

Approche analytique de l'étude de la flexion d'une poutre console et simulation numérique avec le code de calcul Cast3M

[Analytical approach to the study of the bending of a console beam and numerical simulation with the Cast3M calculation code]

Ahmed Doumbia¹ and Pierre Jean-Marie Richard Dablé²

¹Département Sciences de la Terre, UFR Environnement, Université Jean Lorougnon Guédé, Daloa, Côte d'Ivoire

²Département Génie Mécanique et Energétique, Institut National Polytechnique Houphouët-Boigny, Yamoussoukro, Côte d'Ivoire

Copyright © 2021 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The physical reality is often very complicated to be able to analytically solve mechanical problems. Currently, the only approaches making it possible to meet these needs are based on numerical methods based on the discretization of the problems. In mechanical and civil engineering, significant efforts are currently focused on the use of numerical simulations to solve these problems. This work is a comparative approach focusing on the analytical method to solve the problem of the bending of a beam and a numerical approach based on simulation by the Cast3M calculation code. The results obtained are of great agreement.

KEYWORDS: Beam, analytical approach, Discretization, Finite elements, numerical simulation.

RESUME: La réalité physique est souvent très compliquée pour pouvoir résoudre analytiquement des problèmes mécaniques. Actuellement, les seules approches permettant de répondre à ces besoins sont fondées sur les méthodes numériques basées sur la discrétisation des problèmes. En génie mécanique et civil, des efforts importants portent actuellement sur l'utilisation des simulations numériques pour résoudre ces problèmes. Ce travail est une approche comparative portant sur la méthode analytique pour résoudre le problème de la flexion d'une poutre et une approche numérique basée sur la simulation par le code de calcul Cast3M. Les résultats obtenus sont d'une grande concordance.

MOTS-CLEFS: Poutre, approche analytique, Discrétisation, Eléments finis, simulation numérique.

1 INTRODUCTION

Pour les problèmes mécaniques complexes, la résolution analytique se trouve très souvent limitée. Les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ces problèmes est une alternative très efficace utilisée dans le domaine de la mécanique pour résoudre ces problèmes complexes [1]. De toutes ces méthodes de discrétisation, la méthode des éléments finis est la plus utilisée car elle permet, d'une part, de traiter des systèmes très variés avec des géométries et des comportements complexes et, d'autre part, couvre de nombreux domaines de la physique. Sa mise en œuvre est rendue facile grâce au développement actuel de l'outil informatique. Son champ d'application ne cesse de s'élargir [2], [3]. Cette méthode doit son succès à sa formulation qui utilise des procédés standards se répétant au cours de la résolution de problèmes de nature différentes [4], [5], [6]. Ce travail consiste à traiter analytiquement et numériquement par des simulations utilisant le code de calcul Cast3m la flexion simple statique d'une poutre. Deux cas de figure sont traités. La poutre, encastree à une extrémité à gauche et libre à l'autre à droite, est soumise à une charge ponctuelle puis uniforme sur toute sa longueur. L'objectif est de comparer les résultats obtenus.

2 FLEXION SIMPLE

La flexion est la déformation d'un objet qui se traduit par une courbure. Dans le cas de la poutre, elle tend à rapprocher les deux extrémités. En effet, une poutre est sollicitée en flexion simple lorsque toutes les forces qui lui sont appliquées sont perpendiculaires à la ligne moyenne, et soit situées dans le plan de symétrie, soit réparties symétriquement par rapport à celui-ci, ou concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

Le torseur des efforts de cohésion se résume à deux composantes: l'effort tranchant T_y et le moment fléchissant M_{fz} [7] (Fig. 1.).

Pour obtenir l'équation de la déformée qui est sous la forme $y = f(x)$, on résout l'équation suivante par deux intégrations successives:

$$M_f = EIy'' \quad (1)$$

Avec :

E : module de Young.

I : le moment d'inertie de la section transversale de la poutre calculé par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité de la section perpendiculairement au chargement,

y : ordonnée de la fibre étudiée,

$M_f(x)$: moment fléchissant dans la section d'abscisse x considéré.

Les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions aux limites (Tableau 1) [8], [9]:

Tableau 1. Conditions aux limites

Conditions aux limites		
	Encastrement	Appuis simple
Flèche	$y = 0$	$y = 0$
Rotation	$y' = 0$	

Notre étude porte sur une poutre rectangulaire à section symétrique. Dans ce cas, la fibre neutre passe par le centre de gravité et y varie de la valeur $-\frac{h}{2}$ à la valeur $\frac{h}{2}$. (Fig. 2.).

