International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 20 No. 1 Jan. 2016, pp. 210-232

http://www.ijisr.issr-journals.org/

LA DUALITE COMME NOTION “FUGS” EN SCIENCES MATHEMATIQUES

[THE DUALITY CONCEPT AS "FUGS" IN MATHEMATICAL SCIENCES]

David Mapendano

Département de Mathématique-physique,
Institut Supérieur Pédagogique d’Idjwi (ISP/IDJWI),
Idjwi, Sud-kivu, RD Congo

ABSTRACT: The mathematical notion of "dual" and "duality" or "proposal dual" in its federating release, unifying, generalizing and simplifying (fugs, in acronym) studied in Linear Algebra (specifically in the areas of theory vector), is a concept that is a common denominator in several branches of mathematics. It appears, in fact, under diverse forms and with apparent differences on the semantic level, both in projective geometry, set theory, topology in differential geometry and crystallography, to name but a few illustrative examples. It is legitimate to ask about the relationship between these different aspects of duality and our purpose in this article is precisely to show that the duality which we call algebraic - that is to say one that is studied in universities in the theory of vector spaces - is one to which identify themselves in one way or another, all other forms of duality studied mathematics. While it must be acknowledged here that, in some cases, the relationship between some of these forms of dualities with algebraic duality is not always easy to establish at first.

KEYWORDS: Duality, dual dual, vector application, crystallography.

RÉSUMÉ: La notion mathématique de « dual », de « dualité » ou de « proposition duale », dans sa version fédératrice, unificatrice, généralisatrice et simplificatrice (FUGS, en sigle) étudiée en algèbre linéaire (spécifiquement dans la théorie des espaces vectoriels), est une notion qui constitue un dénominateur commun à plusieurs branches des mathématiques. Elle apparaît, en effet, sous des formes diversifiées et avec des différences apparentes sur le plan sémantique, aussi bien en géométrie projective, en théorie des ensembles, en topologie, en géométrie différentielle et en cristallographie, pour ne citer que ces quelques exemples illustratifs . Il est légitime de se poser la question sur le rapport existant entre ces différents aspects de la dualité et notre propos, dans le présent article, est de montrer justement que la dualité que nous qualifions d’algébrique – c’est-à-dire celle qui est étudiée dans nos universités dans la théorie des espaces vectoriels – est celle à laquelle s’identifient, d’une manière ou d’une autre, toutes les autres formes de dualité étudiées en mathématiques. Même s’il faut reconnaître ici que, dans certains cas, le rapport entre certaines de ces formes de dualités avec la dualité algébrique n’est pas toujours facile à établir de prime abord.

MOTS-CLEFS: Dualité, bi duale, vecteur, application, cristallographie.

1 INTRODUCTION

1.1 NOTE LIMINAIRE

Nous supposons que sont connues les différentes formes de dualité qui apparaissent dans les différentes branches mathématiques mentionnées dans cet article. Notre propos n’est pas de faire un exposé exhaustif sur chacune d’elles, mais plutôt d'en mentionner canoniquement les éléments constitutifs qui nous permettrons éventuellement d'établir entre elles. Il s'agit donc, en s'appuyant sur ces notions de dualité qui sont supposées connues par nos lecteurs, de mener une réflexion de type épistémologique sur les rapports existant entre les dualités ensembliste, topologique, algébrique, projective ou algébrique, en vue de dégager l'aspect unificateur de la dualité algébrique, l'épistémologie pouvant être brièvement définie comme la science de la science, c'est-à-dire une réflexion critique sur une science, ses développements, ses difficultés, ses méthodes, etc..

1.2 GENERALITES

La dualité est définie par le dictionnaire *Petit Robert* (1981, p. 582) de la manière suivante : « *caractère ou état de ce qui est double en soi ; coexistence de deux éléments de nature différente*. » En faisant remarquer que ce concept vient du latin « *dualis* » (qui signifie « deux »), ce même dictionnaire précise que des propriétés « duales », en mathématiques, sont des « *propriétés qui sont par deux et qui présentent un caractère de réciprocité*. »

Il y a donc dualité en mathématiques lorsque deux catégories d'objets jouent des rôles analogues l'une envers l'autre. Nous verrons, par exemple, dans notre exemple fondamental illustrant la dualité en algèbre linéaire, que les formes linéaires jouent par rapport aux vecteurs des rôles identiques au rôle que jouent les vecteurs vis-à-vis des formes linéaires. Si un énoncé est vrai dans une catégorie, il sera également vrai dans la catégorie duale. Il existe ainsi des énoncés que l'on a historiquement démontrés indépendamment, avant de s'apercevoir qu'ils étaient duaux l'un de l'autre et qu'**une seule** démonstration suffisait pour démontrer simultanément les **deux** résultats. Là réside l'intérêt de la dualité. Dans ce qui suit, nous ne donnerons pas de démonstrations des énoncés duaux que nous allons évoquer (cette « préoccupation de preuves » dépasse, d'ailleurs, très largement le cadre de notre modeste étude). Nous nous contentons de donner des exemples d'énoncés duaux, afin d'illustrer ce qu'est la dualité et de montrer le rôle « centralisateur » que ce concept joue dans le développement et l'étude des mathématiques, en servant de « dénominateur commun » entre certaines (si non la plupart) de ses branches.

1.3 LA DUALITE TELLE QU'ELLE APPARAIT DANS PLUSIEURS BRANCHES DES MATHEMATIQUES

On trouve de nombreux exemples illustrant la dualité dans plusieurs branches des mathématiques, de la théorie des ensembles à la géométrie différentielle et à la topologie, en passant par la géométrie de l'espace (en ce qui concerne la cristallographie), par la géométrie projective et par l'algèbre linéaire. Voici ceux que nous avons considérés comme les plus prégnants (et que nous reprenons à titre purement illustratif, sans nous appesantir sur les spécificités et la complexité intrinsèque de chacune des branches ou théories mathématiques qui servent de fondements à ces exemples) :

- Commençons notre énumération par l'exemple suivant que nous pouvons considérer à la fois comme le plus « classique » (étant donné qu'il se classe dans la catégorie « élémentaire » des ensembles) et le plus important (car les autres exemples s'y ramènent d'une façon ou d'une autre, comme nous allons l'établir dans la suite) : Dans la *théorie des ensembles* (ou dans l'*algèbre*[1] *des propositions logiques* dans laquelle les ensembles représentent les domaines d'existence et/ou de réalisation des formes propositionnelles définies sur un référentiel E, et les opérations È et Ç les connecteurs logiques « ou » noté « $\vee$ » et « et » noté « $\wedge$ »), les opérations È et Ç sont des notions duales au moyen du passage au complémentaire (ou par simple distributivité). En effet, si nous considérons un théorème de la théorie des ensembles, dans l'ensemble des parties d'un ensemble E, et si nous y opérons les substitutions suivantes : È « Ç, Æ « E, Ì « É, A « **C**A = A' (complémentaire de A)[2], alors nous obtenons un autre théorème (symétrique par rapport au premier) et parfaitement valide. Par exemple : La propriété « A Ç **C**A = Æ » devient « **C**A È A = E ». De même, si A, B et C sont des parties de E, la propriété : « A Ç (B È C) = (A Ç B) È (A Ç C) » devient, en vertu des substitutions susmentionnées, « A' È (B' Ç C') = (A' È B') Ç (A' È C') ».

---

[1] *On peut, en effet, démontrer que l'ensemble des parties d'une ensemble E (et donc l'ensemble des propositions logiques définies sur le référentiel E) possède la structure mathématique d'algèbre pour les opérations ensemblistes classiques que sont la différence symétrique, la réunion et l'intersection des ensembles. Une algèbre étant, en particulier, un espace vectoriel (et un anneau), nous estimons que ce premier exemple de dualité peut être rapproché de l'exemple fondamental que nous donnons dans la suite, dans le cas de l'algèbre linéaire.*

[2] *La double-flèche « « » indique que l'opération située à gauche est remplacée par celle qui est placée à droite (et réciproquement), par dualité.*

Cette dualité résulte de la relation **C**(A Ç B) = **C**A È **C**B, équivalente à la relation **C**(A È B) = **C**A Ç **C**B, ces deux égalités étant justement connues, en logique mathématique, sous le nom de « *lois de dualité de De Morgan* ».

- En *géométrie projective*, il existe une dualité (en géométrie projective plane[3] précisément) entre : « point « droite », « point intersection de deux droites « droite passant par deux points », « points alignés « droites concourantes », « point appartenant à une conique « droite tangente à une conique », Etc.

Cette dualité est très proche de celle que nous verrons dans la suite, en algèbre linéaire, un point correspondant à un vecteur et une droite à une forme linéaire, mais la justification profonde de cette dualité fait intervenir la notion de polarité en géométrie projective (où les droites parallèles sont des cas particuliers de droites concourantes – se coupant au point à l'infini –, notion sur laquelle nous n'allons pas nous appesantir. Donnons simplement quelques détails sur les systèmes de coordonnées caractérisant certains des théorèmes duaux utilisant la conversion exposée ci-dessus.

On rappelle qu'à un point a du plan affin réel, de matrice de coordonnées affines simples $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, on peut associer une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ k \end{pmatrix}$, où $k \neq 0$, dite matrice des coordonnées affines homogènes de a. Et que, par définition, toute matrice $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, représente un point impropre ou encore un point à l'infini. Par ailleurs, l'équation d'une droite du plan étant, comme on le sait déjà, de la forme $d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 = 0$, avec $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$, nous pouvons donc associer à une droite du plan une matrice-ligne de la forme $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, avec $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$. L'équation homogène d'une droite est de la forme $d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0$, ce qui peut se noter par le produit matriciel $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. En particulier, une droite à l'infini admet comme équation $x_3 = 0$ (et elle admet comme matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $d_3 \neq 0$).

On rappelle que le dual de la proposition « les trois points du plan sont alignés (ou appartiennent à une même droite du plan) » est « les trois droites sont concourantes en un point du plan ». En utilisant les notations matricielles respectivement fixées, la première proposition conduit logiquement à l'annulation du déterminant d'ordre 3 suivant : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ (où $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ sont les matrices respectives des coordonnées homogènes des trois points alignés), tandis que la seconde proposition conduit, à son tour, à l'annulation du déterminant $\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$ (où $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$ sont les matrices respectives des trois droites concourantes).

La propriété algébrique d'annulation d'un déterminant d'ordre trois traduit donc aussi bien l'alignement de trois points que la concourante de droites du plan.

