}, I_0) = \sup_{\alpha > 0} \|\tilde{u}_\alpha\|_{\mathrm{K}}$$

3 LA METHODE DOUBLE DE SIMPSON POUR LES INTEGRALES DOUBLES FLOUES DE HENSTOCK

Soient $\tilde{f}: [a, b] \times [\tilde{c}, \tilde{d}] \to \mathbb{F}\,(\mathbb{R})$, Δ_m et Δ_n les subdivisions respectives de $[a, b]$ et $[\tilde{c}, \tilde{d}]$ données par:

$$\Delta_m : a = x_0 < x_1 < \cdots x_m$$

$$\Delta_n : \tilde{c} = \tilde{y}_0 \prec \tilde{y}_1 \prec \cdots \prec \tilde{y}_n$$

Soit π la partition définit par: $\pi: = \{\, ((\xi_i, \tilde{\eta}_j), [x_{i-1}, x_i] \times [\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j])$, où $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et $\tilde{\eta}_j \in [\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j]$, $i = 0, \ldots, m;\ j = 0, \ldots, n\}$

Nous allons dans ce qui suit définir l'intégrale de Henstock floue.

Soit la fonction gauge floue définie sur le rectangle quasi-flou $[a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$

$$\tilde{\delta}: [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}] \rightarrow \mathbb{F}\,(\mathbb{R})$$

la partition π est dite $\tilde{\delta}$ −fine si

$$(\xi_i, \tilde{\eta}_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j] \subseteq \Delta\,((\xi_i, \tilde{\eta}_j), \tilde{\delta}\,(\xi_i, \tilde{\eta}_j))$$

où $\Delta\,((\xi_i, \tilde{\eta}_j), \tilde{\delta}\,(\xi_i, \tilde{\eta}_j))$ est le disque quasi flou ouvert de centre $(\xi_i, \tilde{\eta}_j)$ et de rayon $\tilde{\delta}\,(\xi_i, \tilde{\eta}_j)$.

La fonction $\tilde{f}: [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}] \rightarrow \mathbb{F}\,(\mathbb{R})$ est dite intégrable au sens de Henstock si $\exists\, \tilde{I} \in \mathbb{F}\,(\mathbb{R})$ tel que $\forall\, \epsilon > 0$, il existe $\tilde{\delta}$ (dite fonction jauge floue) telle que pour toute subdivision $\tilde{\eta}$ −fine (cfr la partition π définie ci-haut), on a:

$$D\,(\sum_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \odot (\tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1}) \otimes \tilde{f}\,(\xi_i, \tilde{\eta}_j), \tilde{I}) < \epsilon$$

Où $\tilde{I} = (FDHI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{f}\,(x,\tilde{y})\, dx d\tilde{y}$ est l'intégrale double de Henstock floue.

Lemme:

1. Si f et g sont des fonctions floues intégrables au sens de Henstock et si $D\,(\tilde{f}\,(x,\tilde{y}), \tilde{g}\,(x,\tilde{y}))$ est Lebesgue intégrable, alors

$$D\,((FDHI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{f}\,(x,\tilde{y})\, d\tilde{y} dx, (FDHI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{g}\,(x,\tilde{y})\, d\tilde{y} dx) \leq (L) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} D\,(\tilde{f}\,(x,\tilde{y}), \tilde{g}\,(x,\tilde{y}))\, d\tilde{y} dx$$

2. Soit $\tilde{f}: [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}] \rightarrow \mathbb{F}\,(\mathbb{R})$, une fonction floue intégrable au sens de Henstock. Alors, $\forall\, (u,\tilde{v}) \in [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$ fixé, la fonction

$$\varphi_{(u,\tilde{v})}: [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}] \rightarrow \mathbb{F}\,(\mathbb{R}),$$

telle que $\varphi_{(u,\tilde{v})}\,(x,\tilde{y}) = D\,(\tilde{f}\,(u,\tilde{v}), \tilde{f}\,(x,\tilde{y}))$, est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$

Définition: Soit $\tilde{f}: [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$, une fonction floue bornée. Alors, la fonction