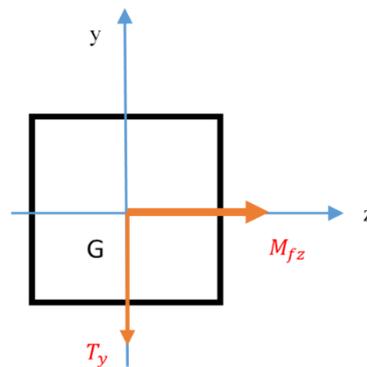


Fig. 1. Eléments de réduction du torseur des efforts de cohésion

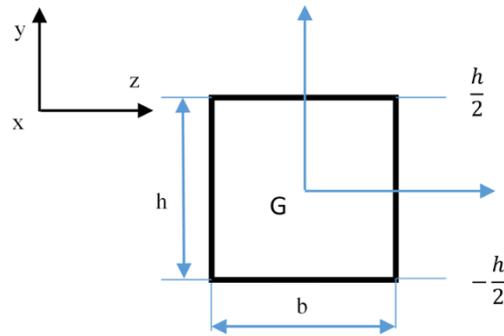


Fig. 2. Caractéristiques géométriques du profil de la poutre

3 ETUDE ANALYTIQUE DE LA FLEXION SIMPLE D'UNE POUTRE RECTANGULAIRE

Dans cette étude, on se propose d'évaluer analytiquement les moments, les rotations et les déformations de la flexion simple statique d'une poutre rectangulaire de géométrie simple à deux dimensions dans l'espace tridimensionnel.

3.1 PREMIER CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE CHARGE CONCENTREE

On cherche à étudier la flexion d'une poutre encastree par une extrémité et libre de l'autre, soumise à une charge concentrée $P = 150 \text{ N}$, de longueur $L = 0.20 \text{ m}$, de section rectangulaire avec les caractéristiques géométriques $b = 0.005 \text{ m}$, $h = 0.007 \text{ m}$, $E = 124\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.33$ (Fig. 3.). Les expressions du moment fléchissant, de la rotation et de la flèche sont données dans le tableau 2.

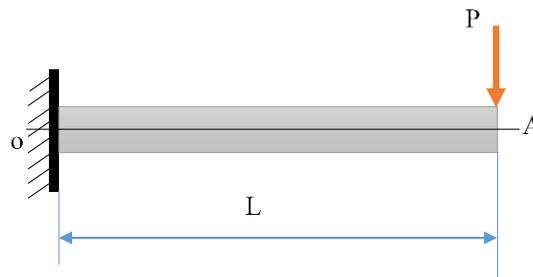


Fig. 3. Poutre encastree avec une force concentrée

Les équations du moment fléchissant, de la rotation et de la flèche sont respectivement données par les équations (2), (3) et (4) pour $x \in [0, L]$:

$$M_f = -P(L - x) \tag{2}$$

$$\theta = -\frac{P}{2EI}(2L - x)x \tag{3}$$

$$y = -\frac{P}{6EI}(3L - x)x^2 \tag{4}$$

Les diagrammes respectifs sont donnés aux Figures 4, 5 et 6.