---

[3] *J. KEIL, (1975). Géométrie analytique plane : exposé moderne, La Procure, Bruxelles, pp. 20 – 40.*

Toujours dans le cadre de la géométrie projective[4], voici deux autres théorèmes duaux utilisant la même conversion susmentionnée :

- **Le théorème de PAPPUS** :

« Soient trois points alignés A_1, B_1, C_1 (ainsi que trois autres points alignés A_2, B_2, C_2). Alors les trois points d'intersection des droites (A_1B_2) et (A_2B_1), (A_1C_2) et (A_2C_1), (B_1C_2) et (B_2C_1) sont alignés. »

Le *dual* de ce théorème se formule de la manière suivante : « Soient trois droites concourantes a_1, b_1, c_1 (ainsi que trois autres droites concourantes a_2, b_2, c_2). Alors les trois droites passant par les points a_1 Ç b_2 et a_2 Ç b_1, a_1 Ç c_2 et a_2 Ç c_1, b_1 Ç c_2 et b_2 Ç c_1 sont concourantes. »

- **Le théorème de DESARGUES** :

« Soient A, A', B, B', C, C' six points tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes. Alors les trois points intersections de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A'), sont alignés. »

Le *dual* de cette proposition s'énonce comme suit : « Soient *a*, *a*', *b*, *b*', *c*, *c*' six droites telles que les points *a* Ç *a*', *b* Ç *b*' et *c* Ç *c*' soient alignés. Alors les trois droites passant par *a* Ç *b* et *a*' Ç *b*', *b* Ç *c* et *b*' Ç *c*', *c* Ç *a* et *c*' Ç *a*', sont concourantes. »

N.B. La validité de ces deux théorèmes peut être aisément vérifiée à l'aide de graphiques.

- En *algèbre linéaire*, soit E un espace vectoriel sur un champ K. L'espace L(E, K) des formes linéaires de E dans K est un K - espace vectoriel noté E* et appelé espace **dual** de E. L'utilisation du concept « dual » dans ce contexte purement mathématique peut se justifier par le fait que, si *x* est élément de E et j élément de E*, alors j (*x*) est un scalaire qu'on peut voir de deux façons, dites duales : ou bien on applique la forme linéaire j sur le vecteur *x*, ou bien on applique le vecteur *x* sur l'application linéaire j. Autrement dit, dans le dernier cas, c'est j la variable et *x* la fonction. Cette symétrie de rôles découle du fait qu'en dimension finie, le **bidual** (ou dual du dual) de E, noté E**, est isomorphe (et s'identifie donc, à un isomorphisme près) à E. Ce qui signifie que tout élément de E est à la fois un vecteur (en tant qu'élément d'un espace vectoriel) et une forme linéaire (en tant qu'élément du dual E** = E d'un espace vectoriel, à un isomorphisme près).

Plutôt que la dualité projective (évoquée dans l'exemple précédent), c'est la dualité linéaire, c'est-à-dire entre espaces vectoriels qui est désormais considérée comme fondamentale en Mathématiques. Soit *E* un espace vectoriel (réel ou complexe). Son dual *E** est, comme nous l'avons rappelé ci-dessus, l'espace vectoriel formé des *formes linéaires* sur *E,* c'est-à-dire des fonctions linéaires (à valeurs réelles ou complexes selon le cas, en supposant que K est le champ des réels ou celui des complexes).

On a donc un accouplement de dualité entre *E** et *E,* qui à la forme linéaire $v^* \in E^*$ et au vecteur $v \in E$ associe le nombre (réel ou complexe) $< v^*,\ v > \ = \ v^*(v)$.

Cet accouplement permet, en prenant les choses à l'envers, de voir *v* comme une forme linéaire sur *E**, c'est-à-dire un élément du bidual *E***. Lorsque *E* est de dimension finie, ceci permet d'identifier *E* et son bidual *E***. Dans le cas d'un espace euclidien *E,* on a déjà un produit scalaire *<* , *>* sur *E.*

Celui-ci permet d'identifier *E* avec son propre dual *E**.

Le lien avec le cas projectif est le suivant. Plutôt que de voir un espace projectif *P* de dimension *n* comme un espace usuel vectoriel complété à l'infini, on peut le voir comme l'espace des droites *P*(*E)* d'un espace vectoriel *E* de dimension $n+1$. L'espace projectif dual *P** n'est autre que l'espace *P*(*E**) attaché à l'espace vectoriel dual.

- L'exemple fondamental précédent s'étend, en *géométrie différentielle*, à l'étude d'un espace tangent V_x à une variété différentiable M_m (de dimension finie m) en un point x de cette variété (dont on sait qu'il a la structure d'espace vectoriel réel et dont les éléments sont appelés « vecteurs tangents ») et à son espace cotangent (dont les éléments sont dits des « covecteurs » et qui est, par définition, l'espace dual de V_x. La base canonique de V_x est notée $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{1 \le i \le m}$ tandis

[4] *Daniel LEHMANN, Rudolphe BKOUCHE, Initiation à la géométrie, P.U.F., Paris, 1988 (pp. 250-261).*

que sa base duale est notée $\{dx_i\}_{1 \leq i \leq m}$, où $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est un système de coordonnées locales de x relativement à une carte locale $(U,\varphi) \ni x$ de M_m.

- Nous citerons également, en passant, la théorie de la mesure et celle de l’intégration, où nous retrouvons également cette notion de dualité entre l’espace noté £^{p} des fonctions mesurables, dont la puissance p ième est Lebesgue-intégrable relativement à la mesure μ de Lebesgue (c’est-à-dire telles que $\int_E |f|^p d\mu < +\infty$, où $1 \leq p < +\infty$, p étant un entier premier), espace dont on démontre qu’il a une structure d’espace vectoriel normé et réticulé, et son espace dual (dit *espace de Lebesgue* et noté simplement L^p). Signalons à ce stade que, pour cet exemple et pour le précédent, la notion de dualité se rapporte directement à l’acception que nous lui avons attribuée précédemment dans le cas de l’algèbre linéaire et des espaces vectoriels.

- En *topologie*, de la même façon, il y a dualité entre **point intérieur** et **point adhérent**, et entre **ouverts** et **fermés** dans les ensembles topologiques, en utilisant le fait que le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

Appelons **intérieur** d'une partie d’un référentiel E l'ensemble de ses points intérieurs, et **adhérence** de cette partie l'ensemble de ses points adhérents. Alors on établit aisément que le complémentaire de l'intérieur est égal à l'adhérence du complémentaire.

En effet : *x* appartient au complémentaire de l'intérieur d'une partie A Û *x* n'est pas intérieur à A Û non ($ *r* > 0, B(*x*, *r*) Ì A) Û " *r* > 0, B(*x*, *r*) Ë A Û " *r* > 0, B(*x*, *r*) Ç **C**A ¹ Æ Û *x* appartient à l'adhérence du complémentaire de A.

Notons que les espaces topologiques peuvent également être munis (pour les opérations ensemblistes classiques que nous avons citées dans notre premier exemple illustratif) de structures dénommées « clan », « σ-clan », « algèbre », « σ-algèbre (ou « tribu ») des parties du référentiel E, les deux dernières structures étant définies à partir de systèmes d’axiomes dont on peut montrer l’équivalence avec ceux qui caractérisent la structure mathématique d’algèbre … Nous pouvons donc considérer que, à l’instar de nos autres exemples, l’évocation de la dualité dans le présent exemple illustratif s’apparente à celle que nous avons faite dans notre exemple fondamental sur les espaces vectoriels.

Cela se traduit par exemple par les deux formules duales :

« L'intérieur de A est la réunion des ouverts inclus dans A ».

« L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A ».

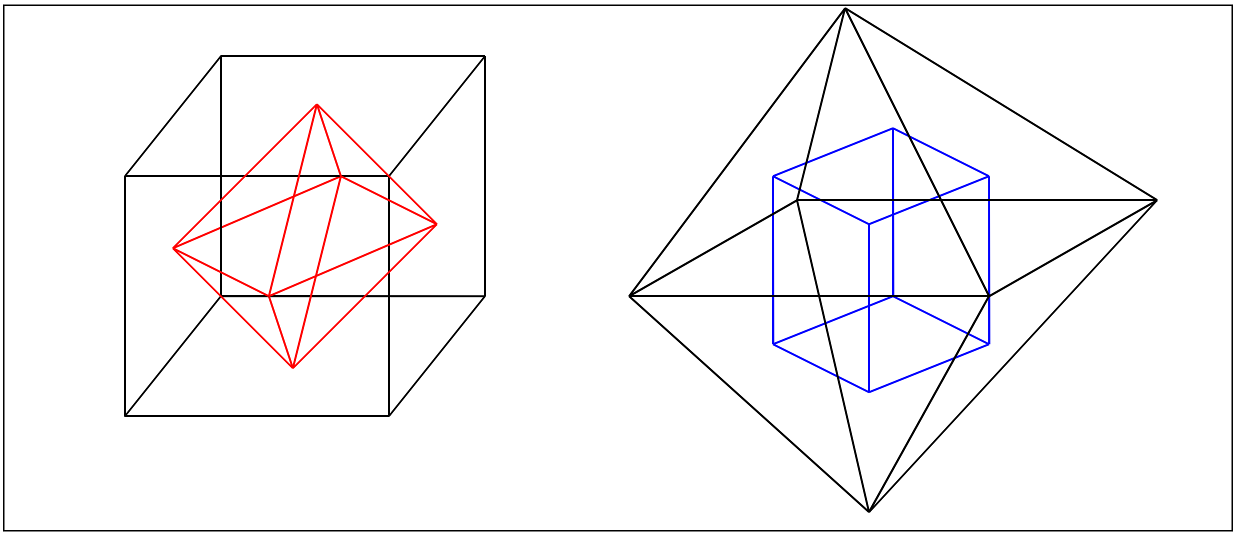
ou bien :

« L'intérieur de A est le plus grand des ouverts inclus dans A »

« L’adhérence de A est le plus petit des fermés contenant A ».

Dans le texte précédent, les notions duales sont telles que le passage au complémentaire permet de transposer l'une en l'autre.

- En *cristallographie*, on est amené à étudier les polyèdres et les groupes laissant globalement invariant ces polyèdres. Il existe une notion de dual dans les polyèdres. Etant donné un polyèdre, on appelle polyèdre dual le polyèdre construit de la façon suivante : à chaque face du premier polyèdre correspond un sommet du second. On relie deux sommets du second polyèdre si les faces du premier possèdent une arête commune. On montre alors que le dual du second polyèdre n'est autre que le premier polyèdre. Ainsi, le cube et l'octaèdre sont duaux, le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux, le tétraèdre est son propre dual.