$\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\,(f,\cdot,\cdot): \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\,(\tilde{f},\delta_1,\delta_2) = \sup\,\{D\,(\tilde{f}\,(x_1,\tilde{y}_1), \tilde{f}\,(x_2,\tilde{y}_2)), (x_1,\tilde{y}_1), (x_2,\tilde{y}_2) \in [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}],$
$\| x_1 \ominus \tilde{y}_1 \|_{\mathbb{F}\,(\mathbb{R})} \leq \delta_1, \| x_2 \ominus \tilde{y}_2 \|_{\mathbb{F}\,(\mathbb{R})} \leq \delta_2\}$

où

- $\| x_1 \ominus \tilde{y}_1 \|_{\mathbb{F}\,(\mathbb{R})} := \| x_1 \ominus_{int} [\tilde{y}_{1_\alpha}^L, \tilde{y}_{1_\alpha}^U] \| = inf\{|x_1 - p|$, où $p \in [\tilde{y}_{1_\alpha}^L, \tilde{y}_{1_\alpha}^U], \forall \alpha[0,1]\}$
- $\| x_2 \ominus \tilde{y}_2 \|_{\mathbb{F}\,(\mathbb{R})} := \| x_2 \ominus_{int} [\tilde{y}_{2_\alpha}^L, \tilde{y}_{2_\alpha}^U] \| = inf\{|x_2 - s|$, où $s \in [\tilde{y}_{2_\alpha}^L, \tilde{y}_{2_\alpha}^U], \forall \alpha[0,1]\}$

De ce fait, $\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\,(\tilde{f},\delta_1,\delta_2) = sup\{D\,(\tilde{f}\,(x_1, \tilde{y}_{1_\alpha}^L, \tilde{y}_{1_\alpha}^U), \tilde{f}\,(x_2, \tilde{y}_{2_\alpha}^L, \tilde{y}_{2_\alpha}^U)), inf\{|x_1 - p|, p \in [\tilde{y}_{1_\alpha}^L, \tilde{y}_{1_\alpha}^U]\} \leq \delta_1, inf\{|x_2 - s|, s \in [\tilde{y}_{2_\alpha}^L, \tilde{y}_{2_\alpha}^U]\} \leq \delta_2\}$

ω est appelé module d'oscillation de la fonction $\tilde{f}$ sur $[a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$. Si de plus, $\tilde{f}$ est continue sur $[a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$, alors ω est appelé module de continuité uniforme de $\tilde{f}$.

Théorème 2: Les assertions suivantes sont vraies:

1. $D\,(\tilde{f}\,(x_1,\tilde{y}_1), \tilde{f}\,(x_2,\tilde{y}_2)) \leq \omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\,(\tilde{f}, \| x_1 \ominus \tilde{y}_1 \|, \| x_2 \ominus \tilde{y}_2 \|), \forall\, (x_1,\tilde{y}_1), (x_2,\tilde{y}_2) \in [a,b] \times [\tilde{c},\tilde{d}]$
2. $\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}(\tilde{f},\delta_1,\delta_2)$ est non décroissante en δ_1, δ_2.

3. $\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},0,0)\ = 0$
4. $\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},n\delta_1,m\delta_2)\ \leq nm\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},\delta_1,\delta_2), \forall\ \delta_1,\delta_2 \geq 0$ et $n,m \in \mathbb{N}$
5. $\omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2)\ \leq\ (\lambda_1+1)\ (\lambda_2+1)\ \omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},\delta_1,\delta_2)$
6. Si $[e,f] \subseteq [a,b]$ et $[\tilde{g},\tilde{h}] \preccurlyeq [\tilde{c},\tilde{d}]$, alors $\omega_{[e,f]\times[\tilde{g},\tilde{h}]}\ (\tilde{f},\delta_1,\delta_2)\ \leq \omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f},\delta_1,\delta_2)$

Définition (fonction lipchitzienne): Soit$\tilde{f}$: $[a,b]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}]\ \to \mathbb{F}\ (\mathbb{R})$.

$\tilde{f}$ est dite (L_1,L_2) lipshitzienne si $\forall\ (x_1,\tilde{y}_1),(x_2,\tilde{y}_2)\ \in\ [a,b]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}]$,

$$D\ (\tilde{f}\ (x_1,\tilde{y}_1),\tilde{f}\ (x_2,\tilde{y}_2))\ \leq L_1|x_1-x_2| + D\ (\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)$$

Théorème 3 [7]: Soit $\tilde{f}$: $[a,b]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}]\ \to \mathbb{F}\ (\mathbb{R})$, une fonction floue bornée intégrable au sens de Henstock. Alors, pour toute subdivision (partition) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$; $\tilde{c} = \tilde{y}_0 < \tilde{y}_1 < \cdots < \tilde{y}_n = \tilde{d}$ et pour tous points $\xi_i \in [x_{i-1},x_i],\eta_j \in [\tilde{y}_{j-1},\tilde{y}_j$, nous avons:

$$D\ ((FHDI)\ \int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx, \sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes \tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \|\ \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1}\ \|_{\mathbb{F}}\ \ (\mathbb{R})\ w\ (f,(x_i-x_{i-1},\|\ \tilde{y}_j\ominus\tilde{y}_{j-1}\ \|)$$

