

## Prise en compte du gradient de contrainte dans le critère d'approche statistique (méthode de variance)

### [ Factoring the stress gradient into the statistical approach criterion (variance method) ]

Mbaiyelkom Esdras<sup>1</sup>, E. Ngargueudedjim Kimtangan<sup>1</sup>, Annouar Djidda Mahamat<sup>1</sup>, Bianzeube Tikri<sup>1</sup>, Kenmeugne Bienvenu<sup>2</sup>,  
and Fogue Médard<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Etude et de Recherche en Technique Industrielles (LERTI), Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, Université de N'Djaména, Chad

<sup>2</sup>Laboratoire d'Engineering Civil et Mécanique (LECM), Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé, Université de Yaoundé I, BP 8390 Yaoundé, Cameroon

<sup>3</sup>Unité de Recherche d'Ingénierie des Systèmes Industriels et de l'Environnement (UR-ISIE), Faculté des Sciences, Université de Dschang, Cameroon

---

Copyright © 2025 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the *Creative Commons Attribution License*, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**ABSTRACT:** The aim of this work is to take into account the effect of the stress gradient as a beneficial effect in fatigue, since its presence within a material systematically leads to an increase in the endurance limit in terms of local maximum stress. We have therefore proposed that the stress gradient be taken into account in the fatigue criterion using a statistical approach based on the variance method. This method assumes that the fracture plane is the one on which the variance of the equivalent stress is maximum. This method defines three types of equivalent stress on a plane: normal stress, shear stress and combined normal and shear stress. The results obtained using the simple variance method and the stress gradient method were compared for a cyclic biaxial loading condition.

We found that in terms of prediction of the fracture plane, there is not much difference between the two formulations (the simple variance method and the one taking into account the stress gradient), but the maximum values of the variance for the variance method taking into account the stress gradient vary greatly compared to the case of the simple variance method.

**KEYWORDS:** biaxial fatigue, fracture plane direction, critical plane, stress gradient and equivalent stress variance.

**RESUME:** Le but de ce travail est de prendre en compte l'effet du gradient de contrainte bien comme un effet bénéfique en fatigue car sa présence au sein d'un matériau conduit systématiquement à une augmentation de la limite d'endurance en termes de contrainte maximale locale. Ainsi nous avons proposé la prise en compte du gradient de contrainte dans le critère de fatigue d'approche statistique en considérant la méthode de variance. Cette méthode suppose que le plan de rupture est celui sur lequel la variance de la contrainte équivalente est maximale.

On définit pour cette méthode trois types de contrainte équivalente sur un plan: une contrainte normale, une contrainte de cisaillement et une contrainte combinaison de la contrainte normale et de la contrainte de cisaillement.

La comparaison des résultats obtenus par la méthode de variance simple et celle prenant en compte le gradient de contrainte a été faite pour un état de sollicitation cyclique biaxiale. Nous avons constaté qu'en terme de prédiction de prédiction du plan de rupture il n'y a pas tellement de différence entre les deux formulations (la méthode de variance simple et celle prenant en compte le gradient de contrainte) main les valeurs maximale de la variance pour la méthode de variance prenant en compte le gradient de contrainte varie fortement comparativement au cas de la méthode de variance simple.

**MOTS-CLEFS:** fatigue biaxiale, direction du plan de rupture, plan critique, gradient de contrainte et variance de la contrainte équivalente.

## 1 INTRODUCTION

La prédiction du plan de rupture en fatigue des différents composants d'une structure en service sous des sollicitations complexes (multiples et aléatoires) est de nos jours une préoccupation majeure dans l'ingénierie mécanique. Les industries, pour être compétitives, ont l'obligation de garantir la sécurité des utilisateurs de leurs produits sans perdre de vue la minimisation des coûts de fabrication et de maintenance.

Les critères statiques sont insuffisants pour le dimensionnement des pièces d'une structure en vue de sa validation dans le bureau d'études. C'est pourquoi, beaucoup des chercheurs et d'ingénieurs ont travaillé ces dernières années sur les modèles théoriques et expérimentaux de fatigue. L'objectif majeur de la fatigue des matériaux est la prédiction de la durée de vie du composant mécanique soumis à des contraintes variables.

La détermination de l'orientation du plan de rupture est très importante dans les modèles de fatigue car c'est en un point de ce plan qu'on calcule la durée de vie en fatigue.

La durée de vie de la pièce peut alors être établie à l'aide la contrainte normale et la contrainte tangentielle qui lui sont appliquées.

L'objectif final de cet article est de prendre en compte le gradient de contrainte dans le critère de l'approche statistique considérant la méthode de la variance puis faire la comparaison des valeurs maximales des variances obtenues par la méthode de variance simple et celle prenant en compte le gradient de contrainte en utilisant les données des essais effectuées par Rotvel F [2] et Nishihara T. and Kawamoto [3].

## 2 MATÉRIELS ET MÉTHODES

### 2.1 MÉTHODOLOGIE

### 2.2 PRESENTATION DE LA METHODE DE VARIANCE

La rupture par fatigue est causée par la contrainte normale  $\sigma_n(t)$  et la contrainte tangentielle  $\tau_n(t)$  qui agit suivant la direction tangentielle  $\vec{s}$  du plan de rupture avec la normale  $\vec{n}$  (Figure 1). Sur la base de cette connaissance, Macha, E. and Niesłony [1] ont développé une méthode de détermination de la position du plan critique basée sur la variance de la contrainte équivalente.