L'intérêt de cette notion réside dans le fait que deux polyèdres duaux possèdent le même groupe d'isométries les laissant invariants. Ainsi, le groupe des isométries laissant invariant le cube possède 48 éléments (le cube est donné par un sommet et trois arêtes issues de ce sommet. Il y a 48 images possibles = 8 sommets × 3! Arêtes). Le groupe des isométries laissant invariant l'octaèdre est identique. Ce groupe ne permet pas de discerner le cube de l'octaèdre. Toute propriété de ce groupe s'appliquera donc aussi bien au cube qu'à l'octaèdre. Suivant le cas, on préfèrera raisonner sur le cube ou sur l'octaèdre. Ainsi, le groupe de 48 éléments possède :

* 24 isométries directes, à savoir :

- l'identité

- 3 demi-tours autour d'axe passant par des centres de faces opposées du cube (ou passant par deux sommets opposés de l'octaèdre)

- 6 rotations d'angle ± p/2 autour des mêmes axes

- 8 rotations d'angle ± 2p/3 autour d'axes passant par des sommets diamétralement opposés du cube (ou par les centres de faces opposées de l'octaèdre)

- 6 demi-tours autour d'axe passant par les milieux de deux côtés opposés du cube (ou par les milieux de deux côtés opposés de l'octaèdre)

* 24 isométries indirectes, à savoir :

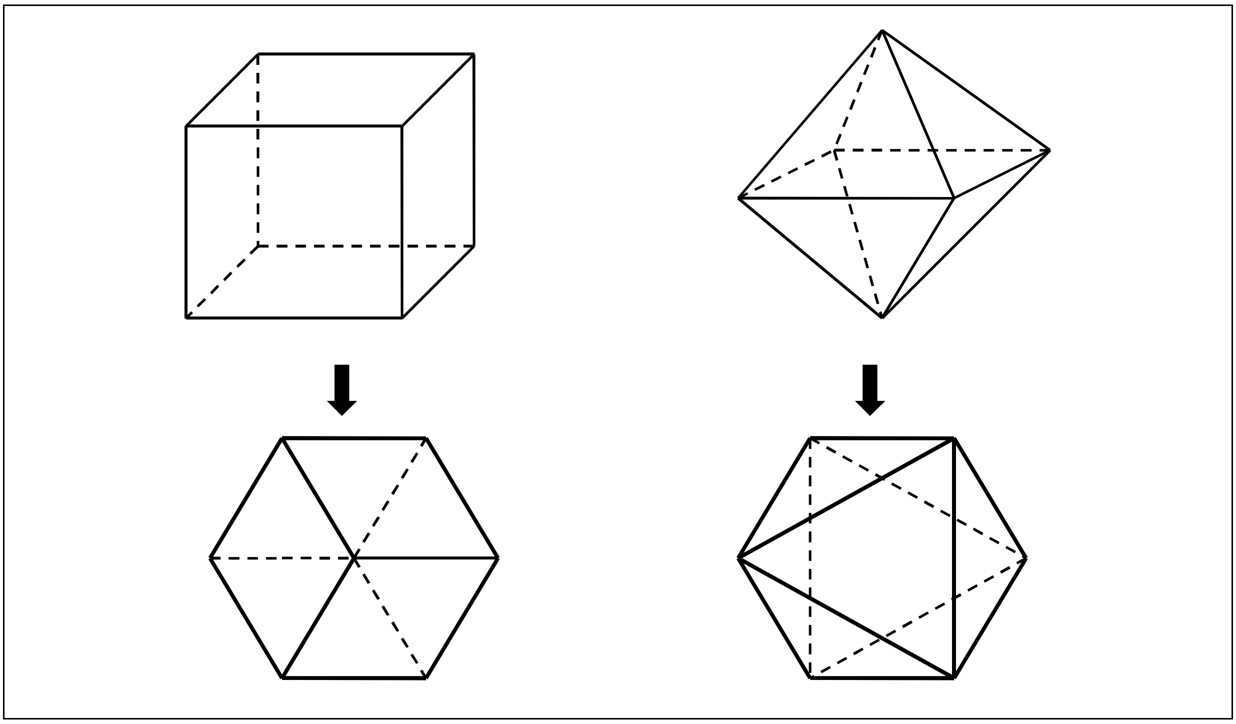
- une symétrie centrale par rapport au centre du cube (ou de l'octaèdre)

- 3 « réflexions » (i.e. symétries orthogonales) par rapport à des plans médiateurs de côtés du cube (ou par rapport aux trois bases carrées de l'octaèdre)

- 6 réflexions par rapport à des plans passant par deux côtés opposés du cube (ou deux côtés opposés de l'octaèdre)

- 6 rotations d'angle ± p/2 autour des axes passant par les centres de faces opposées du cube (ou par deux sommets opposés de l'octaèdre), composées avec une réflexion par rapport au plan orthogonal à ces axes et passant par le centre du cube (ou de l'octaèdre)

- 8 rotations d'angle ± p/3 (un sixième de tour) autour d'axes passant par deux sommets opposés du cube (ou par les centres de deux faces opposées de l'octaèdre), composées avec une réflexion par rapport au plan orthogonal à ces axes et passant par le centre du cube (ou de l'octaèdre). Si on place son œil selon l'un des axes de rotation, on verra comme profil du polyèdre un hexagone, que ce polyèdre soit un cube ou un octaèdre.



REMARQUE :

Cet exemple peut être étendu à d’autres solides de l’espace. Nous citerons par exemple, à titre indicatif, le cas du tétraèdre qui est auto-dual, que le dual d’un cube est un octaèdre (comme cela a été établi précédemment), que le dual d’un icosaèdre est un dodécaèdre, Etc. Et que la duale de la duale est la configuration originale. A l’aide du principe général découlant de cette dualité on peut démontrer automatiquement de nouveaux théorèmes à partir d’anciens en échangeant les propriétés d’incidence qu’ils renferment.

Les exemples précédents nous montrent combien la notion de dualité est applicable dans plusieurs branches des mathématiques. Ces illustrations légitiment donc l’étude de la dualité dans un cadre centralisateur, généralisateur et unificateur – où tous les objets différents que nous avons évoqués dans chacun des exemples précédents, seront tous appelés indistinctement des « vecteurs » et étudiés comme tels, ce qui permettra de dégager leurs propriétés structurelles et celles qui se rattachent (ou qui sont rattachables) par dualité : c’est justement l’algèbre linéaire qui constituera ce cadre privilégié d’étude de la dualité (et de bien d’autres propriétés qui s’appliquent indistinctement aux différentes catégories d’objets susmentionnés et réduits à l’état de vecteurs, c’est-à-dire des éléments d’un ensemble, muni de deux opérations l’une interne et noté additivement (pour laquelle cet ensemble est un groupe abélien), l’autre externe et notée multiplicativement vérifiant, par rapport à la première loi interne deux conditions se rapportant à une pseudo-distributivité, une associativité mixte et l’existence d’un scalaire unité (mixte pour la loi externe).

Signalons, pour terminer cette section, que la dualité intervient également dans l’étude des systèmes d’équations linéaires. En effet, une équation comme $ax + by + cz = 0$ peut à la fois être interprétée comme l’équation du plan vectoriel défini par les réels a, b et c. x, y et z sont alors variables et représentent les coordonnées d’un point quelconque de ce plan. Mais on peut aussi considérer a, b et c comme variables et x, y et z comme fixes. Dans ce cas, cette même équation représente tous les plans contenant le point de coordonnées x, y et z.

Par ailleurs, toute équation linéaire de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b$ peut être interprétée comme l’image par une forme linéaire X^* définie sur R^n d’un vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$. Ce qui peut se noter d’une manière abrégée de la manière suivante :

$$< x^*, x > = b \text{ (où } x^*: R^n \to R \ : \ x \mapsto x^*(x) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n) .$$

2 LA DUALITE « NATURELLE » AU SENS DE FROBENIUS

2.1 L'ETUDE DE LA DEPENDANCE LINEAIRE AU SENS DE FROBENIUS

C'est à travers les travaux de Frobenius que se dégagent plus clairement les notions de rang d'un système linéaire et de dimension d'un ensemble de solutions. Il fut un des premiers à amener un changement dans l'orientation des recherches associées aux systèmes d'équations. Dans son article intitulé *Uber das Pfaffsche Problem* de 1875, il montre, en effet, une façon nouvelle d'aborder les systèmes linéaires, en mettant en avant la notion de dépendance (ou d'indépendance) linéaire. Dans ce texte, il commence par donner la définition suivante de l'indépendance linéaire, encore tout à fait « moderne » :

« *Soient* $A_1, \ldots, A_n$ *et* $B_1, \ldots, B_n$ *deux solutions particulières quelconques (du système de* m *équations indépendantes) des équations :* $a_1^{(\mu)} u_1 + \cdots + a_n^{(\mu)} u_n = 0$ *(S). Alors* $a A_1 + b B_1, \ldots, a A_n + b B_n$ *est aussi une solution. Plusieurs solutions particulières* $A_1^{(x)}, \ldots, A_n^{(x)}$ $(x = 1, 2, \ldots, k)$ *seront dites indépendantes ou différentes si les* $c_1 A_\alpha^{(1)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(k)} = 0$ *ne peuvent s'annuler pour tous les* $\alpha = 1, 2, \ldots, n,$ *sans que les* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *soient tous nuls, en d'autres termes, si les* k *formes linéaires* $A_1^{(x)} u_1 + \cdots + A_n^{(x)} u_n = 0$ *sont indépendantes.* »[5]

Frobenius innove en reliant directement cette définition à la fois aux équations et aux $n-$ uplets solutions d'un système linéaire : il réalise un pas important vers le concept moderne de vecteur. Dans la suite de sa démonstration, il s'appuie essentiellement sur cette notion de dépendance linéaire et aussi sur la propriété suivantes sur les déterminants : les équations sont indépendantes si et seulement si tous les mineurs de plus grand ordre du système ne sont pas nuls. Il commence ainsi par montrer qu'un système homogène[6] de m équations à n inconnues (avec $n > m$) admet $n - m$ solutions indépendantes (en exhibant une sorte de base canonique de solutions) et que c'est le maximum de solutions qu'un tel système peut admettre (en prouvant que $n - m + 1$ solutions seraient toujours dépendantes) :

« *Donc* m *équations linéaires homogènes indépendantes en* n *inconnues ont exactement* $n - m$ *solutions différentes, et de plus* m *équations linéaires homogènes quelconques en* n *inconnues ont au moins* $n - m$ *solutions différentes.* » (Ibidem, p. 265)

Il affirme ensuite que la solution générale des équations est une combinaison linéaire quelconque de ces $n - m$ solutions indépendantes : la notion de base de solutions est fortement sous-jacente dans son propos suivant :

« *Soient* $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$ *des constantes arbitraires, alors :* $A_1 = \sum c_\nu A_1^{(\nu)}, \ \ldots, \ A_n = \sum c_\nu A_n^{(\nu)}$ *sera appelée solution générale des équations (S). On peut obtenir d'elle toute solution particulière, en donnant aux constantes arbitraires des valeurs déterminées. Ainsi, soient* $B_1^{(\nu)}, B_2^{(\nu)}, \ldots, B_n^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n - m)$ *des solutions différentes quelconques, alors* $B_\alpha^{(\nu)} = c_{\nu,1} A_\alpha^{(1)} + \cdots + c_{\nu,n-m} A_\alpha^{(n-m)}$ (...). » (Ibidem, p. 265)

2.2 ET VOILA UNE INTERPRETATION (IMPLICITE) DE LA « DUALITE » …

Frobenius introduit ensuite la notion de système « associé » ou « adjoint » à associer au concept moderne de dualité : c'est le système composé d'équations dont les coefficients sont les composantes des éléments d'une base de solutions du système initial.