Preuve:

Suivant les subdivisions de $[a,b]$ et $[\tilde{c},\tilde{d}]$ données dans le théorème et par additivité de l'intégrale de Henstock, nous avons:

$$D\ ((FHDI)\ \int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx, \sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes \tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j))$$

$$= D\ (\sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx, \sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes \tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j)$$

Dès lors que $(FHDI)\ \int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{k}\ d\tilde{y}dx =\ (b-a)\ \odot\ (\tilde{d}\ominus\tilde{c})\ \otimes \tilde{k}$ où $\tilde{k}$ est une constante floue, nous avons ce qui suit:

$$D\ (\sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx, \sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes \tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j)$$

$$= D\ (\sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx, \sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j d\tilde{y}dx)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} D\ \ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j},\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ \ (\xi_i,\eta_j d\tilde{y}dx)$$

Cette inégalité est due au fait que D est la distance de Hausdorff et suivant une de ses propriétés. D'après le lemme précité, on a:

$$D\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j},\ (FHDI)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}\tilde{f}\ \ (\xi_i,\eta_j d\tilde{y}dx)\ \leq\ (L)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} D\ \ (\tilde{f}\ (x,\tilde{y}),\tilde{f}\ (\xi_i,\tilde{\eta_j}))\ d\tilde{y}dx$$

Et d'après le théorème 2, on a:

$$D\left(\tilde{f}\,(x,\tilde{y}),\tilde{f}\,(\xi_i,\tilde{\eta_j})\right)\ \leq w_{[x_{i-1},x_i]\times[\tilde{y},\tilde{d}]}\ \left(f,(x_i-x_{i-1}),\Vert\ \tilde{y}_j\ominus\tilde{y}_{j-1}\ \Vert\right)$$

$$D\left((FHDI)\int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx,\sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes\tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j)\right)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ (L)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}D\ \left(\tilde{f}\ (x,\tilde{y}),\tilde{f}\ (\xi_i,\tilde{\eta_j})\right)d\tilde{y}dx$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ (L)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j}w_{[x_{i-1},x_i]\times[\tilde{y},\tilde{d}]}\ \left(f,(x_i-x_{i-1}),\Vert\ \tilde{y}_j\ominus\tilde{y}_{j-1}\ \Vert\right)d\tilde{y}dx$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \Vert\ \tilde{y}_j\ominus\tilde{y}_{j-1}\ \Vert\ \omega_{[x_{i-1},x_i]\times[\tilde{y},\tilde{d}]}\ \left(f,(x_i-x_{i-1}),\Vert\ \tilde{y}_j\ominus\tilde{y}_{j-1}\ \Vert\right)$$

Corollaire 1: Soit $\tilde{f}$: $[a,b]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}]\ \rightarrow\mathbb{F}\ (\mathbb{R})$ une fonction floue bornée intégrable au sens de Henstock.

Alors, pour $m=n=3$, on a:

$$D\left((FHDI)\int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx,\sum_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i-x_{i-1})\ \odot\ (\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})\ \otimes\tilde{f}\ (\xi_i,\eta_j)\right)$$

$$\leq\ (\alpha-a)\ \Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert\ \omega_{[a,\alpha]\times[\tilde{c},\gamma]}\ (\tilde{f},(\alpha-a),\Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert)$$

$$+\,(\beta-a)\ \Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert\ \omega_{[a,\beta]\times[\tilde{c},\gamma]}\ (\tilde{f},(\beta-a),\Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert)$$

$$+\,(b-\beta)\ \Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert\ \omega_{[\beta,b]\times[\tilde{c},\gamma]}\ (\tilde{f},(b-\beta),\Vert\ \gamma\ominus\tilde{c}\ \Vert)$$

$$+\,(\alpha-a)\ \Vert\ \delta\ominus\tilde{c}\ \Vert\ \omega_{[a,\alpha]\times[\gamma,\delta]}\ (\tilde{f},(\alpha-a),\Vert\ \delta\ominus\gamma\ \Vert)$$

$$+\,(\beta-\alpha)\ \Vert\ \delta\ominus\gamma\ \Vert\ \omega_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]}\ (\tilde{f},(\beta-\alpha),\Vert\ \delta-\gamma\ \Vert)$$