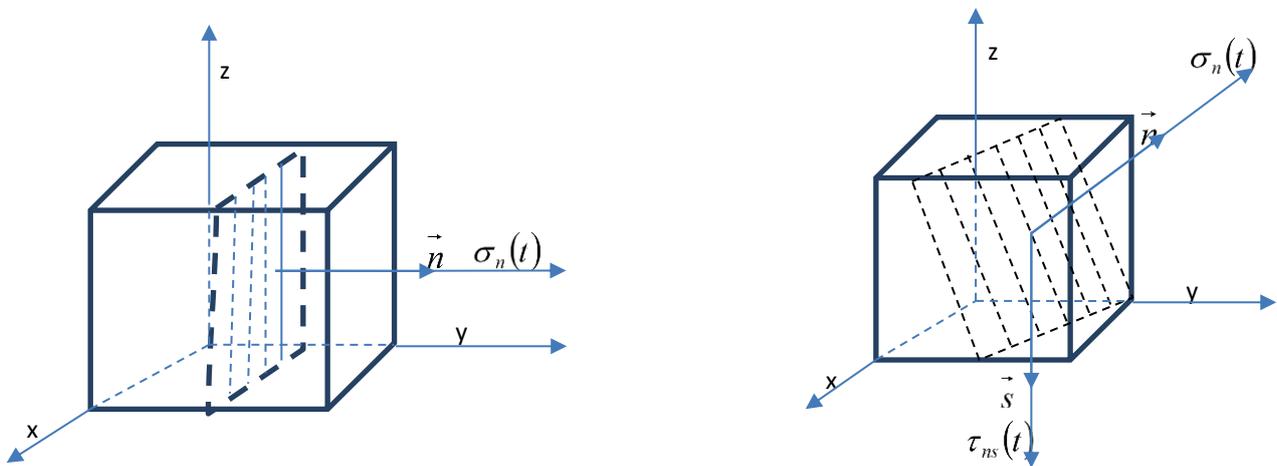


Fig. 1. Direction of vector,  $\vec{n}$  and  $\vec{s}$  and of stress,  $\sigma_n(t)$  and  $\tau_{ns}(t)$  in the case of any position of the fatigue fracture plane in relation to the system of axes  $x, y, z$

Avec

$$\vec{n} = \hat{l}_\eta \vec{i} + \hat{m}_\eta \vec{j} + \hat{n}_\eta \vec{k} = \frac{\hat{l}_1 + \hat{l}_3}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_3}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{\hat{n}_1 + \hat{n}_3}{\sqrt{2}} \vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{s} = \hat{l}_s \vec{i} + \hat{m}_s \vec{j} + \hat{n}_s \vec{k} = \frac{\hat{l}_1 - \hat{l}_3}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{\hat{m}_1 - \hat{m}_3}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{\hat{n}_1 - \hat{n}_3}{\sqrt{2}} \vec{k} \quad (2)$$

Les composantes du vecteur contraintes ont pour expressions:

$$\sigma_n(t) = \hat{l}_n \vec{i} \hat{l}_n \vec{j} \sigma_{ij}(t), \tau_{ns}(t) = \hat{l}_{ns} \vec{i} \hat{l}_{ns} \vec{j} \sigma_{ij}(t) \quad (3)$$

Avec  $i, j = x, y, z$

La formulation générale du critère est:

$$\max_t \{B\tau_{\eta_s}(t) + K\sigma_{\eta}(t)\} = F \quad (4)$$

Où:

F, B sont les constantes du critère;

$$K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1} - \sigma_{-1}}\right)^2 - 1}$$

Où:  $\sigma_{-1}$  et  $\tau_{-1}$  sont les limites de fatigue sous sollicitation en traction-compression et en torsion, respectivement.

$$\sigma_{eq}(t) = \sum_{k=1}^6 a_k x_k(t) \quad (5)$$

Où:  $x_1 = \sigma_{xx}(t), x_2 = \sigma_{yy}(t), x_3 = \sigma_{zz}(t), x_4 = \sigma_{xy}(t), x_5 = \sigma_{xz}(t), x_6 = \sigma_{yz}(t)$ .

Et  $a_k = a_k(\hat{l}_1, \hat{m}_1, \hat{n}_1, \hat{l}_3, \hat{m}_3, \hat{n}_3)$ .

$$\vec{n} = \frac{\hat{l}_1 + \hat{l}_3}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_3}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{\hat{n}_1 + \hat{n}_3}{\sqrt{2}} \vec{k}, \vec{s} = \frac{\hat{l}_1 - \hat{l}_3}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{\hat{m}_1 - \hat{m}_3}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{\hat{n}_1 - \hat{n}_3}{\sqrt{2}} \vec{k}$$

La moyenne des cosinus directeurs doit satisfaire aux conditions d'orthogonalité suivantes:

$$\hat{l}_1^2 + \hat{m}_1^2 + \hat{n}_1^2 = 1, \hat{l}_2^2 + \hat{m}_2^2 + \hat{n}_2^2 = 1, \hat{l}_3^2 + \hat{m}_3^2 + \hat{n}_3^2 = 1, \hat{l}_1 \hat{l}_2 + \hat{m}_1 \hat{m}_2 + \hat{n}_1 \hat{n}_2 = 0, \hat{l}_1 \hat{l}_3 + \hat{m}_1 \hat{m}_3 + \hat{n}_1 \hat{n}_3 = 0, \hat{l}_2 \hat{l}_3 + \hat{m}_2 \hat{m}_3 + \hat{n}_2 \hat{n}_3 = 0.$$

## 2.3 PRISE EN COMPTE DU GRADIENT DE CONTRAINTE

### 2.3.1 FORMALISME GÉNÉRAL

La proposition consiste à introduire l'influence du gradient de contrainte dans le critère de l'approche statistique. Le formalisme du critère modifié de EWALD Macha est défini par l'expression suivante:

$$(\max)_{-t} \{ \tau_{\eta_s}(t) + K\sigma_{\eta}(t) + \sqrt{G(t)}(\sigma_{\eta}(t)) \} = F \quad (6)$$

Avec:

F et B les constantes du critère;

$$K = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1} - \sigma_{-1}}\right)^2 - 1} \text{Où } \sigma_{-1}: \text{ limite de fatigue sous sollicitation en traction-compression et } \tau_{-1}: \text{ limite de fatigue en torsion;}$$

$\tau_{\eta_s}(t)$  et  $\sigma_{\eta}(t)$ , sont les fonctions des composantes du contrainte  $\sigma_{ij}(t)$ , ( $i, j = x, y, z$ ).