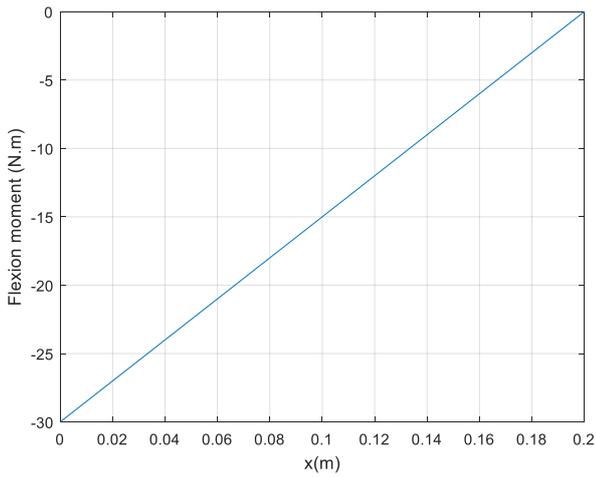


Fig. 4. Evolution du moment fléchissant le long de la poutre

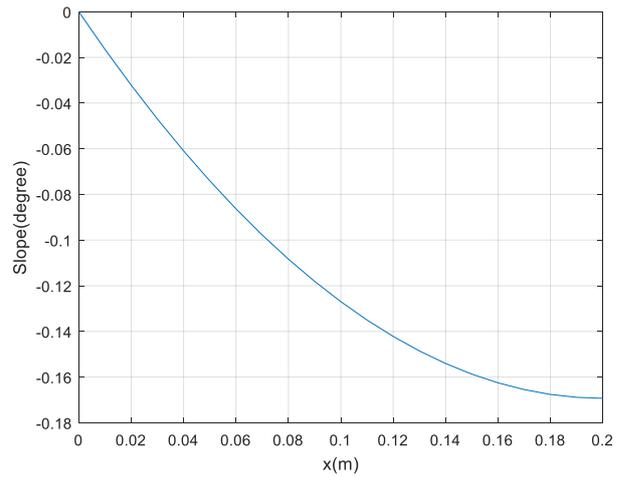


Fig. 5. Evolution de la rotation de la section droite

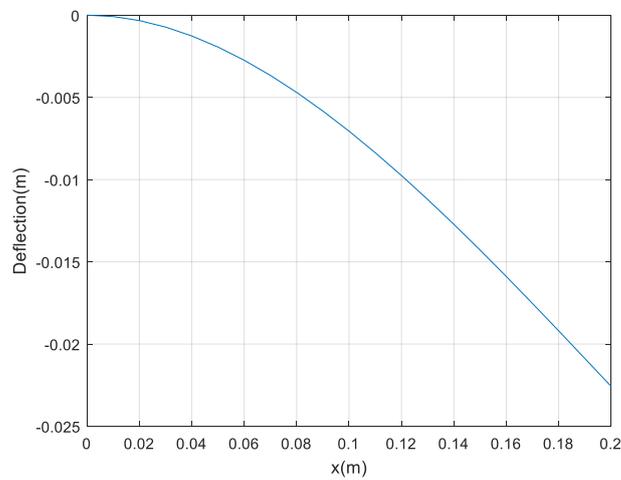


Fig. 6. Evolution de la flèche le long de la poutre

3.2 DEUXIEME CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE UNIFORMEMENT CHARGEE

On considère, comme précédemment, la flexion d'une poutre encastree par une extrémité et libre de l'autre. Elle est soumise à une charge uniformément répartie $q = 70 \text{ N/m}$ sur toute sa longueur égale à $L = 0.20 \text{ m}$. Sa section est rectangulaire avec les caractéristiques géométriques $b = 0.005 \text{ m}$, $h = 0.007 \text{ m}$, $E = 124\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.33$ (Fig. 7.)

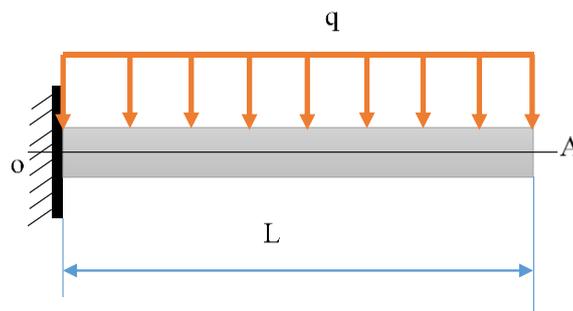


Fig. 7. Poutre encastree libre uniformément chargée

Les équations du moment fléchissant, de la rotation et de la flèche sont respectivement données par les équations (5), (6) et (7) pour $x \in [0, L]$:

$$M_f = -\frac{q}{2} (L - x)^2 \quad (5)$$

$$\theta = \frac{-qx}{6EI} (x^2 - 3Lx + 3L^2) \quad (6)$$

$$y = \frac{-qx^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (7)$$

Les diagrammes respectifs sont donnés aux Figures 8, 9 et 10.