Pour illustrer cela, notons le système homogène de départ :

---

[5] *Frobenius (1875, p. 264), cité par J.-L. Dorier (1998, p. 246).*
[6] *Frobenius étudie uniquement le cas les systèmes homogènes car seul l'aspect « linéaire » l'intéresse.*

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}\,x_1 + a_{p2}\,x_2 + \cdots + a_{pn}\,x_n = 0 \end{cases} \quad (S) \quad ;$$

Si $\left(A_1^{(x)}, \ldots, A_n^{(x)}\right)$ $(x = 1, 2, \ldots, n - r)$, r étant l’ordre maximal des mineurs non nuls extraits de ce système, est une base de solutions de (*S*), le système associé à (*S*) est alors :

$$\begin{cases} A_1^{(1)}\,x_1 + A_2^{(1)}\,x_2 + \cdots + A_n^{(1)}\,x_n = 0 \\ A_1^{(2)}\,x_1 + A_2^{(2)}\,x_2 + \cdots + A_n^{(2)}\,x_n = 0 \\ \vdots \\ A_1^{(n-r)}\,x_1 + A_2^{(n-r)}\,x_2 + \cdots + A_n^{(n-r)}\,x_n = 0 \end{cases} \quad (S^*)$$

Maintenant, si $\left(B_1^{(v)}, \ldots, B_n^{(v)}\right)$ $(v = 1, 2, \ldots, q)$ est une base de solutions du système linéaire homogène associé (*S**), le système qui lui est, à son tour, associé est :

$$\begin{cases} B_1^{(1)}\,x_1 + B_2^{(1)}\,x_2 + \cdots + B_n^{(1)}\,x_n = 0 \\ B_1^{(2)}\,x_1 + B_2^{(2)}\,x_2 + \cdots + B_n^{(2)}\,x_n = 0 \\ \vdots \\ B_1^{(q)}\,x_1 + B_2^{(q)}\,x_2 + \cdots + B_n^{(q)}\,x_n = 0 \end{cases} \quad (S^{**})$$

Frobenius démontre que, quel que soit le choix des bases à chaque étape, le système (*S***) est équivalent au système (*S*) et que $q = r.$ En considérant le système adjoint (*S**) à un ensemble de *n*-uplets solutions d’un système d’équations linéaires, Frobenius utilise le concept moderne de dualité. Il réitère son raisonnement en travaillant avec le système adjoint du système adjoint précédemment considéré. Bien entendu, Frobenius n’a pas conscience du théorème de réflexivité (ou d’idempotence du passage à l’adjoint), mais c’est bien ce dernier qui est appliqué ici.

Il est alors en mesure de montrer que l’ordre maximal de mineur non nul est un invariant non seulement du système mais aussi de son ensemble de solutions (tout système ayant le même ensemble de solutions a même ordre maximal de mineur non nul). Avec ces résultats, Frobenius définit le concept de ***rang*** dans toute sa généralité, en ces termes :

« *Quand dans un déterminant, tous les mineurs d’ordre $m+1$ s’annulent, mais que ceux d’ordre m ne sont pas tous nuls, j’appelle rang du déterminant la valeur de m.* »

Par la suite, la notion de rang (qui reste associée aux déterminants dans le texte cité) se trouve reliée directement aux matrices. Ainsi l’étude des systèmes linéaires, appliquée à des systèmes de plus en plus abstraits, a permis de dégager des concepts théoriques liés à la linéarité, notamment ceux de « rang » et de « dualité ».

3 Et Maintenant, Un Petit Mot Sur La Dualite Dite « Formelle »

3.1 Espace Dual D’un Espace Vectoriel Donne

Les notions d’espace primal, dual, bi dual, base duale, etc., ont été exposées avec force détails dans la thèse de doctorat de Martine de Vleeschouwer[7]. Le lecteur intéressé par les preuves des propriétés que nous évoquons laconiquement ci-dessous pourra se référer à cette thèse ou à n’importe quel ouvrage d’algèbre linéaire de niveau universitaire. Nous nous contenterons donc de citer ci-dessous laconiquement les éléments qui constituent le fondement de cette dualité.

[7] *Martine De Vleeschouwer, (2010). Ibidem, Annexes 9 et 10, pp. 85-104.*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \to K$. Soit E^* l'ensemble des formes linéaires définies sur *E*. On démontre que E^* est un *K*-espace vectoriel de dimension n, appelé espace dual de *E*. L'espace dual de E^* se note E^{**} et s'appelle le "bi-dual" de *E*. Et on montre également que $E^{**} \overset{isomorphe}{\approx} E$. Par ailleurs, si $B = (e_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de *E*, on appelle base duale de *B* une base $B^* = (\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ de *E***. Elle est telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$

Un élément d'un espace vectoriel *E* quelconque, de dimension finie n, peut donc être interprété indifféremment comme un vecteur et une forme linéaire sur *E*. Tout élément de E^* est une forme linéaire sur *E* et, réciproquement, tout élément de *E* est une forme linéaire sur *E**.

Signalons, enfin, qu'à propos des dualités « spontanée » et « formelle » présentées succinctement ci-haut, Martine De Vleeschouwer termine, dans sa thèse, son exposé concernant l'apport de Frobenius sur la dualité par la remarque suivante :

« *Un apport intéressant pour l'étude de la dualité serait un approfondissement de la réflexion sur le lien entre la dualité, au sens actuel, et la conceptualisation par Frobenius de la notion de rang, dans le cadre des systèmes d'équations linéaires. Cette réflexion dépassant largement les questions de recherche qui nous préoccupent ici, nous la proposons dans les perspectives d'avenir*. »[8]

Pourtant, il existe, selon nous, des similitudes triviales entre ces deux conceptions de la dualité, comme le montre l'argumentation suivante.

4 Rapports Entre La Dualite Algebrique Et Les Autres Formes De Dualites Mathematiques Evoquees

4.1 Introduction

Signalons tout d'abord que les rapports entre la dualité en géométrie différentielle et la dualité formelle ou algébrique, ou entre la dualité topologique et la dualité algébrique, ou encore entre la dualité définie dans la théorie de la mesure et de l'intégration (en analyse supérieure) et la dualité formelle ou algébrique, sont trivialement établis par le fait que les référentiels évoqués dans ces deux cas sont en particulier des espaces vectoriels (voir paragraphe I.1.). En ce qui concerne le cas particulier d'un espace topologique, signalons qu'il peut être muni d'une structure naturelle d'algèbre de Boole pour les opérations ensemblistes d'intersection, de réunion et de complémentation classique. Or, une algèbre est, par définition et en particulier, un espace vectoriel. Ce qui permet de ramener la dualité topologique (et plus généralement la dualité ensembliste) à la dualité formelle ou algébrique.

4.2 Quid De La Dualite « Spontanee » (Au Sens De Frobenius) Par Rapport À La Dualite Dite « Formelle » Ou Algebrique, Enseignee Dans Nos Universites ?

Commençons notre propos par un exemple illustratif qui nous permettra de bien illustrer les opérations algébriques auxquelles nous ferons allusion dans notre analyse des dualités « naturelle » et « formelle ». Nous partons d'un exemple montrant comment les systèmes d'équations linéaires permettent de déterminer l'équation d'un plan de l'espace dont on connaît les coordonnées de trois points non alignés. Cet exemple montre comment on détermine le système adjoint d'un système donné (dualité spontanée ou naturelle). En effet, si l'équation $ax + by + cz + d = 0$ à déterminer peut être assimilée à un système linéaire du type 1×3, alors le système adjoint correspondant, au sens de Frobenius, est justement le système 3×3 dont on se sert pour résoudre ce problème. Dans une première illustration, nous considérons le cas où $d \ne 0$, tandis que le second exemple se penche sur le cas d'un plan vectoriel ($d = 0$), et donc d'un système linéaire initial homogène. Le troisième exemple nous montre comment se détermine concrètement l'espace dual d'un espace vectoriel donné, dans le cadre de la dualité formelle.

[8] *Martine De Vleeschouwer, (2010). Ibidem, p. 49.*

4.2.1 DUALITE « SPONTANEE » ET DUALITE ALGEBRIQUE

4.2.1.1 ILLUSTRATIONS CONCRETES DE LA DUALITE SPONTANEE

4.2.1.1.1 ILLUSTRATION DE LA TECHNIQUE PROPOSEE DANS NOTRE INGENIERIE POUR DETERMINER L'EQUATION D'UN PLAN COMPRENANT TROIS POINTS NON ALIGNES DONT ON DONNE LES COORDONNEES CARTESIENNES

Soit, par exemple, à déterminer l'équation du plan contenant (ou passant par) les points $A(1,-3,\ 3)$, $B\,(2,-5,4)$ et $C\,(3,-1,1)$. Nous partons de la forme « canonique » $mx+ny+pz+1=0$ de l'équation cherchée (qui, rappelons-le, est déduite de l'équation générale $ax+by+cz+d=0$ d'un plan l'espace, en posant $d\neq 0$, $m=a/d$, $n=b/d$ et $p=c/d$).