**G(t)**, gradient géométrique de la contrainte normale  $\sigma_{\eta}(t)$  au plan physique de normale h, est défini à l'instant t par:

$$G(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial \sigma_{\eta}(t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{\eta}(t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_{\eta}(t)}{\partial z}\right)^2} \quad (7)$$

#### Cas a) critère de contrainte normale maximale dans le plan de rupture (B=0, K=1)

L'expression de la contrainte équivalente est:

$$\sigma_{eq}(t) = \sigma_{\eta}(t) = \hat{l}_{\eta}^2 \sigma_{xx}(t) + \hat{m}_{\eta}^2 \sigma_{yy}(t) + \hat{n}_{\eta}^2 \sigma_{zz}(t) + 2\hat{l}_{\eta} \hat{m}_{\eta} \sigma_{xy}(t) + 2\hat{l}_{\eta} \hat{n}_{\eta} \sigma_{xz}(t) + 2\hat{m}_{\eta} \hat{n}_{\eta} \sigma_{yz}(t) + \sqrt{G(t)}(\sigma_{\eta}(t)) \quad (8)$$

#### Cas b) critère de contrainte de cisaillement maximale dans le plan de rupture (B=1, K=0)

$$\sigma_{eq}(t) = 2\tau_{\eta_s}(t) = 2\hat{l}_{\eta} \hat{l}_s \sigma_{xx}(t) + 2\hat{m}_{\eta} \hat{m}_s \sigma_{yy}(t) + 2\hat{n}_{\eta} \hat{n}_s \sigma_{zz}(t) + 2(\hat{l}_{\eta} \hat{m}_s + \hat{l}_s \hat{m}_{\eta}) \sigma_{xy}(t) + 2(\hat{l}_{\eta} \hat{n}_s + \hat{l}_s \hat{n}_{\eta}) \sigma_{xz}(t) + 2(\hat{m}_{\eta} \hat{n}_s + \hat{m}_s \hat{n}_{\eta}) \sigma_{yz}(t) + \sqrt{G(t)}(\sigma_{\eta}(t)) \quad (9)$$

#### Cas c) critère de combinaison des contraintes tangentielle et normale maximale dans un plan de rupture

Dans le cas particulier du critère (B=1), l'expression de la contrainte équivalente est

$$\sigma_{eq}(t) = \frac{1}{1+K} \left[ (\hat{l}_1^2 - \hat{l}_3^2 + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)^2) \sigma_{xx}(t) + (\hat{m}_1^2 - \hat{m}_3^2 + K(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)^2) \sigma_{yy}(t) + (\hat{n}_1^2 - \hat{n}_3^2 + K(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)^2) \sigma_{zz}(t) + (\hat{l}_1 \hat{m}_1 - \hat{l}_3 \hat{m}_3 + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)) \sigma_{xy}(t) + 2(\hat{l}_1 \hat{n}_1 - \hat{l}_3 \hat{n}_3 + K(\hat{l}_1 + \hat{l}_3)(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)) \sigma_{xz}(t) + 2(\hat{m}_1 \hat{n}_1 - \hat{m}_3 \hat{n}_3 + K(\hat{m}_1 + \hat{m}_3)(\hat{n}_1 + \hat{n}_3)) \sigma_{yz}(t) + \sqrt{(G(t) \langle \sigma_\eta(t) \rangle)} \right] \quad (10)$$

Où  $\sigma_{ij}(t)$ , ( $i, j = x, y, z$ ) sont les composantes de la contrainte.

La variance de la contrainte équivalente s'écrit:

$$\mu_{\sigma_{eq}} = \sum_{s,t=1}^6 a_s a_t \mu_{xst} \quad (11)$$

Avec  $\mu_{xst}$  la matrice de variance-covariance du variable  $x_k$  :  $\mu_{xst} = \begin{bmatrix} \mu_{x11} & \dots & \mu_{x16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{61} & \dots & \mu_{66} \end{bmatrix}$

Généralement, la résolution analytique de cette méthode pose un problème. Pour éliminer cette difficulté, les cosinus directeurs  $\hat{l}_n, \hat{m}_n, \hat{n}_n$  sont remplacés par les fonctions trigonométriques des trois angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  (Figure 2).

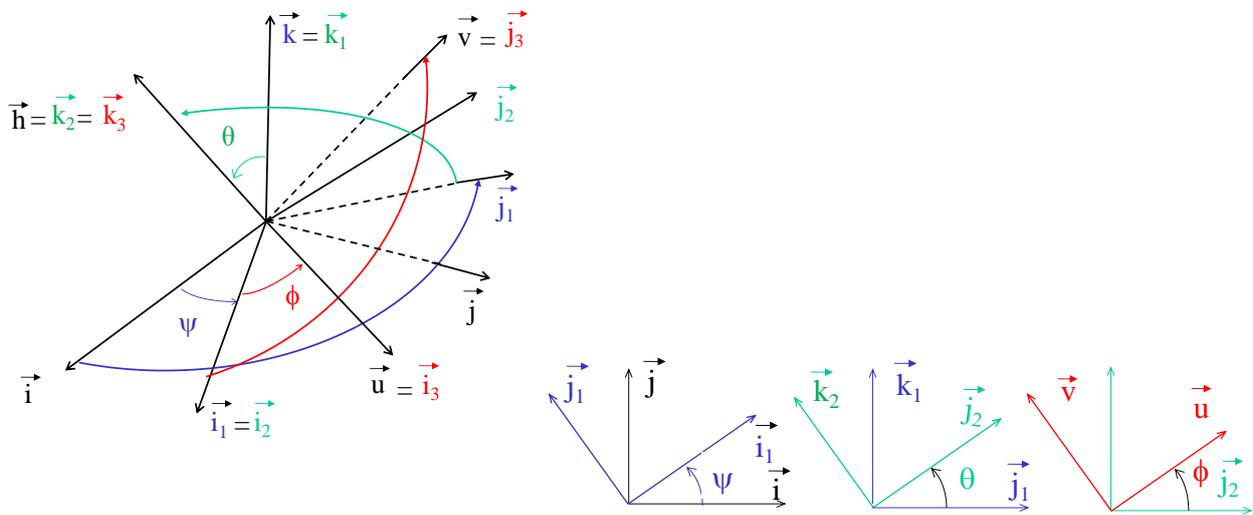


Fig. 2. Les fonctions trigonométriques des trois angles d'Euler

Avec  $\vec{u}(\hat{l}_1, \hat{m}_1, \hat{n}_1)$ ;  $\vec{v}(\hat{l}_2, \hat{m}_2, \hat{n}_2)$  et  $\vec{h}(\hat{l}_3, \hat{m}_3, \hat{n}_3)$ .

En considérant que le problème est plan et que les facettes concernées sont celles avec la normale dans le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on a la condition  $\vec{k} \cdot \vec{h} = \hat{n}_3 = 0$ .

Cette considération nous permet d'obtenir les conditions sur les angles d'Euler avec  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Avec la condition  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et les cas de figures de rotations (Figure 2), on a la matrice des directions cosinus suivantes:

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de la détermination du plan de rupture est présenté dans la figure 3 de façon détaillée.