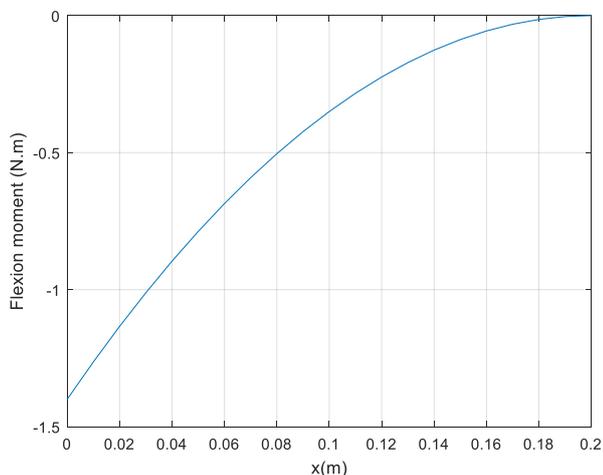


Fig. 8. Evolution du moment fléchissant le long de la poutre

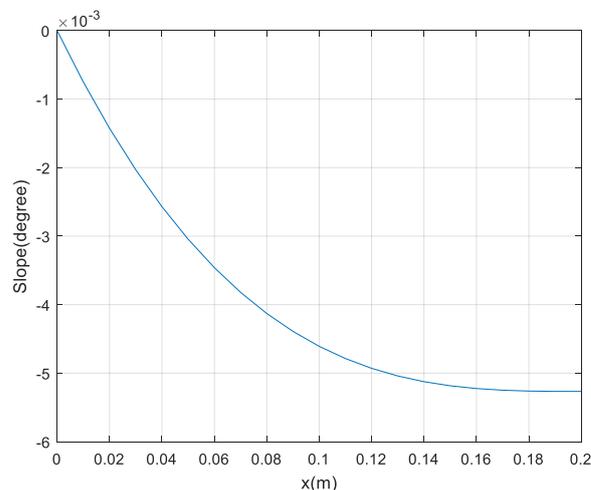


Fig. 9. Evolution de la rotation de la section droite

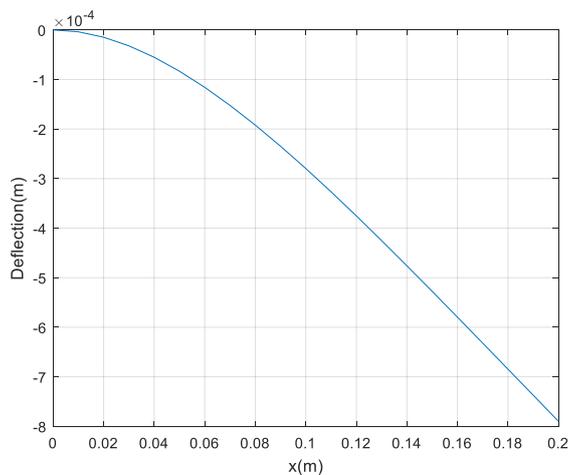


Fig. 10. Evolution de la flèche le long de la poutre

4 SIMULATION NUMERIQUE DE LA FLEXION D'UNE POUTRE RECTANGULAIRE

Pour cette simulation, nous adoptons les hypothèses de la mécanique des milieux continus en statique. On suppose que le matériau (un cuivre) est élastique linéaire isotrope et que la poutre se déforme suffisamment pour que les l'hypothèse des petites perturbations soit vérifiée. L'action extérieure sur la poutre est modélisée par un encastrement (à gauche) et un effort ponctuel (extrémité droite) pour le premier cas de figure; pour le second cas, une charge uniformément répartie est appliquée sur toute la longueur. Nous choisissons de faire des simulations par le code de calcul Cast3m. Les résultats obtenus sont les suivants:

4.1 PREMIER CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE CHARGE CONCENTREE

Les différentes grandeurs calculées sont représentées à la figure 11.