$$+\,(b-\beta)\ \Vert\ \delta\ominus\gamma\ \Vert\ \omega_{[\beta,b]\times[\gamma,\delta]}\ (\tilde{f},(b-\beta),\Vert\ \delta\ominus\gamma\ \Vert)$$

$$+\,(\alpha-a)\ \Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert\ \omega_{[a,\alpha]\times[\delta,\tilde{d}]}\ (\tilde{f},(\alpha-a),\Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert)$$

$$+\,(\beta-\alpha)\ \Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert\ \omega_{[\alpha,\beta]\times[\delta,\tilde{d}]}\ (\tilde{f},(\beta-\alpha),\Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert)$$

$$+\,(b-\beta)\ \Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert\ \omega_{[\beta,b]\times[\delta,\tilde{d}]}\ (\tilde{f},(b-\beta),\Vert\ \tilde{d}\ominus\delta\ \Vert)$$

$\forall\ \alpha,\beta\in\ [a,b]$ et $\gamma,\delta\in\ [\tilde{c},\tilde{d}],(u,u')\ \in\ [a,\alpha]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}],(v,v')\ \in\ [\alpha,\beta]\ \times\ [\gamma,\delta]$ et $(w,w')\ \in\ [\beta,b]\ \times\ [\delta,\tilde{d}]$

Où $\xi_1=u,\xi_1=v,\xi_3=w$ et $\eta_1=u',\eta_2=v',\eta_3=w'$

Corollaire 2: Soit $\tilde{f}$: $[a,b]\ \times\ [\tilde{c},\tilde{d}]\ \rightarrow\mathbb{F}\ (\mathbb{R})$ une fonction floue bornée, intégrable qu sens de Henstock. Alors,

$$D\ \left((FHDI)\ \int_a^b\int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}}\tilde{f}\ (x,\tilde{y})\ d\tilde{y}dx,\frac{(b-a)\ \odot\ (\tilde{d}\ominus\tilde{c})}{36}\otimes\ [\tilde{f}\ (a,\tilde{c})\ \oplus 4\odot\tilde{f}\ (\frac{a+b}{2},\tilde{c})\ \oplus\tilde{f}\ (b,\tilde{c})]\right.$$

$$\oplus\, 4 \odot\ [\tilde{f}\ (a, \frac{\tilde{c} \oplus \tilde{d}}{2})\ \oplus 4 \odot \tilde{f}\ (\frac{a+b}{2}, \frac{\tilde{c} \oplus \tilde{d}}{2})\ \oplus \tilde{f}\ (b, \frac{\tilde{c} \oplus \tilde{d}}{2})]\ \oplus\ [\tilde{f}\ (a, d)\ \oplus 4 \odot \tilde{f}\ (\frac{a+b}{2}, \tilde{d})\ \oplus \tilde{f}\ (b, \tilde{d})])$$

$$\leq 9\,(b-a)\ \| \tilde{d} \ominus \tilde{c}]_{\mathbb{F}(\mathbb{R})}\, \omega_{[a,b]\times[\tilde{c},\tilde{d}]}\ (\tilde{f}, (\frac{b-a}{6}), \| \frac{\tilde{c} \ominus \tilde{d}}{6} \|)$$

Théorème 4: Soit $\tilde{f}: [a,b] \times [\tilde{c}, \tilde{d}] \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$, une fonction lipschitzienne avec les constantes L_1 et L_2. Alors, pour toute subdivision Δ_m et Δ_n et $\forall\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\ldots,m$ et $\eta_j \in [\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j, j = 1,\ldots,n$, nous avons:

$$D\ ((FHDI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{f}\ (x, \tilde{y})\, d\tilde{y} dx, \sum_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i - x_{i-1}) \odot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}) \otimes \tilde{f}\ (\xi_i, \eta_j))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (L_1 \| \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \|]\, (x_i - x_{i-1}) + L_2\, (x_i - x_{i-1})\, \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1})$$

Preuve:

D'après les relations $(*)$ et $(**)$ (Cfr démonstration théorème 3), nous avons ce qui suit:

$$D\ ((FHDI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{f}\ (x, \tilde{y})\, d\tilde{y} dx, \sum_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i - x_{i-1}) \odot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}) \otimes \tilde{f}\ (\xi_i, \eta_j))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (L) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} D\ (\tilde{f}\ (x, \tilde{y}), \tilde{f}\ (\xi_i, \widetilde{\eta_j}))\, d\tilde{y} dx \qquad (1)$$