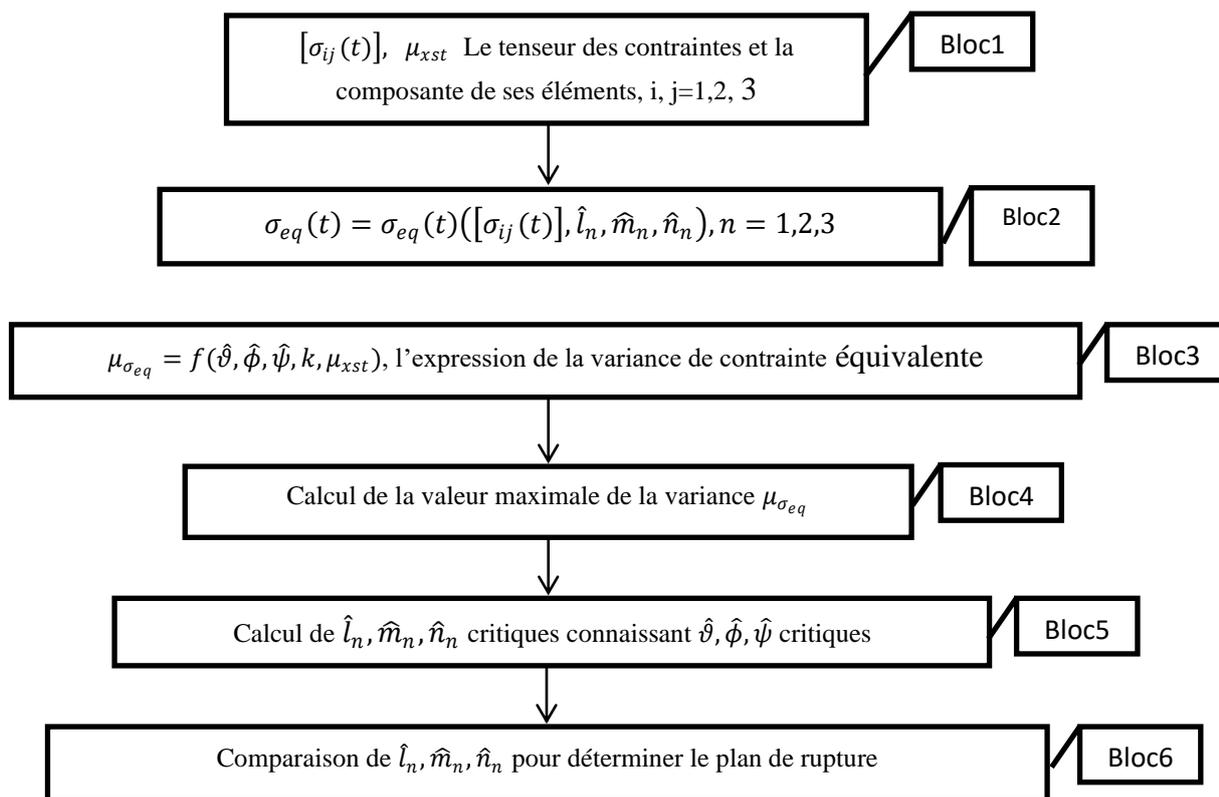


Fig. 3. Algorithme de calcul de la position du plan de rupture

2.4 PRÉSENTATION DU MATÉRIAU

Pour la validation de cette étude comparative de détermination de l'orientation du plan de rupture, nous avons utilisé les données de fatigue d'un acier de construction mécanique et les essais de fatigue sous chargement biaxial cyclique réalisés par Rotvel F [2] et Nishihara T. and Kawamoto M [3].

Tableau 1. Données et états de chargement biaxial cyclique de fatigue (Rotvel F [2]) et Nishihara T. and Kawamoto M [3]

Auteur : Rotvel		
Références [2]	Caractéristiques chimiques(%)	Caractéristiques mécaniques
Essais : Traction biaxiale Matériau : Acier au carbone	C=0,35, Si=0,20, Mn=0.45	σ <sub>-1</sub> = 215,8MPa σ <sub>0</sub> = 349,9MPa τ <sub>-1</sub> = 138,5MPa, Rm = 570MPa
États de contrainte		
Test number	σ <sub>xx</sub> (t)	σ <sub>yy</sub> (t)
1	227,6sin(wt)	1,96sin(wt)
2	-2,94+224,6sin(wt)	6,87 sin(wt+π)
3	52+233,5sin(wt)	41,2+191,3sin(wt)
4	-11,8+228,6sin(wt)	-24,5+117,7sin(wt)
5	-7,8+156sin(wt)	11,77+121,6sin(wt+π)
6	79,5+155sin(wt+π)	118,7sin(wt)
Auteurs : Toshio et Kawamoto		
Références [3]	Caractéristiques chimiques(%)	Caractéristiques mécaniques
Material : Hardened steel	C=0.51, Mn=0,38,S=0,010 , Si=0,27, P=0,023	σ <sub>-1</sub> = 313.9 MPa, σ <sub>0</sub> = 485.8 MPa, τ <sub>-1</sub> = 196.2 MPa, Rm = 694 MPa

N°	Numéro de test	États de contrainte	
		$\sigma_{xx}(t)$	$\tau_{xy}(t)$
1	HNK50	00	225.63sin(wt)
2	HNK53	353.16sin(wt)	00
3	HNK54	00	sin(wt)
4	HNK55	323.73sin(wt)	00
5	HNK59	294.30sin(wt+ $\pi/2$ )	147.15sin(wt)
6	HNK60	274.68sin(wt)	137.34sin(wt)
7	HNK63	264.87sin(wt+ $\pi/2$ )	132.44sin(wt)
8	HNK67	162.85sin(wt+ $\pi/2$ )	196.69sin(wt)
9	HNK69	154.45sin(wt+ $\pi/2$ )	184.23sin(wt)
10	HNK74	162.85sin(wt)	195.69sin(wt)
11	HNK75	308.03sin(wt)	63.86sin(wt)
12	HNK76	141.85sin(wt)	171.28sin(wt)
13	HNK79	344.33sin(wt)	71.32sin(wt)
14	HNK83	344.33sin(wt+ $\pi/2$ )	71.32sin(wt)
15	HNK84	157.65sin(wt+ $\pi/3$ )	190.31sin(wt)
16	HNK86	308.03sin(wt+ $\pi/3$ )	63.86sin(wt)
17	HNK89	255.06sin(wt)	127.53sin(wt)
18	HNK90	264.87sin(wt+ $\pi/3$ )	132.44sin(wt)
19	HNK91	255.06sin(wt+ $\pi/3$ )	127.53sin(wt)
20	HNK94	147.15sin(wt+ $\pi/3$ )	177.56sin(wt)
21	HNK96	141.95sin(wt+ $\pi/6$ )	171.18sin(wt)
22	HNK97	152.35sin(wt+ $\pi/6$ )	183.94sin(wt)