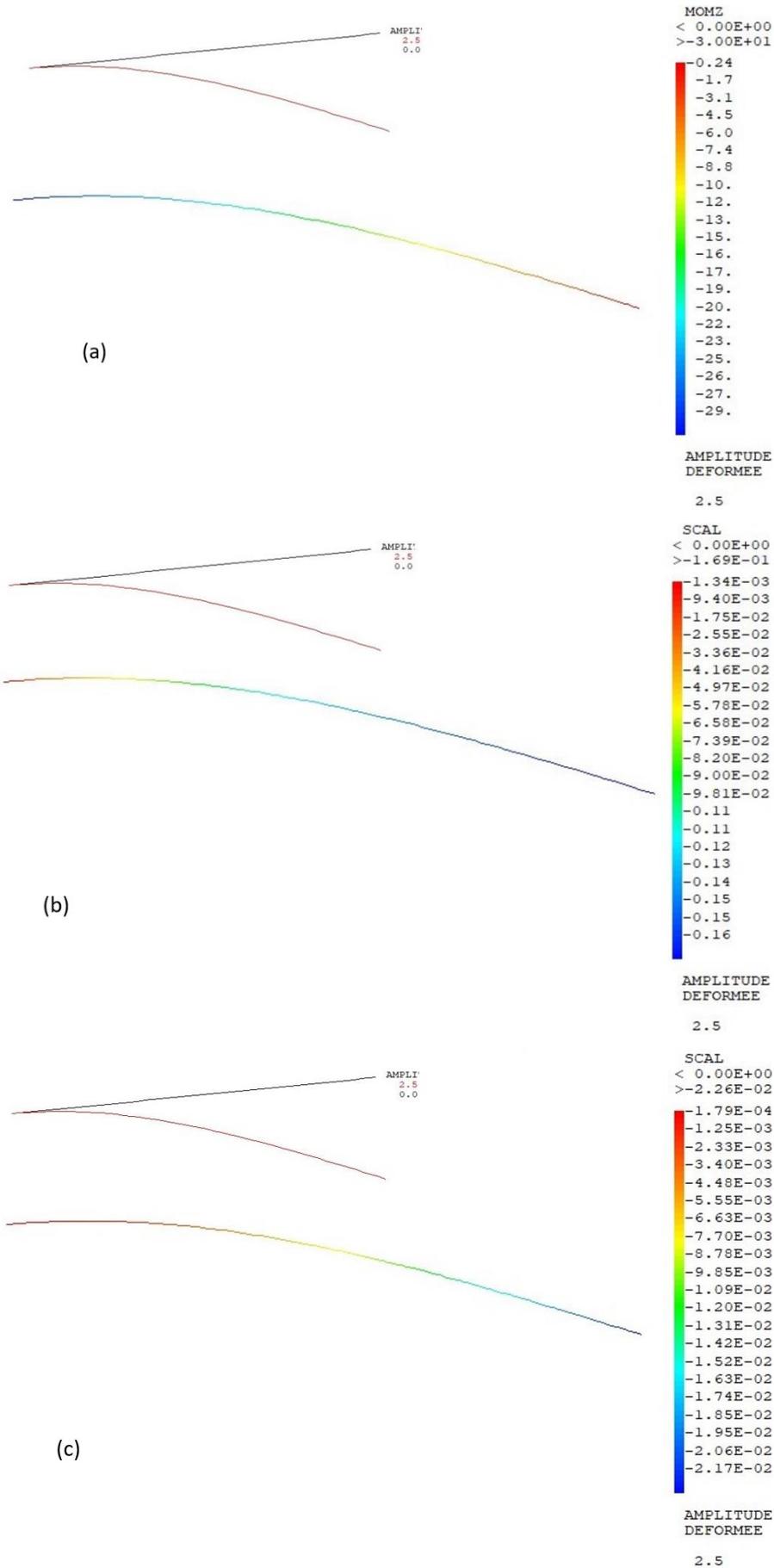


Fig. 11. Diagrammes de (a) Moment fléchissant, (b) Rotation, (c) Flèche

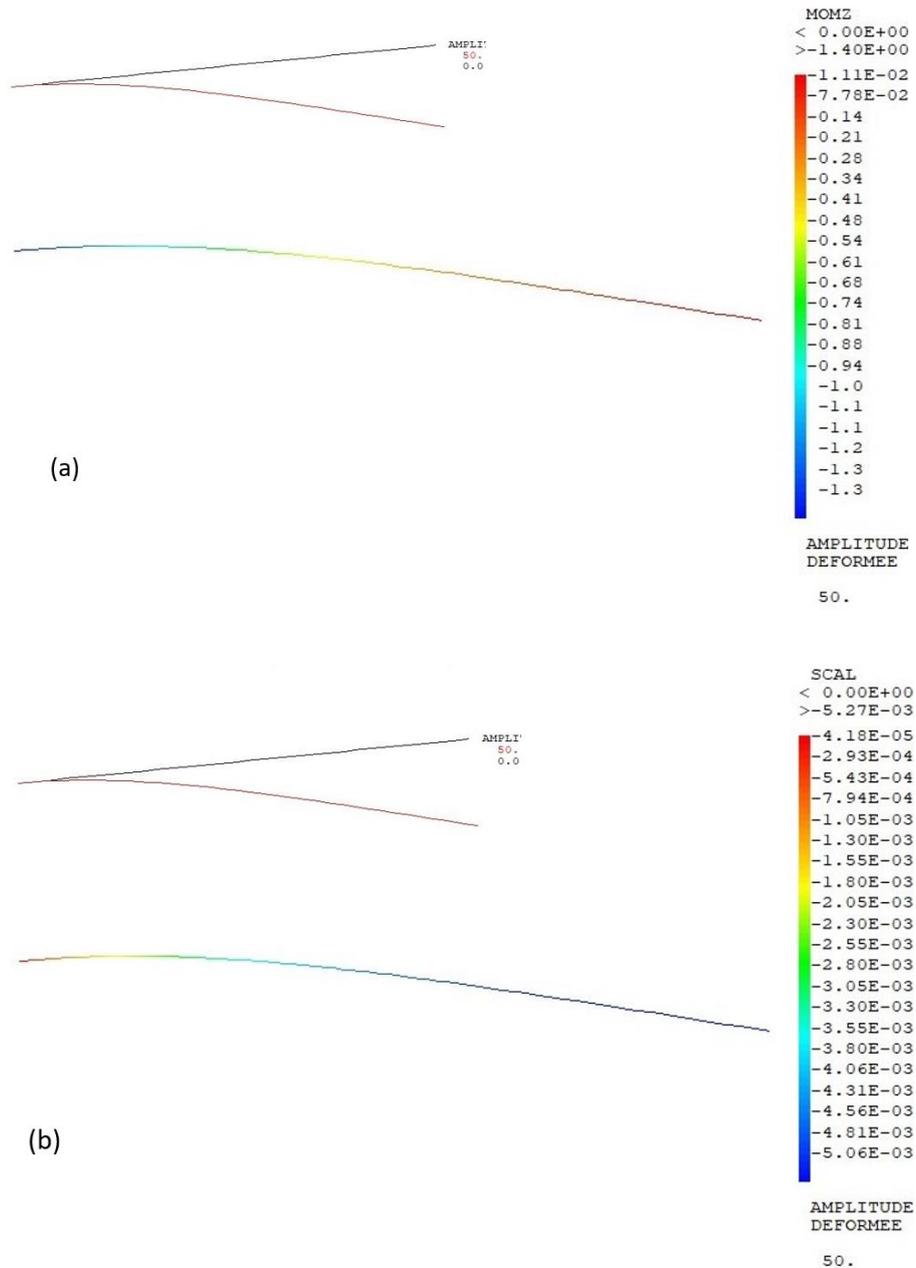
Les différentes valeurs extrêmes sont indiquées dans le tableau 2.

Tableau 2. Valeurs extrêmes du moment fléchissant, de la rotation et de la flèche

	Moment de flexion	Rotation	Flèche
Valeurs maximales	-30.00	-0.1693	$-2.257.10^{-2}$
Valeurs minimales	0	0	0

4.2 DEUXIEME CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE UNIFORMEMENT CHARGEE

Les différentes grandeurs calculées sont représentées à la figure 12.