Puisque ce plan contient les points A, B et C, alors en portant leurs coordonnées respectives dans l'équation canonique ci-dessus, on obtient le système :

$$\begin{cases} m-3n+3p+1=0 \\ 2m-5n+4p+1=0 \\ 3m-n+p+1=0 \end{cases}$$

Dont la résolution conduit à la solution unique $\begin{cases} m=-1/4 \\ n=-2/4 \\ p=-3/4 \end{cases}$

On obtient alors, par identification : $\begin{cases} a/d=-1/4 \\ b/d=-2/4 \\ c/d=-3/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-d/4 \\ b=-d/2 \\ c=-3d/4 \end{cases} \quad (d\in IR)$

Il s'agit donc d'une classe d'équivalence $-d/4\cdot(1,2,3,-4)$ de solutions (pour laquelle seule la valeur de d est arbitraire). En posant $d=-4$ (choix dicté par le souci de simplifier les calculs et d'éviter les calculs fractionnaires) on obtient la solution particulière $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

Une équation cartésienne du plan donné est donc : $x+2y+3z-4=0$

4.2.1.1.2 ILLUSTRATION DE LA DETERMINATION DES SYSTEMES ADJOINTS SUCCESSIFS, EN PARTANT D'UN SYSTEME LINEAIRE DU TYPE 1 X 3 (ET EN LIAISON AVEC L'EXEMPLE PRECEDENT), DANS UN CADRE VECTORIEL

- Soit à présent l'équation $x+2y+3z=0$ (S). C'est l'équation cartésienne d'un plan de l'espace. Elle admet donc une infinité de solutions (qui tous les points de ce plan) dont voici, arbitrairement, trois solutions particulières : $A(-3,-3,\ 3)$, $B\,(1,-5,\ 3)$ et $C\,(2,\ 5,-4)$ représentant des points non alignés de l'espace (du fait que les accroissements de coordonnées de ces points pris deux à deux ne sont pas proportionnels. Remarquons que, dans le registre vectoriel, et en prenant comme repère ($A,\ \overrightarrow{AB}=(4,-2,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(5,\ 8,-7)$) , où $\left\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right\}$ est une partie libre du fait que $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}=42\neq 0$, ces trois points engendrent bien le plan Γ d'équation cartésienne $x+2y+3z=0$.

Notons qu'on pouvait aboutir à cette même conclusion en procédant comme suit : considérons l'ensemble des triplets $(x,\ y,\ z)$ de réels tels que $x + 2y + 3z\ =\ 0$. On peut écrire:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left\{ (x,\ y,\ z) \in IR^3\ /\ \ x + 2y + 3z\ =\ 0 \right\} = \left\{ (x,\ y,\ z) \in IR^3\ /\ \ x = -2y - 3z \right\} \\ &= \left\{ (-2y - 3z,\ y,\ z)\ /\ y,\ z \in\ IR \right\} = \left\{ (-2y,\ y,\ 0) + (-3z,\ 0,\ z)\ \ /\ y,\ z \in\ IR \right\} \\ &= \left\{ y\ (-2, 1,\ 0) + z\ (-3,\ 0,\ 1)\ \ /\ y,\ z \in\ IR \right\} =\ sev \left\langle (-2, 1,\ 0), (-3,\ 0,\ 1) \right\rangle\end{aligned}$$

$\Gamma\ \neq\ \phi\ =\ \{\}$ car (0, 0, 0) $\in$ Γ. (Trivial). Et on montre aisément que si $(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2)\ \in\ \Gamma,$ alors $\alpha(x_1,\ y_1,\ z_1)\ +\ \beta(x_2,\ y_2,\ z_2)\ \in\ \Gamma,\ \forall\alpha, \beta\ \in\ IR.$ Comme, en plus, le système $\{(-2, 1,\ 0), (-3,\ 0,\ 1)\}$ est libre (du fait que $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\ \neq\ 0),$ alors on conclut que Γ est un sous-espace vectoriel de IR^3 de dimension 2, donc un plan vectoriel réel.

Le système adjoint associé au système (S) est alors, dans ce cas :

$$\begin{cases} -3x - 3y + 3z\ \ = 0 \\ \ \ x - 5y + 3z\ \ =\ 0 \\ \ 2x + 5y\ \ - 4z\ = 0 \end{cases} \qquad \text{(S*)}$$

Il admet une infinité de solutions car $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} =\ 0.$ L'ensemble des solutions de ce système adjoint est $S* = \left\{ x(1, 2, 3)\ \ /\ \ x \in\ IR \right\}.$ C'est donc la droite vectorielle engendrée par (1, 2, 3) qui en est une des solutions particulières. Toutes les autres solutions de ce système sont des multiples de cette solution particulière. Il en résulte que le système adjoint du système (S*) est :

$x + 2y + 3z\ =\ 0$ (S*)*.

Il en résulte que (S*)* = S. (Idempotence du « passage à l'adjoint »).

On vérifie aisément que tout système adjoint qu'on pourrait s'imaginer à partir de 3 quelconques de solutions indépendantes de l'équation $x + 2y + 3z\ =\ 0$ conduira nécessairement à la même solution générale $k \cdot (1,\ 2,\ 3).$ Les composantes de cette solution sont, à un facteur près, les coefficients des inconnues d'une forme linéaire $\varphi\ (x,\ y,\ z)\ = x + 2y + 3z$ définie sur IR^3 dont le noyau[9] définit en compréhension un espace vectoriel de dimension 2 (i.e. un plan vectoriel). C'est, probablement, ce constat qui a inspiré à Frobenius la notion de rang d'un système adjoint qu'il définira comme la dimension de l'espace engendré par ses solutions.

Ainsi, pour notre exemple illustratif, le rang du système adjoint (S*) est égal à la dimension de l'espace vectoriel $V\ =\ \left\{ (x,\ y,\ z)\ \in\ IR^3\ /\ x + 2y + 3z\ =\ 0 \right\}$ qui vaut 2.

4.2.1.1.3 ILLUSTRATION DE LA DETERMINATION DE L'ESPACE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL REEL E DE DIMENSION FINIE 2

Considérons le *R*-espace vectoriel $IR^2 = V = \left\{ (x,\ y)\ \ /\ \ x,\ y \in\ IR \right\},$ de dimension 2, muni de sa base $B\ = \left\{ e_1 = (3, 1),\ e_2 = (1,\ 2) \right\}.$ Déterminons son espace vectoriel dual $V*.$ Par définition, $V*$ est le plan vectoriel réel

---

[9] On rappelle qu'il est établi, en algèbre linéaire, que le noyau $Ker\ f$ d'une application linéaire $f\ :\ E\ \rightarrow\ F$ (respectivement son image $\mathrm{Im}\ f$) est un sous-espace vectoriel de E (respectivement de F).

engendrée par les formes linéaires définies sur V. Pour déterminer V^*. il suffit de déterminer une de ses bases, en l'occurrence la base duale B^* de V^* associée à la base B de V. Cherchons alors B^* : Posons $B^* = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$, avec

$$\varphi_1 : V \to IR : (x,\ y) \mapsto \varphi_1(x,\ y) = ax + by$$

$$\varphi_2 : V \to IR : (x,\ y) \mapsto \varphi_2(x,\ y) = cx + dy$$

Déterminons alors les constantes (coefficients) a, b, c et d. On rappelle que les bases B^* et B sont telles que $\forall i, j \in [1, 3] \cap IN,\ \varphi_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \varphi_1(e_1) = 1 \\ \varphi_1(e_2) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi_2(e_1) = 0 \\ \varphi_2(e_2) = 1 \end{cases}$

On en déduit les deux systèmes linéaires $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3c + d = 0 \\ c + 2d = 1 \end{cases}$ dont on tire, après résolutions, $a = 2/5,\ b = -1/5,\ c = -1/5$ et $d = 3/5$. Il en résulte que l'espace dual de V est le plan vectoriel réel V^* dont une base est $B^* = \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$, avec :

$$\varphi_1 : V \to IR : (x,\ y) \mapsto \varphi_1(x,\ y) = \frac{2x - y}{5}$$

$$\varphi_2 : V \to IR : (x,\ y) \mapsto \varphi_2(x,\ y) = \frac{-x + 3y}{5}$$

On rappelle que V^* est tel que son dual est V. i.e. $(V^*)^* = V$.

4.3 RAPPORT ENTRE LA DUALITÉ « SPONTANÉE » ET LA DUALITÉ « FORMELLE » GÉNÉRALISATION DE NOTRE EXEMPLE ILLUSTRATIF

Considérons le système (S) : $ax + by + cz = 0$, à une équation du premier degré à 3 inconnues. On sait qu'une telle équation modélise un plan de l'espace, contenant l'origine (0, 0, 0). Le système obtenu en remplaçant les inconnues $x,\ y$ et Z par les coordonnées respectives de trois solutions distinctes et indépendantes de cette équation (et qui nous permet de calculer les coefficients a, b et c, lorsqu'il s'agit de déterminer l'équation $ax + by + cz = 0$ d'un plan contenant l'origine, connaissant des solutions particulières $A(x_a,\ y_a,\ z_a),\ B\,(x_b,\ y_b,\ z_b)$ et $C\,(x_c,\ y_c,\ z_c)$ de cette équation formant un repère du plan dont on cherche l'équation cartésienne :

$$\begin{cases} x_a a + y_a b + z_a c = 0 \\ x_b a + y_b b + z_b c = 0 \quad \text{(S')} \\ x_c a + y_c b + z_c c = 0 \end{cases}$$

équivaut (à un choix de variables près) au système (S*) : $\begin{cases} x_a x + y_a y + z_a z = 0 \\ x_b x + y_b y + z_b z = 0 \\ x_c x + y_c y + z_c z = 0 \end{cases}$

qui est défini par Frobenius comme l'adjoint du système (S) : $ax + by + cz = 0$. Comme ils ont les mêmes coefficients des inconnues, on conclut que ces deux systèmes (S*) et (S') admettent la même classe de solutions qui est précisément $k\,(a, b, c)$, où $k \in IR$.

Il en résulte que le système adjoint du système (S*), obtenu en remplaçant inconnues $x,\ y$ et z par les coordonnées de la solution générale $k(a, b, c)$ de (S*) est simplement (S) : $ax + by + cz = 0$, à un facteur multiplicatif réel k près. Par suite, (S*)* = (S). Le passage à l'adjoint est donc une opération idempotente : appliquée deux fois de suite, cette opération nous ramène à la situation de départ. On notera que les équations du système (S*) peuvent être interprétées comme trois formes linéaires sur Γ :

$$\varphi_a : \Gamma \to IR : (x, y, z) \mapsto x_a x + y_a y + z_a z,$$
$$\varphi_b : \Gamma \to IR : (x, y, z) \mapsto x_b x + y_b y + z_b z,$$
$$\varphi_c : \Gamma \to IR : (x, y, z) \mapsto x_c x + y_c y + z_c z$$

dont l'intersection des trois noyaux représente le système adjoint (S*).

Par conséquent, l'équation $ax + by + cz = 0$, obtenue dans (S*)*, peut être interprétée comme la définition en compréhension du noyau d'une forme linéaire $\varphi_a : D \to IR : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ définie sur IR^3. Faisons remarquer que la solution générale du système adjoint est indépendante du choix des trois solutions particulières indépendantes $A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$ et $C(x_c, y_c, z_c)$, vu le fait qu'elles seront toutes des solutions d'une même équation de départ. Le système qu'elles génèrent conduira donc, fatalement, aux coefficients des inconnues de l'équation cartésienne du plan vectoriel contenant les points qui leur correspondent. La dimension 2 de ce plan est donc un « dénominateur commun », une constante de structure commune à tous les systèmes adjoints ainsi obtenus. On l'appellera « le rang du système adjoint ».