Références [3]		Caractéristiques chimiques(%)	Caractéristiques mécaniques
Essais : Traction-Torsion Matériau : Acier doux		C = 0,1, Mn=0,50, S=0,040, Si=0,14, P=0,033	$\sigma_1 = 235,4\text{MPa}$ , $\sigma_0 = 325,7\text{MPa}$ $\tau_1 = 137,3\text{MPa}$ , Rm = 382MPa
États de contrainte			
N°	Numéro de test	$\sigma_{xx}(t)$	$\sigma_{xy}(t)$
1	LNK5	194,3sin(wt)	00
2	LNK11	00	142,25sin(wt)
3	LNK12	187,12sin(wt)	93,50sin(wt)
4	LNK16	101,34sin(wt)	122,33sin(wt)
5	LNK18	235,64sin(wT)	48,85sin(wt)
6	LNK22	235,83sin(wt+ $\pi/2$ )	117,92sin(wt)
7	LNK24	208,07sin(wt+ $\pi/2$ )	104,08sin(wt)
8	LNK27	112,62sin(wt+ $\pi/2$ )	135,97sin(wt)
9	LNK28	244,76sin(wt+ $\pi/2$ )	50,72sin(wt)
10	LNK29	235,64sin(wt+ $\pi/2$ )	48,85sin(wt)
11	LNK31	201,11sin(wt+ $\pi/3$ )	100,55sin(wt)
12	LNK32	194,24sin(wt+ $\pi/3$ )	97,12sin(wt)
13	LNK35	245,25sin(wt)	00
14	LNK36	105,16sin(wt+ $\pi/3$ )	126,84sin(wt)
15	LNK40	108,89sin(wt+ $\pi/3$ )	131,45 sin(wt)

Références [3]	Caractéristiques chimiques(%)	Caractéristiques mécaniques
----------------	-------------------------------	-----------------------------

Essais : Flexion-Torsion Matériau : Duralumin		Cu = 3,81, Mn=0.44, Si=0.35	$\sigma_{-1} = 156\text{MPa}$ , $\sigma_0 = 257,1\text{MPa}$ $\tau_{-1} = 100\text{MPa}$ , $R_m = 443\text{MPa}$
États de contrainte			
N°	Numéro de test	$\sigma_{11a}$	$\sigma_{12a}$
01	D-30 2	00	$98,1\text{Sin}(\omega t)$
02	D-30 5	00	$127,53\text{Sin}(\omega t)$
03	D-30 6	$156,96\text{Sin}(\omega t)$	00
04	D-30 7	$196,2\text{Sin}(\omega t + \pi/2)$	00
05	D-30 8	$181,29\text{Sin}(\omega t + \pi/2)$	$37,57\text{Sin}(\omega t)$
06	D-30 12	$153,55\text{Sin}(\omega t)$	$76,32\text{Sin}(\omega t)$
07	D-30 15	$138,7(\omega t + \pi/2)$	$69,36\text{Sin}(\omega t)$
08	D-30 16	$124,88\text{Sin}(\omega t)$	$62,49\text{Sin}(\omega t)$
09	D-30 17	$163,14\text{Sin}(\omega t)$	$33,75\text{Sin}(\omega t)$
10	D-30 19	$117,92(\omega t + \pi/2)$	$58,96\text{Sin}(\omega t)$
11	D-30 20	$82,6\text{Sin}(\omega t)$	$99,67\text{Sin}(\omega t)$
12	D-30 22	$199,44\text{Sin}(\omega t)$	$41,3\text{Sin}(\omega t)$
13	D-30 23	$199,44\text{Sin}(\omega t + \pi/2)$	$41,3\text{Sin}(\omega t)$
14	D-30 24	$82,6\text{Sin}(\omega t + \pi/2)$	$99,67\text{Sin}(\omega t)$

Références [3]		Caractéristiques chimiques(%)	Caractéristiques mécaniques
Essais : Flexion-Torsion Matériau : Grey Castiron		C = 3,32%	$\sigma_{-1} = 143\text{MPa}$ , $\sigma_0 = 212,7\text{MPa}$ $\tau_{-1} = 110\text{MPa}$ , $R_m = 278,8$
États de contrainte			
N°	Numéro de test	$\sigma_{11a}$	$\sigma_{12a}$
01	Z1a1	$168\text{sin}\omega t$	$00\text{sin}\omega t$
02	Z1a2	$164\text{sin}\omega t$	$00\text{sin}\omega t$
03	Z1a3	$160\text{sin}\omega t$	$00\text{sin}\omega t$
04	Z1b1	$00\text{sin}\omega t$	$142\text{sin}\omega t$
05	Z1b2	$00\text{sin}\omega t$	$130\text{sin}\omega t$
06	Z1b3	$00\text{sin}\omega t$	$132\text{sin}\omega t$
07	Z1c1	$149,9\text{sin}\omega t$	$74,95\text{sin}\omega t$
08	Z1c2	$121,62\text{sin}\omega t$	$60,81\text{sin}\omega t$
09	Z1c3	$118,79\text{sin}\omega t$	$59,4\text{sin}\omega t$
10	Z1d1	$176,67\text{sin}\omega t$	$51\text{sin}\omega t$
11	Z1d2	$155,88\text{sin}\omega t$	$45\text{sin}\omega t$
12	Z1d3	$152,42\text{sin}\omega t$	$44\text{sin}\omega t$
13	Z1e1	$118\text{sin}\omega t$	$102,2\text{sin}\omega t$
14	Z1e2	$108\text{sin}\omega t$	$93,53\text{sin}\omega t$

15	Zle3	106sin $\omega t$	91,78sin $\omega t$

### 3 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Il est question ici de montrer l'effet bénéfique du gradient de contrainte pour une sollicitation cyclique biaxiale. Ceci étant, nous avons comparé les différentes valeurs maximales de la variance du contrainte à l'aide des histogrammes.

Le tableau 2 présente les valeurs maximales des variances correspondantes aux plans de rupture pour les différents essais.