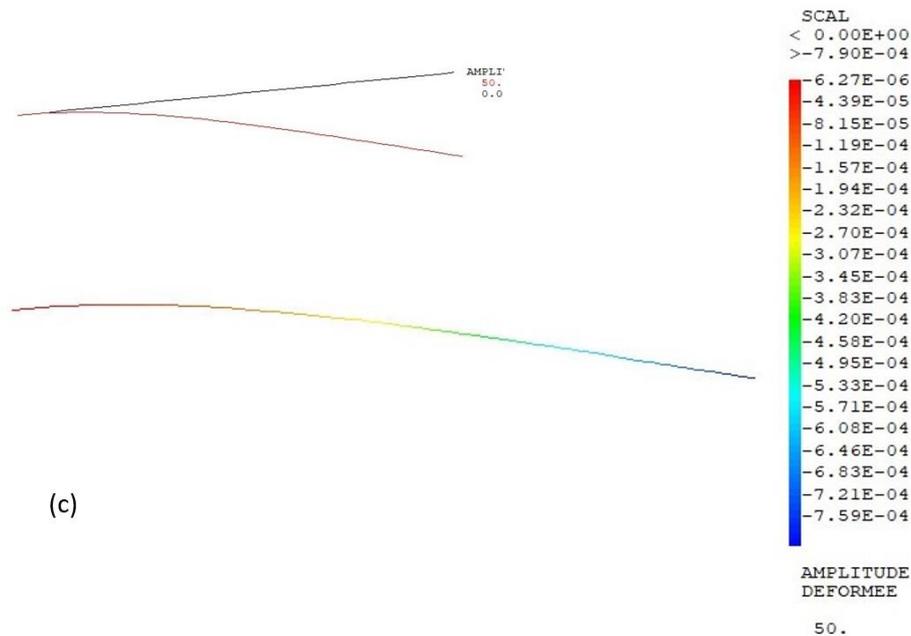


Fig. 12. Diagrammes de (a) Moment fléchissant, (b) Rotation, (c) Flèche

Les différentes valeurs extrêmes sont indiquées dans le tableau 3.

Tableau 3. Valeurs extrêmes du moment fléchissant, de la rotation et de la flèche

	Moment de flexion (N.m)	Rotation (dégré)	Flèche (m)
Valeurs maximales	-1.4	$-0.5268 \cdot 10^{-2}$	$-0.7901 \cdot 10^{-3}$
Valeurs minimales	0	0	0

5 COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUES ET DE LA SIMULATION NUMERIQUES

5.1 PREMIER CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE CHARGE CONCENTREE

Nous notons que les valeurs des moments, des rotations et des flèches de flexion trouvées par l'étude analytique et celles de la simulation numérique par le code de calcul CAST3M (Fig. 13, Tableau 4). Cela permet de valider ces simulations. Nous avons également tracé les courbes représentatives de ces grandeurs analytiques et celles obtenues par la simulation; les superpositions de ses courbes montre la grande concordance.