Cette situation peut être résumée de la manière suivante : si on considère un plan vectoriel Γ, d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$, les formes linéaires définies sur cet espace (ou plutôt l'intersection de leurs noyaux) engendrent un espace vectoriel Λ (qui est un autre plan vectoriel) qui est tel que la forme linéaire définie sur cet espace est le premier membre de l'équation cartésienne du plan vectoriel de départ Γ. Si nous appelons Λ le dual de Γ, et si nous notons l'opération qui consiste à déterminer le dual d'un vectoriel par $\Gamma^* = \Lambda$, alors nous pouvons conclure que le dual du dual de Γ est égal à Γ lui-même (i.e. $(\Gamma^*)^* = \Gamma$). Ceci nous amène à interpréter les éléments de Γ à la fois comme des vecteurs (puisque ce sont des éléments d'un espace vectoriel) et comme des formes linéaires (car Γ est défini à son tour comme le dual de Λ). Un vecteur d'un vectoriel est une forme linéaire sur ce vectoriel ; réciproquement, une forme linéaire sur un vectoriel est un vecteur de ce vectoriel. C'est là-même l'essence de la dualité.

Nous obtenons ainsi une interprétation de la dualité « naturelle » ou « spontanée » qui la rapproche de la « dualité algébrique formelle » enseignée dans l'enseignement supérieur et universitaire. Ces deux conceptions de la dualité se rejoignent, même si la première n'est pas formalisée en tant que telle.

En termes plus simples, on peut résumer la dualité naturelle de la manière suivante : « le système linéaire ayant comme coefficients des inconnues les solutions d'un système linéaire initial admet comme solution(s) les coefficients des inconnues du système initial. ». On voit bien, dans cette phrase, la réversibilité des concepts « coefficients des inconnues » et « solutions ». C'est bien le principe de dualité. Les phrases énoncées prennent des allures de « palindromes[10] ».

La dualité dite « formelle », quant à elle, peut être résumée par la phrase suivante : « L'espace des formes linéaires définies sur un espace vectoriel E est, à son tour, un espace vectoriel dont le vectoriel des formes linéaires est E ». Comme pour la phrase précédente, la « réversibilité sémantique » caractérisant la dualité, dite l'idempotence du passage au dual, est évidente. Elle se traduit par une « *symétrie* » au sens mathématique du terme qu'on retrouve également dans la phrase précédente.

4.4 Dualite Projective Et Dualite Algebrique

4.4.1 Introduction : Une Idee D'un Espace Projectif π

Le principe fondateur de la géométrie que nous allons introduire est la notion de perspective (ou projection centrale). Il n'est peut-être pas inutile d'expliquer en quoi consiste cette opération qui va permettre de comprendre les définitions qui vont suivre. Pour étudier la géométrie d'un plan (affine), on le plonge dans l'espace à trois dimensions. On prendra par

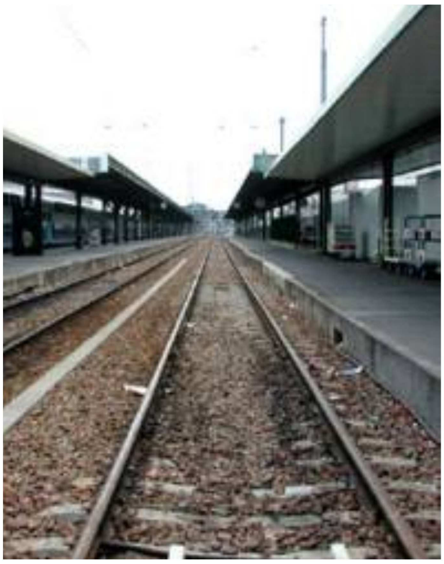
[10] *Un exemple de palindrome : « ESOPE RESTE ICI ET SE REPOSE » Lue de gauche à droite, ou de droite à gauche, cette phrase garde le même sens !*

exemple ici, dans R^3 muni des coordonnées (x, y, t), le plan π d'équation t = 1. A chaque droite *d* de l'espace, issue de l'origine O (0, 0, 0) correspond alors un point *P* du plan π considéré. Si ce point *P* a comme coordonnées $P\,(x,\, y,\, z)$ dans l'espace, alors ses coordonnées dans le plan π seront x, tandis que ses coordonnées relativement à un repère du plan seront $P\,(x,\, y)$.

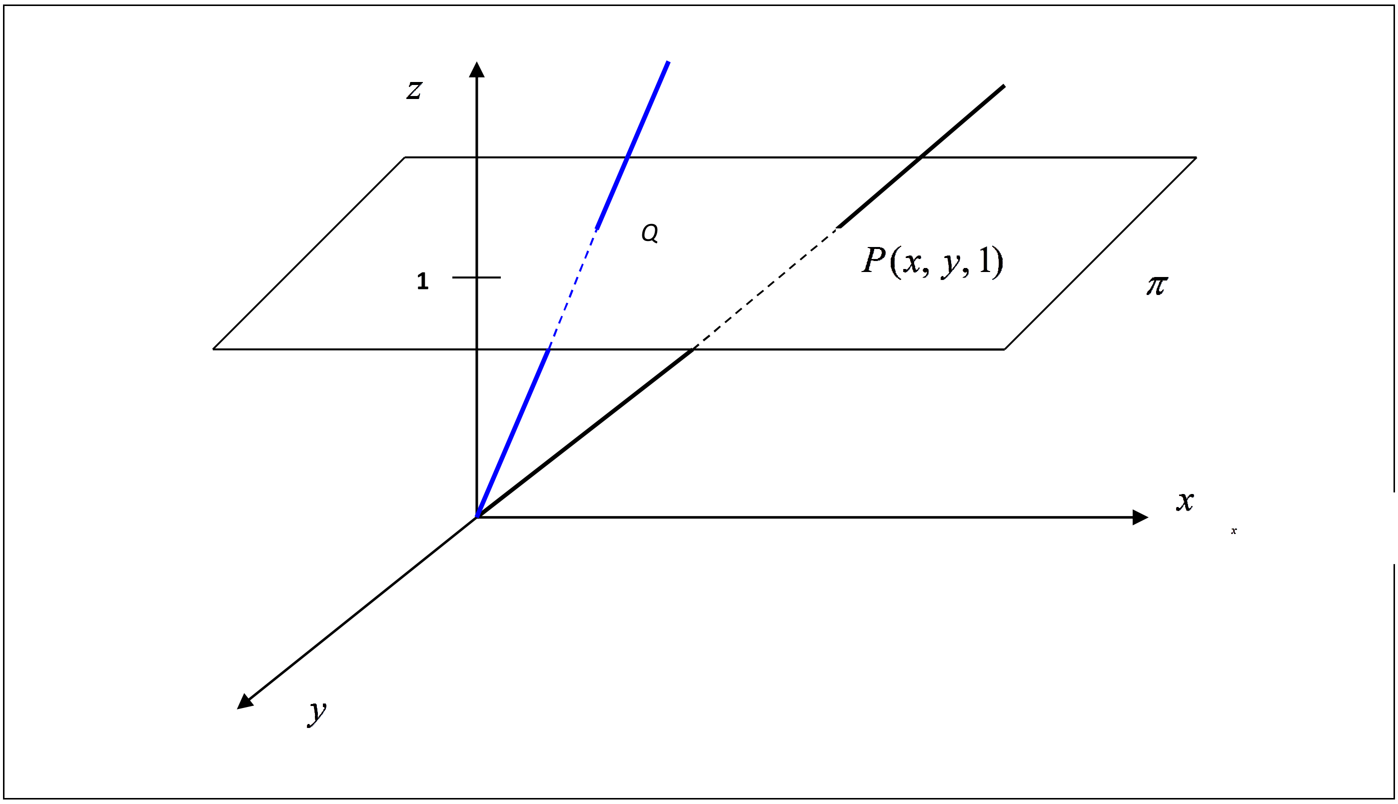
On peut s'imaginer que le plan π se déplace parallèlement à lui-même. Son équation cartésienne sera de la forme $z = k \;\; (k \in IR_0)$ et le résultat sera le même, à un facteur près, puisque $(x,\, y,\, k) = k\,(X,\, Y,\, 1)$ *où* $X = x/k$, $Y = y/k$ (avec $k \neq 0$). Nous pouvons donc limiter notre étude au cas du plan π. Le seul cas n'autorisant pas la substitution précédente est celui où $k = 0$ (on ne divise pas par 0). Les points non atteints sont les points de la forme (*x, y,* 0). Ils correspondent alors à ce que nous désignerons par « points à l'infini ». Nous verrons pourquoi, en détails, plus loin.

L'espace ordinaire est donc étendu artificiellement par « le point à l'infini », noté ∞. La technique la plus répandu pour réaliser des images en perspective centrale est la photographie (ou la peinture). Le centre de l'objectif d'un appareil photographique joue le rôle du « point de vue » (ou centre) et fonctionne comme centre de la représentation. Le film comme plan du dessin se trouve, dans ce cas, derrière le centre.

Une idée de cette perspective centrale (avec point à l'infini) nous est fournie par la photo suivante (prise à la Gare du Nord, Bruxelles). Cette photo nous donne l'idée de deux droites (en l'occurrence les deux rails de chemin de fer) dont on sait qu'elles sont parallèles, mais qui donnent l'illusion de se couper sur la ligne d'horizon (i.e. au point de fuite).



Et voici ci-dessous la représentation de deux points *P* et *Q* du plan projectif $\pi \approx IR^2 \cup \{\infty\}$:



Convention de notation : Si P désigne la matrice-ligne $(a,\ b,\ c)$, alors nous noterons par P^T la matrice-colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (et réciproquement). P^T Sera dite la « transposée » de P.