#### 3.1 RÉSULTATS

Pour faire la comparaison des deux formulations, nous avons programmés et retenir les valeurs maximales des variances du plan de rupture (tableau. 2 et 3)

**Tableau 2.** Valeurs des variances pour différents cas avec prise en compte de gradient

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance + gradient		
		Cas a	Cas b	Cas c
		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1		7,7562e+03	1,0838e+04	7,7232e+04
2		7,3242e+03	9,9558e+03	7,2989e+04
3		1,4013e+04	1,1526e+04	1,2840e+05
4		6,8514e+03	5,6356e+03	6,7771e+04
5		4,0493e+03	3,3308e+03	3,6163e+04
6		8,1292e+03	6,6867e+03	7,9723e+04

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance + gradient		
		Cas a	Cas b	Cas c
		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1	HNK50	1,5272e+04	3,0356e+04	1,0463e+05
2	HNK53	2,7696e+04	3,5404e+04	2,1726e+05
3	HNK54	1,2133e+04	2,0410e+04	8,3122e+04
4	HNK55	2,3272e+04	2,9749e+04	1,8255e+05
5	HNK59	1,7005e+04	2,5601e+04	1,3829e+05
6	HNK60	1,4814e+04	2,2301e+04	1,2047e+05
7	HNK63	1,3775e+04	2,0737e+04	1,1202e+05
8	HNK67	9,7923e+03	2,1242e+04	8,1424e+04
9	HNK69	8,6781e+03	1,8718e+04	7,2222e+04
10	HNK74	9,7327e+03	2,1064e+04	8,0959e+04
11	HNK75	1,8163e+04	2,3888e+04	1,3219e+05
12	HNK76	7,4273e+03	1,6110e+04	6,1759e+04
22	HNK97	8,5665e+03	1,8580e+04	7,1233e+04
23	HNK98	1,3775e+04	2,0737e+04	1,1202e+05
24	HNK99	1,2773e+04	1,9229e+04	1,0387e+05

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance + gradient		
		Cas a	Cas b	Cas c

		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1	D-30 2	2,6709e+03	5,5223e+03	1,6896e+04
2	D-30 5	4,5137e+03	9,3327e+03	2,8554e+04
3	D-30 6	5,0612e+03	6,5838e+03	3,7417e+04
4	D-30 7	7,9081e+03	1,0287e+04	5,8464e+04
5	D-30 8	5,8206e+03	7,8035e+03	3,9615e+04
6	D-30 12	4,2763e+03	6,6009e+03	3,2900e+04
7	D-30 15	3,4945e+03	5,4039e+03	2,6906e+04
8	D-30 16	2,8333e+03	4,3823e+03	2,1817e+04
9	D-30 17	4,7141e+03	6,3194e+03	3,2078e+04
10	D-30 19	2,5257e+03	3,9057e+03	1,9447e+04

Tableau 3. Valeurs des variances pour différents cas sans gradient

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance		
		Cas a	Cas b	Cas c
		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1		6.3798e+03	9.4614e+03	7.6836e+04
2		6.0246e+03	8.6561e+03	7.2605e+04
3		1.1526e+04	1.1526e+04	1.2729e+05
4		5.6356e+03	5.6356e+03	6.7290e+04
5		3.3308e+03	3.3308e+03	3.5842e+04
6		6.6867e+03	6.6867e+03	7.9127e+04

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance		
		Cas a	Cas b	Cas c
		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1	HNK50	8,4848e+03	2,3569e+04	1,0443e+05
2	HNK53	1,5387e+04	2,3095e+04	2,1386e+05
3	HNK54	6,7409e+03	1,8725e+04	8,2965e+04
4	HNK55	1,2929e+04	1,9406e+04	1,7970e+05
5	HNK59	9,4477e+03	1,8043e+04	1,3680e+05
6	HNK60	8,2300e+03	1,5718e+04	1,1917e+05
7	HNK63	7,6527e+03	1,4615e+04	1,1081e+05
8	HNK67	5,4403e+03	1,6890e+04	8,1288e+04
9	HNK69	4,8213e+03	1,4861e+04	7,2095e+04
10	HNK74	5,4072e+03	1,6738e+04	8,0818e+04
11	HNK75	1,0091e+04	1,5816e+04	1,2983e+05
12	HNK76	4,1264e+03	1,2809e+04	6,1656e+04
22	HNK97	4,7593e+03	1,4772e+04	7,1113e+04
23	HNK98	7,6527e+03	1,4615e+04	1,1081e+05
24	HNK99	7,0963e+03	1,3552e+04	1,0275e+05

Numéro des essais		Valeurs maximales de la variance correspondant au plan de rupture		
		Méthode de Variance		
		Cas a	Cas b	Cas c
		$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$	$\mu_{eqmax}$
1	D-30 2	1.6039e+03	4.4554e+03	1.6865e+04
2	D-30 5	2.7107e+03	7.5296e+03	2.8502e+04

3	D-30 6	3.0394e+03	4.5620e+03	3.6827e+04
4	D-30 7	4.7491e+03	7.1282e+03	5.7542e+04
5	D-30 8	3.4954e+03	5.4784e+03	3.8887e+04
6	D-30 12	2.5681e+03	4.8926e+03	3.2537e+04
7	D-30 15	2.0985e+03	4.0080e+03	2.6612e+04
8	D-30 16	1.7015e+03	3.2505e+03	2.1579e+04
9	D-30 17	2.8310e+03	4.4363e+03	3.1489e+04
10	D-30 19	1.5168e+03	2.8967e+03	1.9234e+04