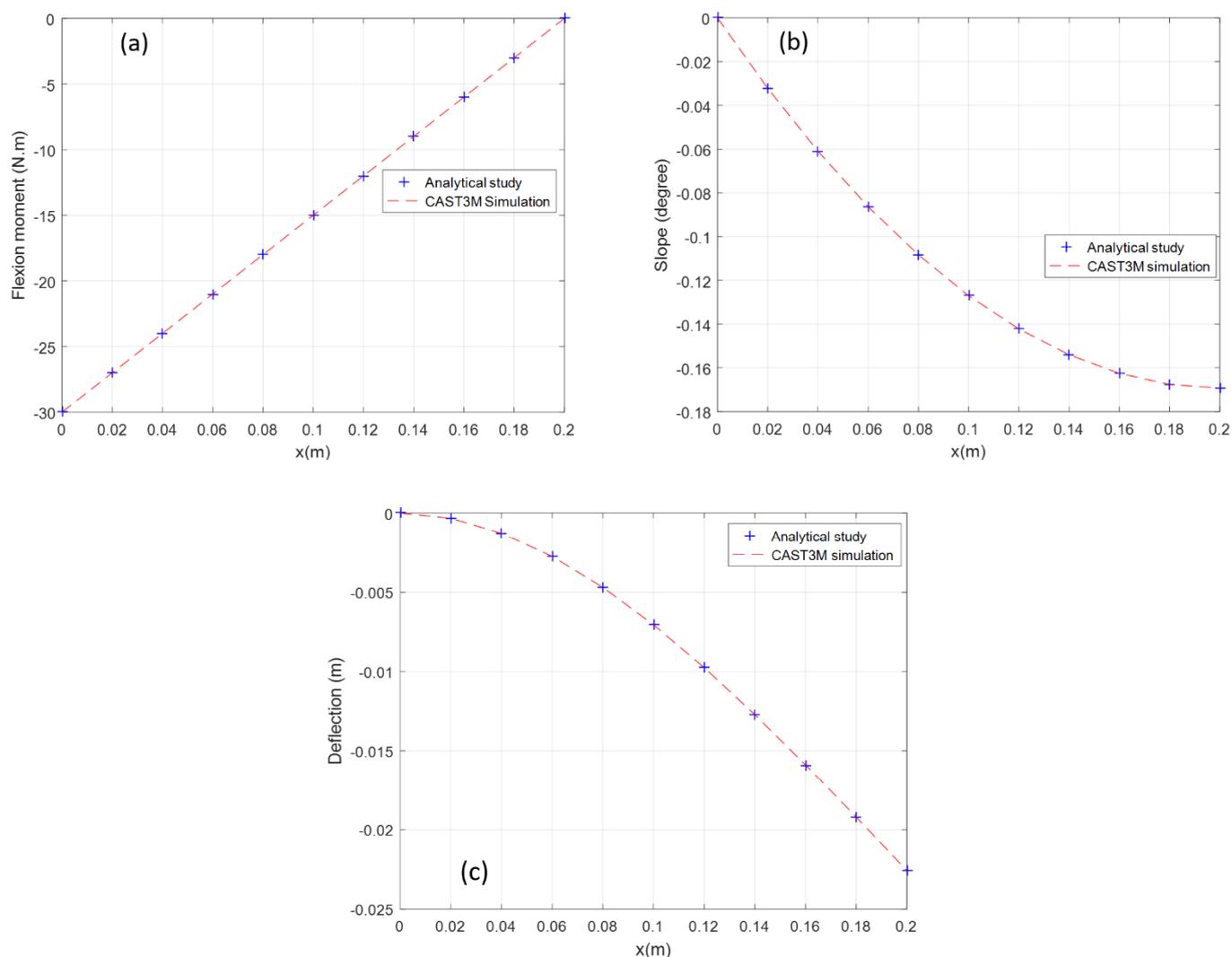


Fig. 13. Graphes de comparaison (a) Moment fléchissant, (b) rotation, (c) Flèche

Tableau 4. Comparaison des Moment fléchissant, des rotations et des Flèche

X (m)	Moment de flexion (N.m)		Rotation (dégré)		Flèche (m) x10 ⁻²	
	Analytique	CAST3M	Analytique	CAST3M	Analytique	CAST3M
0.00	-30	-30	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.02	-27	-27	-0.03216	-0.03216	-0.03273	-0.03273
0.04	-24	-24	-0.06094	-0.06094	-0.12640	-0.12640
0.06	-21	-21	-0.08633	-0.08633	-0.27420	-0.27420
0.08	-18	-18	-0.10830	-0.10830	-0.46950	-0.46950
0.10	-15	-15	-0.12700	-0.12700	-0.70540	-0.70540
0.12	-12	-12	-0.14220	-0.14220	-0.97510	-0.97510
0.14	-9	-9	-0.15400	-0.15400	-1.27200	-1.27200
0.16	-6	-6	-0.16250	-0.16250	-1.58900	-1.58900
0.18	-3	-3	-0.16760	-0.16760	-1.92000	-1.92000
0.20	0	0	-0.16930	-0.16930	-2.25700	-2.25700

5.2 DEUXIEME CAS: POUTRE ENCASTREE LIBRE UNIFORMEMENT CHARGEE

Comme dans le cas précédent, nous faisons la même remarque de la très grande concordance entre les valeurs des moments, des rotations et des flèches de flexion trouvées par l'étude analytique et celles de la simulation numérique par le code de calcul CAST3M (Fig. 14, Tableau 5). Cela permet également de valider ces simulations. Les courbes représentatives de ces grandeurs analytiques et celles obtenues par la simulation sont tracées. Leurs superpositions confirment la grande concordance.