4.4.2 Équation d'une Droite Dans π

L'équation homogène d'une droite *d* du plan π sera de la forme $ax + by + cz = 0$ (avec $z = 1$ et $c \neq 0$). Soit $P(x,\ y)$ un point de ce plan π, de coordonnées homogènes $P(x,\ y,\ 1)$ où plus généralement $P(xh,\ yh,\ h)$, $h \neq 0$ que nous notons $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

- **Propriété 1 : Droite contenant un point et point appartenant à une droite**

Avec les notations précédentes, on a : $P \in d$ ssi $a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1\ =\ 0$, que nous noterons plus simplement $(a\ \ b\ \ c) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\ = a\,x_1 + b\,y_1\ + c\ z_1\ = 0$. L'opération notée « $\bullet$ » sera dite un « *produit scalaire* ». Posons $d \equiv\ (a,\,b,\,c)^{\,T}$ le triplet représentant les coefficients de la droite *d* et $P\ \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ celui qui représente les coordonnées du point P. Nous convenons de dire que, par abus de langage, $d = (a,\,b,\,c)^{\,T}$ et $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ représentent respectivement les équations ou matrices modélisant la droite *d* et le point *P*. Avec cette convention, nous noterons donc simplement :

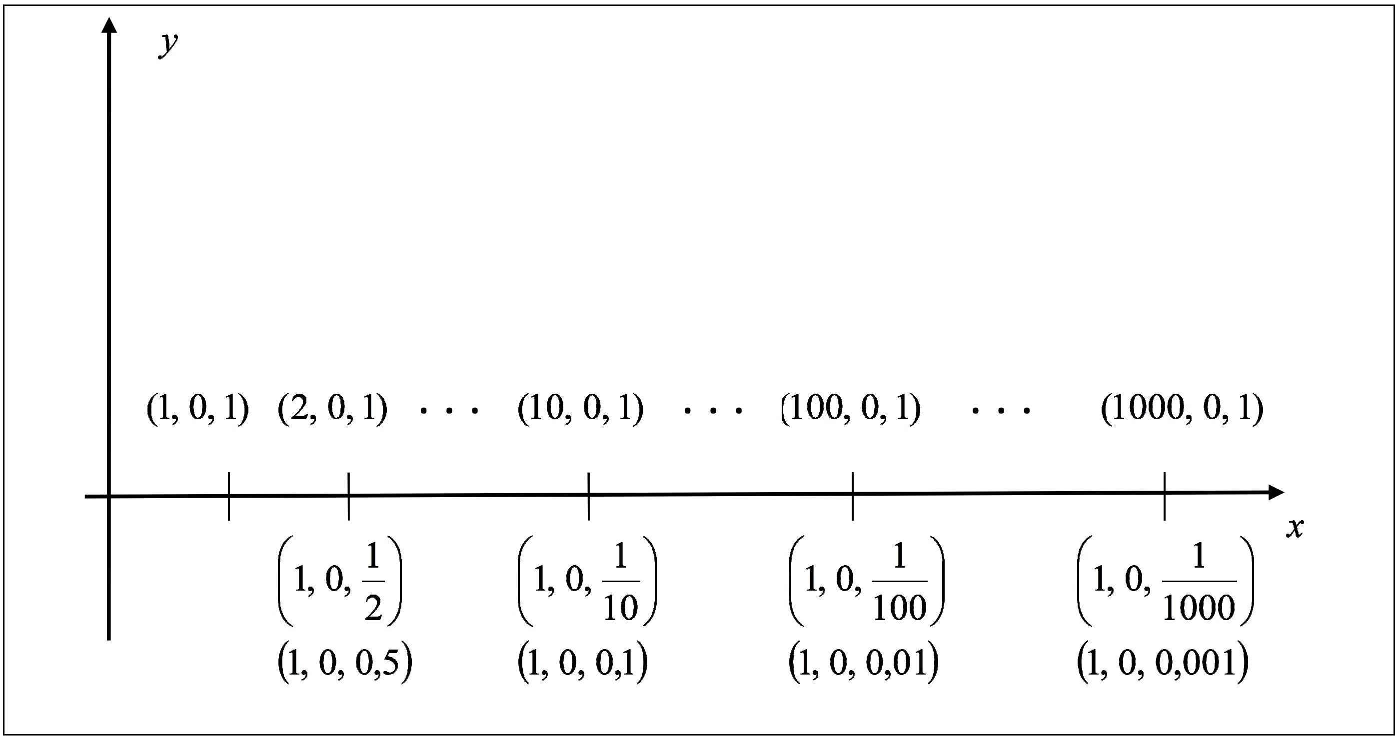
$P \in d \Leftrightarrow d^T \bullet P = 0$

- Réciproquement, nous dirons que la droite *d* d'équation homogène $ax + by + cz = 0$ contient (ou passe par) le point $P(x_1, y_1, z_1)$ ssi $a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0$, que nous notons également sous la forme simplifiée : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \bullet (a \;\; b \;\; c) = a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0$.

Avec les conventions précédentes, on note alors : *d* passe par le point *P* ssi $P \bullet d^T = 0$. Nous dirons alors qu'il y a « *dualité* » entre les deux propositions « le point *P* appartient à la droite *d* » et « la droite *d* passe par le point *P* » ; leur modélisation algébrique est identique. Elle se traduit, en effet, par une annulation du produit scalaire.

- Point à l'infini :

La particularité de la géométrie projective est la prise en compte d'un point « spécial », dit « point à l'infini » que nous pouvons visualiser à l'aide du schéma suivant :



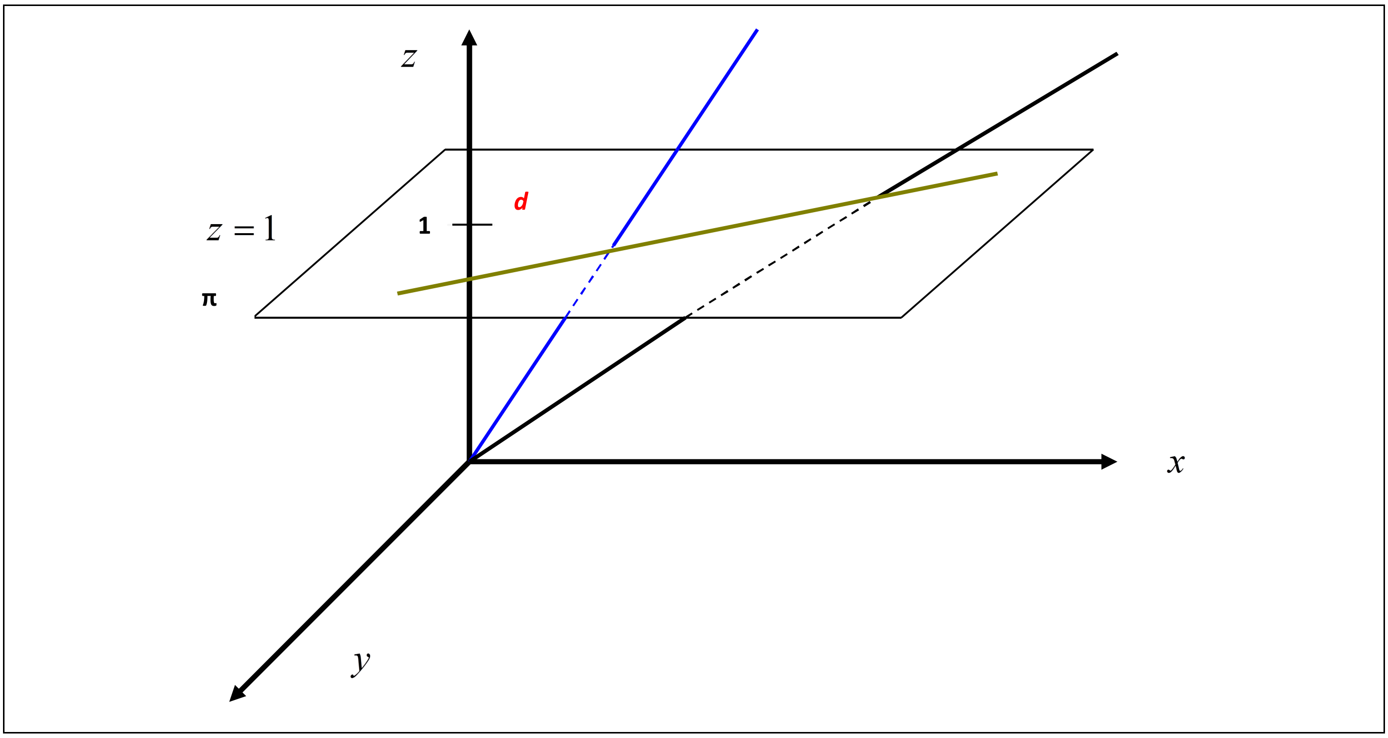
On considère ici un point générique $M(x, y, z)$ qui se « déplace » sur l'axe des abscisses, dans le sens positif (i.e. de gauche à droite). On remarque que plus son abscisse x augmente indéfiniment, plus sa côte z diminue et « tend » vers 0. A l'infini, elle prend donc, à la limite, la valeur 0. Le point que nous obtenons ainsi, à la limite lorsque $x \to +\infty$, s'appelle « *point à l'infini* » et se note, dans le cas illustré ci-dessus, $(1, 0, 0)$. Un tel point se caractérise donc par la contrainte selon laquelle sa côte est nulle, i.e. $z = 0$.

On montre que tous les points à l'infini sont des points de la forme $(x, y, 0)$.

Toute droite joignant deux points à l'infini distincts est dite une « **droite à l'infini** ».

Considérons alors le plan α d'équation cartésienne $z = 0$. Par définition, α est le **plan à l'infini** : tous ses points sont des points à l'infini.

- **Propriété 3 (Propriété d'incidence 1) : équation d'une droite *d* contenant (ou passant par) deux points distincts** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ **du plan** π :



D'après ce qui précède, l'équation de cette droite (dans le plan π d'équation $z = 1$) sera de la forme $ax + by + cz = 0$ (avec $z = 1$). Puisque les coordonnées des points P_1 et P_2 vérifient cette dernière contrainte, alors on obtient le système : $\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c z_2 = 0 \end{cases}$ (d'inconnues a, b et c).

En posant $c \neq 0$, et en divisant ces deux équations par *c*, on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x_1 m + y_1 n + z_1 = 0 \\ x_2 m + y_2 n + z_2 = 0 \\ \quad c \in IR_0 \end{cases}$ (où $m = a/c$, $n = b/c$ et c sont les trois inconnues). La résolution du sous-système formé par les deux premières équations ci-dessus (pour lequel $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$ puisqu'il est compatible, étant entendu que deux points distincts déterminent bien une droite i.e. son équation $ax + by + cz = 0$ existe) donne : $m = \dfrac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$ et $n = \dfrac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$ $(c \in IR_0)$. On en déduit que $a = \dfrac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} c$ et $b = \dfrac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} c$ (où $c \in IR_0$). Il en résulte que l'équation cherchée de d est :

$$\left(\frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} c \right) x + \left(\frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} c \right) y + c = 0$$

i.e. $(y_1 z_2 - y_2 z_1)\, x + (y_1 z_2 - y_2 z_1)\, y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$

Remobilisons ici les déterminants d'ordre 2 introduits plus haut, en écrivant les écrivant sous forme de tableau matriciel. Cette équation devient :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sous forme homogène, cette équation devient :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z = 0$$

Il en résulte que : $\boxed{d = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)^T}$

*Ce calcul ne dépend que des coordonnées des points P_1 et P_2 et s'exprime en fonction de déterminants d'ordre 2. Afin de faciliter son calcul, introduisons le moyen mnémotechnique suivant, que nous appellerons « **produit vectoriel** » des points P_1 et P_2 et que nous noterons* :

$$P_1 \otimes P_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T = d$$

qui nous permettra de déterminer directement les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de la droite *d* contenant les points P_1 et P_2. Nous retiendrons donc que $P_1 \otimes P_2 = d$ donne l'équation cartésienne de la droite passant par les points P_1 et P_2.