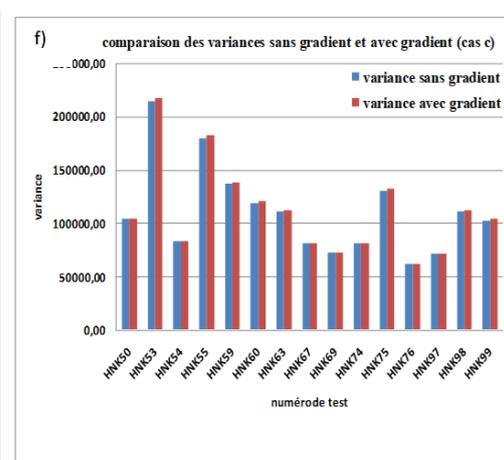
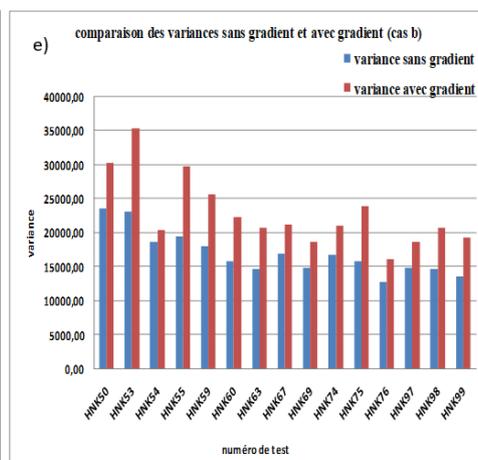
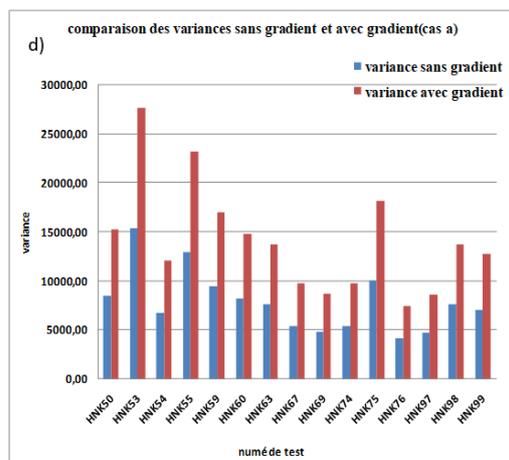
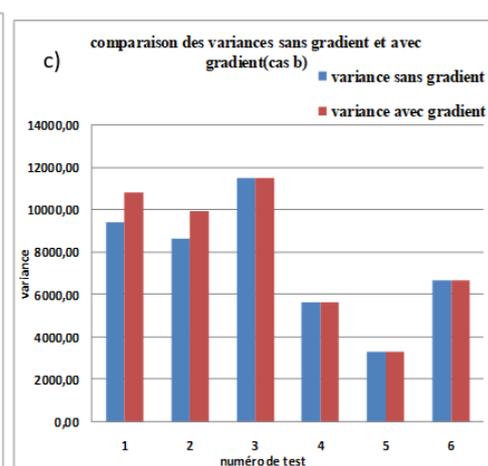
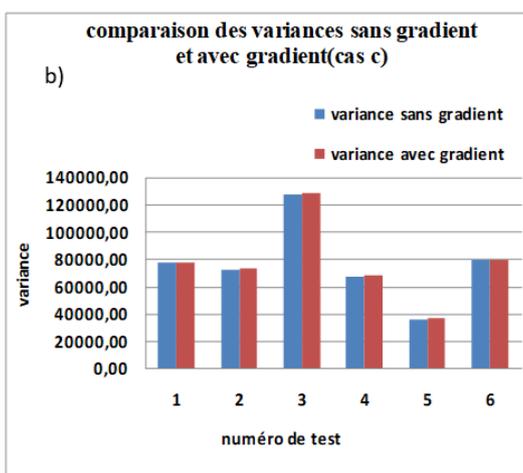
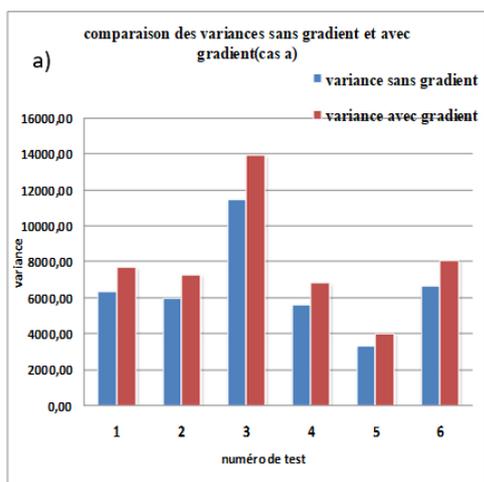
### 3.2 DISCUSSION

Pour montrer clairement l'effet du gradient de contrainte, nous avons tracés les histogrammes selon les résultats du tableau 2 et 3 (voir figure. 4).

Si nous considérons le premier type de matériau d'acier au carbone, la figure. 4 a), b) et c) montre une forte variation de la variance au cas a) comparativement aux deux autres cas.

Pour le second type de matériau à Hardened steel, la figure. 4 d), e) et f) montre une forte variation de la variance au cas a) comparativement aux deux autres cas.

La figure. 4 g), h) et i) montre une forte variation de la variance au cas a) comparativement aux deux autres cas pour un matériau duralumin.



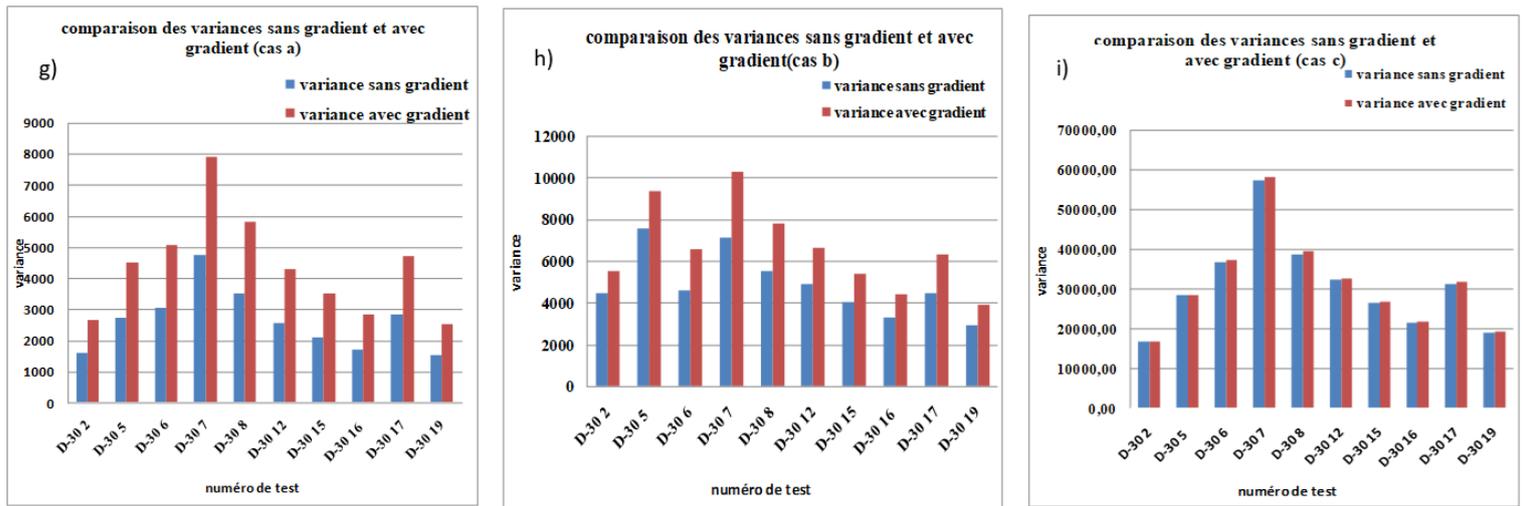


Fig. 4. Comparaison des valeurs des variances avec et sans gradient de contrainte