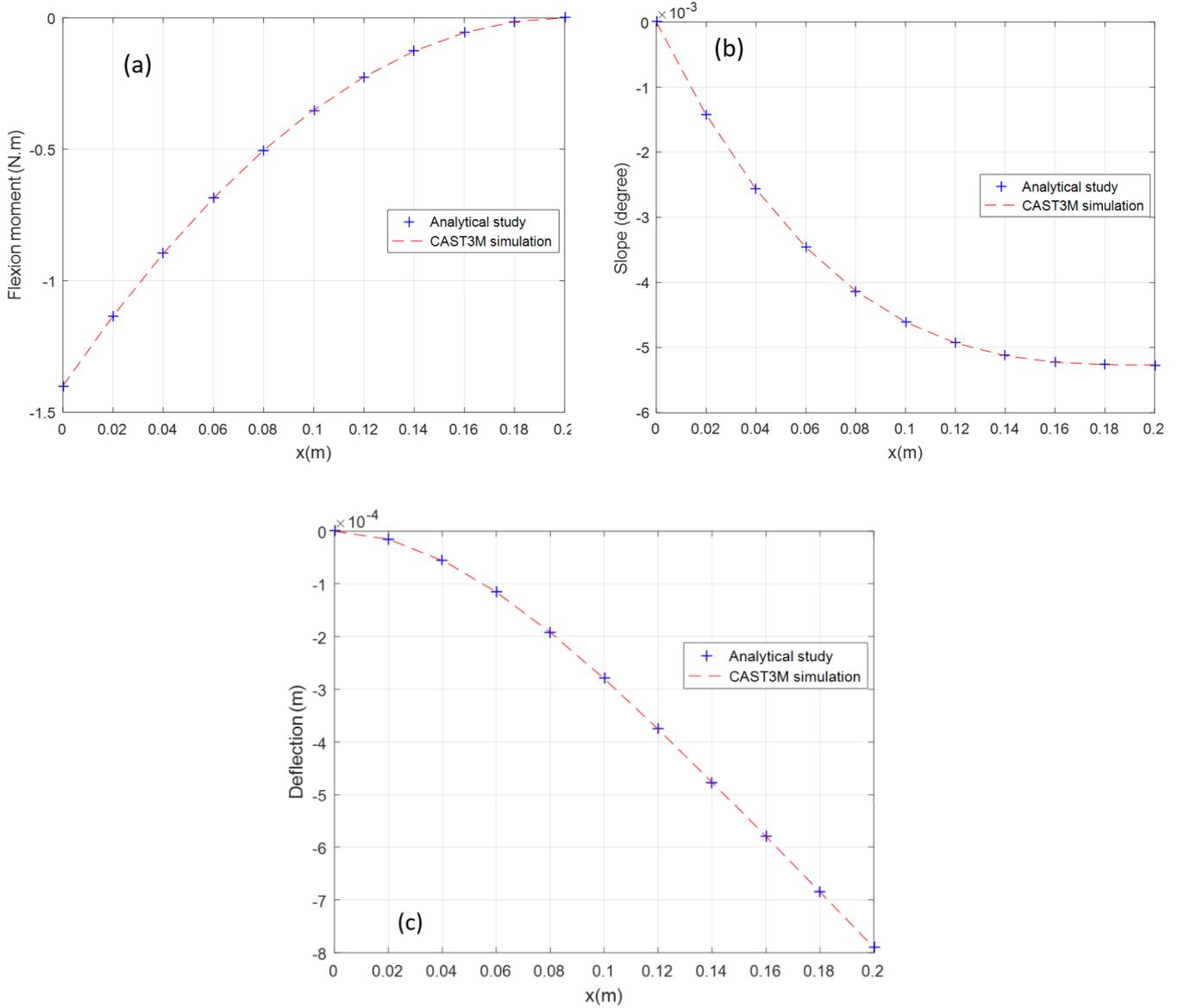


Fig. 14. Graphes de comparaison (a) Moment fléchissant, (b) rotation, (c) Flèche

Tableau 5. Comparaison des Moment fléchissant, des rotations et des Flèche

X (m)	Moment de flexion (N.m)		Rotation (degré) x10 ⁻²		Flèche (m) x10 ⁻³	
	Analytique	CAST3M	Analytique	CAST3M	Analytique	CAST3M
0.00	-1.4000	-1.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.02	-1.1340	-1.1340	-0.1427	-0.1427	-0.01477	-0.01477
0.04	-0.8960	-0.8960	-0.2570	-0.2570	-0.05519	-0.05520
0.06	-0.6860	-0.6860	-0.3460	-0.3460	-0.11590	-0.11590
0.08	-0.5040	-0.5040	-0.4129	-0.4129	-0.19210	-0.19210
0.10	-0.3500	-0.3500	-0.4608	-0.4609	-0.27980	-0.27980
0.12	-0.2240	-0.2240	-0.4930	-0.4930	-0.37540	-0.37540
0.14	-0.1260	-0.1260	-0.5124	-0.5125	-0.47610	-0.47620
0.16	-0.0560	-0.0560	-0.5224	-0.5225	-0.57970	-0.57980
0.18	-0.0140	-0.0140	-0.5261	-0.5262	-0.68470	-0.68480
0.20	0.0000	0.0000	-0.5267	-0.5268	-0.79000	-0.79010

6 CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons eu pour objectif la comparaison des résultats analytiques et numériques obtenus suite à plusieurs simulations utilisant le code de calcul CAST3M, pour le cas de la flexion simple d'une poutre console soumise respectivement à une charge concentrée puis uniforme sur toute sa longueur. Les résultats obtenus pour les moments, les rotations et les flèches sont très concordants. Nous avons une erreur quasi nulle sur les valeurs à plus de cinq chiffres après la virgule. Cela permet la validation et l'emploi de ces simulations et montre l'exploitation de ce logiciel dans le domaine de la mécanique.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Service Modélisation des Systèmes et Structures (DM2S) de la Direction de l'Energie Nucléaire du Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) pour la mise à disposition du logiciel Cast3M.

REFERENCES

- [1] M. Lassouad and S. Daghboudj, "Étude de la Concentration de Contraintes dans une plaque trouée sollicitée en traction", Master 2, Université de Tébessa, 2011.
- [2] C. Oubraham and S. Drizi, "Simulation du Comportement Instantané Et différé d'une zone en béton armé, Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2010.
- [3] E. Polania, "Contribution à l'étude du comportement des planchers composites poutres - dalles alvéolées préfabriquées en béton, Thèse de Doctorat, Insa Toulouse, 2006.
- [4] H. Oudin, "Méthode des éléments finis, Université du Maine, Le Mans, 2003.
- [5] Parrochia D., "L'expérience dans les sciences modèles et simulation, Vol. I. Paris: Éd. Odile Jacob, pp. 193-203, 2000.
- [6] Rivers R. H. and Vockell E., "Computers simulations to stimulate scientific problem solving", Journal of Research In Science Teaching, no. 24, pp. 403-415, 1987.
- [7] M. Aitali and M. Pinglot, "Modélisation du comportement en flexion statique des sections rectangulaires en béton armé", Materials And Structures, Vol. 26, pp. 207-213, 1995.
- [8] A. Zeghloul, "Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture, Université De Metz, 2003-2004.
- [9] N. Bourahla, "Résistance des matériaux de base, Université Saad Dahlab De Blida [Online], Available: <https://www.coursehero.com/file/51766390/Resistance-des-materiaux-de-basepdf/> (13 mai, 2021).