Par la définition d'une fonction (L_1, L_2) -lipschitzienne, nous avons que

$D\ (\tilde{f}\ (x, \tilde{y}), \tilde{f}\ (\xi_i, \widetilde{\eta_j}))\ \leq L_1 |x - \xi_i| + L_2 D\ (\tilde{y}, \eta_j)$ (2)

ou encore

$$D\ (\tilde{f}\ (x, \tilde{y}), \tilde{f}\ (\xi_i, \widetilde{\eta_j}))\ \leq L_1 |x - \xi_i| + L_2 \| \tilde{y}, \eta_j \|$$

(1) et (2) donnent:

$$D\ ((FHDI) \int_a^b \int_{\tilde{c}}^{\tilde{d}} \tilde{f}\ (x, \tilde{y})\, d\tilde{y} dx, \sum_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n}\ (x_i - x_{i-1}) \odot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1}) \otimes \tilde{f}\ (\xi_i, \eta_j))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (L) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} (L_1 |x - \xi_i| + L_2 \| \tilde{y}, \eta_j \|)\, d\tilde{y} dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} L_1 |x - \xi_i| d\tilde{y} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} L_2 \| \tilde{y}, \eta_j \|\, d\tilde{y} dx]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [L_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} |x - \xi_i| d\tilde{y} dx + L_2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} \| \tilde{y} \ominus \eta_j \|\, d\tilde{y} dx]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [L_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \| \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \|\, |x - \xi_i| dx + L_2 \| \tilde{y} \ominus \eta_j \| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\tilde{y}_{j-1}}^{\tilde{y}_j} d\,\tilde{y} dx]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [L_1 \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - \xi_i| dx + L_2 \parallel \tilde{y} \ominus \eta_j \parallel \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - \xi_i| dx]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [L_1 \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel \frac{1}{2} ((x_{i-1} - \xi_i)^2 + (x_i - \xi_i)^2) + L_2 \parallel \tilde{y} \ominus \eta_j \parallel \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel (x_i - x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} L_1 \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel \frac{1}{2} ((x_{i-1} - \xi_i)^2 + (x_i - \xi_i)^2) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} L_2 \parallel \tilde{y} \ominus \tilde{\eta}_j \parallel \parallel \tilde{y}_j \ominus \tilde{y}_{j-1} \parallel (x_i - x_{i-1})$$

4 CONCLUSION

Dans ce article, il a été question d'introduire et d'évaluer l'intégrale double floue de Henstock dont l'une des variables est floue, en appliquant la règle de Simpson. Il s'agit de calculer l'intégrale sur un domaine quasi-flou rectangulaire. Dans ce sens, nous avons établi et démontré un théorème qui montre la limite supérieure de la distance entre les valeurs exactes et approximatives. Pour la suite, il serait envisageable de faire les mêmes analyses pour l'intégrale d'une fonction floue à deux variables floues sur un domaine rectangulaire flou.

REFERENCES

[1] Allaviranlloo T., Romberg integration for fuzzy function, Appl. Math Comput 168 (2) (2005) 866-876.

[2] Araghi M. A. F., Numerical solution of fuzzy integrals, Proceeding of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Crete, Greece, (2006) 32–35.

[3] Araghi M. A. F., Numerical solution of the fuzzy definite integrals using the Newton Cotes integration methods, 5th Iranian Conference of Fuzzy Systems (2004) 283-290.

[4] Bede B. and Gal S. G., Quadrature rules for integrals of fuzzy number valued functions, Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 359-380.

[5] Burden R. L. and Fairs J. D., Numerical Analysis, Brooke/cole, 7th edition, USA, 2001.

[6] Dubois D. and Prade H., Fuzzy Numbers: an Overview, in Analysis of Fuzzy Information, Vol. 1, CRC Press, Boca Raton, FL, (1987) 33–39.

[7] Khadem F. et Araghi M. A. F., Avaluating a fuzzy Henstock double integral using double Simpson's rule, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics (2014) 675-686.

[8] Lee P. Y., Lanzhou Lectures on Henstock Integration, World Scientific, Singapore 1989.

[9] Sugeno M. Theorie of fuzzy integrals and its applications, Phd Dissertation thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[10] Wu C. and Wong Z., On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions, Fuzzy Sets and Systems 120 (2000) 1-25.

[11] Wu H. C., Evalute fuzzy Riemann integral using the Monte Carlo method, J. Math. Anal. Appl. 264 (2001) 324-343.

[12] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Information and control, 8 (1965) 338-353.

[13] Goetschel R., Voxman W., Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986) 31-43.