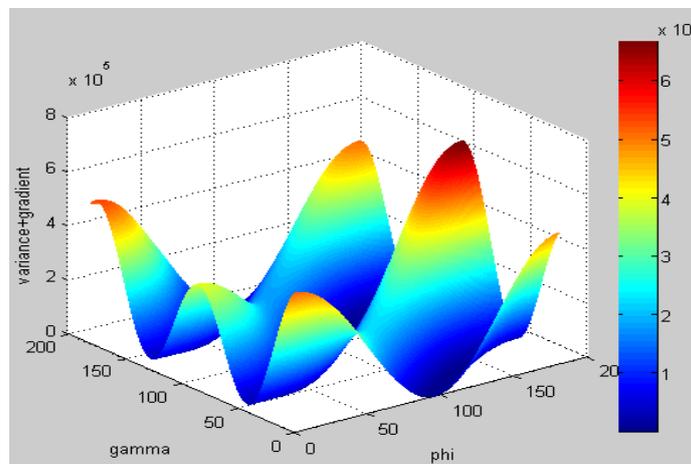


Fig. 5. Méthode de variance proposée cas c

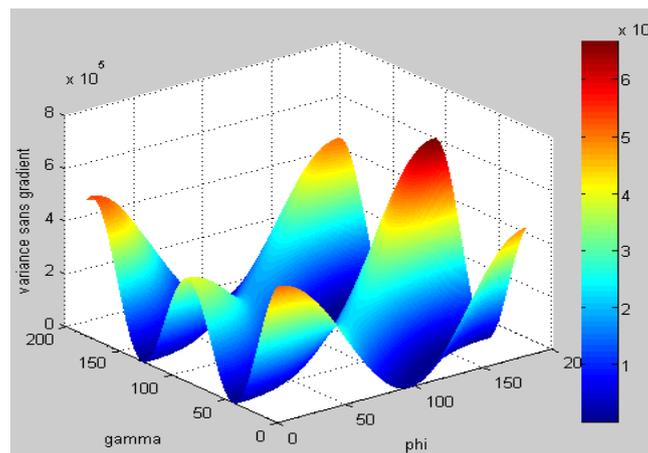


Fig. 6. Méthode de variance sans gradient cas c

#### 4 CONCLUSION

Nous pouvons affirmer que l'objectif principal de notre étude qui est « la prise en compte du gradient de contrainte dans le critère de l'approche statistique (méthode variance) » est atteint.

La figure. 4 a), b), c), d), e), f), g), h), i) nous permet d'affirmer l'effet bénéfique du gradient de contrainte et les figures 5 et 6 montrent que le gradient de contrainte n'influence pas tellement sur le plan de rupture.

## REFERENCES

- [1] Macha, E. et Nieslony, A., (2012). Critical plane fatigue life models of materials and structures under multiaxial stationary random loading: The state-of-the-art in Opole Research Centre CESTI and directions of future activities. *International Journal of Fatigue*, 39, pp.95-102.
- [2] Rotvel F., (1970), Biaxial fatigue tests with zero mean stresses using tubular specimens, *Int. J. of Mech. Sc.*, Pergamon Press, vol. 12, pp.597-615. [5] Ngargueudedjim, K., (2003). Contribution à l'étude des lois d'endommagement en fatigue. *Thèse, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon*.
- [3] Nishihara T. and Kawamoto M., (1945), The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, *Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University*, vol. XI, n° pp.95-112.
- [4] Weber, B., (1999). fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque (doctoral dissertation, Lyon, insa).
- [5] Achteik et al., (1994). May. Fatigue life of 10 HNAP steel under synchronous random bending and torsion. In *Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue* (Vol. 1, pp. 421-434).
- [6] Lachowicz, et al., (1992). Covariance between components of biaxial stress state in fatigue life calculations. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 23 (6), pp.201-212.
- [7] Macha, E., (1989). Simulation investigations of the position of fatigue fracture plane in materials with biaxial loads. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 20 (5), pp.153-163.
- [8] Macha, E., 1989. Generalization of Fatigue Failure Criteria for Multiaxial Sinusoidal Loadings in the Range of Random Loadings. In *ICBMFF2*.
- [9] Bedkowski, W. et Macha, E., (1987). Maximum normal stress fatigue criterion applied to random triaxial stress state. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 7 (2), pp.89-107.
- [10] Bedkowski et al., (1997). On the Prediction of the Fracture Plane Orientation in Multiaxial Fatigue. In *ICBMFF5*.
- [11] Bedkowski, W., 1994. Determination of the critical plane and effort criterion in fatigue life evaluation for materials under multiaxial random loading. Experimental verification based on fatigue tests of cruciform specimens. *Société Française de Métallurgie et de Matériaux (France)*, pp.435-447.
- [12] Bedkowski, W. et Macha, E., (1992). Fatigue fracture plane under Multiaxial Random.
- [13] Loadings—prediction by variance of equivalent stress based on the maximum shear and normal stresses. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 23 (3), pp.82-94.
- [14] Bertin Désiré Soh Fotsing, (2000). Modélisation des structures anisotropes à la fatigue: application au matériau bois. *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé, Spécialité: Mécanique*.
- [15] Fogue, M., (1987). Critère de fatigue a longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoidales en phase et hors phase (Doctoral dissertation, Lyon, INSA).
- [16] Jabbado, M., (2006). Fatigue polycyclique des structures métalliques: durée de vie sous chargements variables (Doctoral dissertation, Ecole Polytechnique X).
- [17] KENMEUGNE Bienvenu (1996). Contribution à la modélisation du comportement en fatigue sous sollicitation multiaxiale d'amplitude variable. INSA de Lyon France.