- **Propriété 4 (Propriété d'incidence 2) : coordonnées cartésiennes du point $P(x, y, z)$ d'intersection de deux droites sécantes d_1 et d_2 du plan π**

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes du plan π d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z = 0$, que nous pouvons noter simplement $d_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$ et $d_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$. Déterminons algébriquement les coordonnées de leur unique point d'intersection M, noté $d_1 \cap d_2 = \{ M \}$.

Les coordonnées de ce point sont les composantes de l'unique solution du système $\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z = 0 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z = 0 \end{cases}$ qui est cramérien (du fait que $d_1 \cap d_2$ existe, i.e. $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$). Après résolution par la méthode de Gauss (après avoir posé que $z = 1$), on obtient $\left(x = \dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \; y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)$. Il en résulte que

$M = \left(\dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \; \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \; 1 \right)$ ou encore, plus simplement, en multipliant chaque composante par $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$: $M^T = \left(b_1 c_2 - b_2 c_1, \; a_1 c_2 - a_2 c_1, \; a_1 b_2 - a_2 b_1 \right) = \left(\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

Et nous retrouvons le même calcul que celui que nous avons décidé d'appeler « produit vectoriel ». D'où $d_1 \otimes d_2 = M^T$.

Ce résultat relève également de la *dualité* projective qui se note, en abrégé :

$P_1 \otimes P_2 = d^T \leftrightarrow d_1 \otimes d_2 = M^T$. Et on peut l'énoncer de la manière suivante : « Deux points distincts déterminent une droite du plan » $\leftarrow$ « « Deux droites distinctes (sécantes) se coupent en un point » : Ce résultat se généralise aux droites strictement parallèles en vertu du raisonnement développé dans la section suivante.

Remarque : On retient facilement le calcul du produit vectoriel ainsi défini grâce à la disposition pratique et à l'algorithme suivants :

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\cancel{x_1}\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\cancel{x_2}\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\\[2ex]\begin{pmatrix}x_1\\\cancel{y_1}\\z_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_2\\\cancel{y_2}\\z_2\end{pmatrix}\\[2ex]\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\\cancel{z_1}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\\cancel{z_2}\end{pmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}y_1&y_2\\z_1&z_2\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}z_1&z_2\\x_1&x_2\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

Ce calcul peut être résumé de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} \boxed{X} \arrow[rr, "\mathrm{I}"] & & \boxed{Y} \arrow[dl, "\mathrm{II}"] \\ & \boxed{Z} \arrow[ul, "\mathrm{III}"] & \end{tikzcd}$$

Ce qui s'interprète comme suit : « Pour trouver la première composante du résultat (étape I), on supprime les premières composantes x_i et on écrit le déterminant des autres composantes restantes (dans l'ordre où elles sont reliées par la flèche) ; Pour déterminer la deuxième composante du produit vectoriel (étape II), on supprime la lignes des deuxièmes composantes y_i et on écrit le déterminant des composantes restantes (toujours dans l'ordre indiqué par la flèche) ; Enfin, la dernière composante (étape III) du produit vectoriel s'obtient en supprimant les troisièmes composantes y_i et en calculant le déterminant des composantes restantes dans l'ordre indiqué par la flèche qui les relie.

N.B. : L'opération « $\otimes$ » ainsi introduite (et que nous avons appelée « produit vectoriel ») s'applique indistinctement aux « points » et aux « droites » du plan π . Et elle nous permet également de bien illustrer une propriété (que nous allons évoquer plusieurs fois dans la suite) que nous nommerons la ***dualité projective***. On constate ce qui suit : *lorsque l'opération $\otimes$ s'applique à* ***deux points*** *distincts, elle donne comme résultat l'équation de la* ***droite*** *contenant ces deux points (ou, du moins, les coefficients qui caractérisent son équation) ; Mais lorsqu'elle s'applique à* ***deux droites****, elle donne comme résultat les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites*.

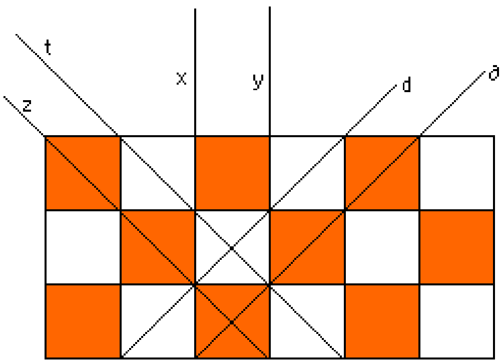
- Propriété 5 : caractérisation du parallélisme de deux droites du plan π

Soient d_1 et d_2 deux droites strictement parallèles du plan π. Posons $d_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$ et $d_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$. (i.e. $d_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z = 0$ et $d_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z = 0$). Alors les coefficients respectifs de leurs variables x et y sont proportionnels. On en déduit que $\exists\, \lambda \in IR_0$ tel que $a_2 = \lambda a_1$ et $b_2 = \lambda b_1$. Par suite $d_2 = (\lambda a_1, \lambda b_1, c_2)^T$. Déterminons alors leur intersection notée $d_1 \cap d_2$. D'après ce qui précède, les composantes du point d'intersection $d_1 \cap d_2$ seront obtenues par le produit vectoriel : $d_1 \otimes d_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & \lambda b_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & \lambda a_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 \\ b_1 & \lambda b_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}^T$.

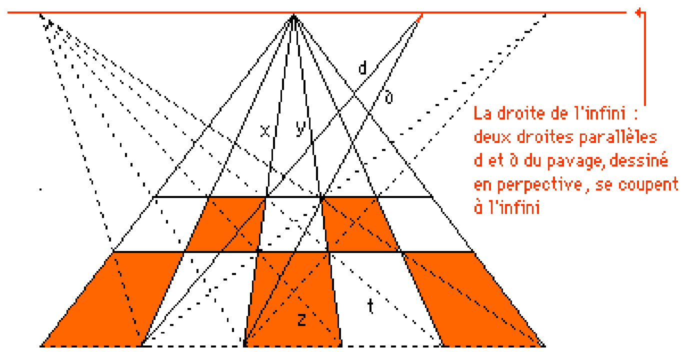
$d_1 \cap d_2$ est donc un point à l'infini (puisque sa côte est nulle i.e. $z = 0$)

En résumé, on a : « **Deux droites parallèles se coupent donc à l'infini** ». Voici une illustration « concrète » de cette propriété :

● *Vision euclidienne*



● *Vision projective (en perspective) avec points de fuite (ou points à l'infini)*



Sur la figure précédente, les droites *z* et *t* sont bel et bien parallèles (sur la vision euclidienne), mais elles se coupent au point de fuite (point à l'infini) sur le même dessin en vision projective (dessin exécuté par un peintre qui s'y connaît, bien entendu) !

Remarque :

Le *principe de dualité* s'énonce globalement comme suit, en deux dimensions : *pour toute propriété de géométrie projective établie entre des points, il y a un résultat symétrique dans lequel les rôles des droites et des points sont échangés.*

Les points deviennent des droites, les droites des points, la droite passant par un point devient le point sur une droite, etc.

Ainsi, comme nous l'avons vu ci-dessus, la propriété *deux points distincts définissent une droite unique* (portant les deux points), devient *deux droites distinctes définissent un point unique* (d'intersection). Ce résultat n'est valide que dans l'espace projectif : deux droites parallèles dans l'espace affine ne se coupent pas, alors que dans l'espace projectif elles se coupent en un point à l'infini comme cela a été établi plus haut.

- Propriété 6 : Alignement de trois points du plan projectif π .

Soient $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ et $P_3(x_3, y_3, z_3)$ trois points du plan π (d'équation cartésienne $z = 1$) qui sont alignés. Alors il existe une droite *d* du plan telle que *d* contienne ces trois points. Soit $ax + by + cz = 0$ l'équation cartésienne de cette droite. Puisque les coordonnées des trois points considérés vérifient la contrainte qui définit les points de la droite *d*, alors on en déduit le système :

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0 \\ a x_2 + b y_2 + c z_2 = 0 \\ a x_3 + b y_3 + c z_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système est compatible (et admet au moins une solution non triviale, puisque la solution triviale (0, 0, 0) est exclu dans le plan π) puisque la droite d reliant les trois points donnés existe du fait que ces points sont alignés par hypothèse. D'après la synthèse structurée donnant la résolution d'un système linéaire de type 3×3, on conclut que le déterminant de ce système est non nul. Donc :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce que l'on peut encore noter, en vertu des propriétés des déterminants :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En définitive :

Nous retiendrons que « *l'**annulation d'un déterminant d'ordre 3** caractérise l'alignement de trois points du plan projectif, dont les coordonnées sont justement les colonnes (ou lignes) de ce déterminant* ».

- **Propriété 7 : Concourante de trois droites du plan projectif π**

Considérons trois droites d_1, d_2 et d_3 du plan π (d'équation $z = 1$). Posons $d_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $d_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z = 0$ et $d_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3z = 0$. Ces trois droites ont donc un unique point commun. Par conséquent, le système :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$$

est compatible. D'après la synthèse structurée établie lors de la résolution et de la discussion d'un système linéaire du type 3×2, on conclut que le déterminant du système précédent est nul. Par suite, on a : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$ Ou encore :

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ (en vertu des propriétés algébriques des déterminants).

On en déduit que « *l'**annulation d'un déterminant d'ordre 3 caractérise aussi la concourante de trois droites du plan** π* **»**

On a une nouvelle propriété relevant de la *dualité projective* : « les trois droites du plan sont concourantes » est donc la proposition duale de la proposition : « Les trois points du plan projectif sont alignés ». Toutes deux sont caractérisées par le même critère algébrique, à savoir l'annulation d'un déterminant d'ordre 3.

5 CONCLUSION

De tout ce qui précède, il ressort clairement qu'en dehors de la dualité établie en cristallographie (pour laquelle nous n'avons pas établi explicitement le rapport avec la dualité algébrique), toutes les formes.de dualités mathématiques évoquées dans ce travail peuvent se ramener d’une façon ou d’une autre à la dualité algébrique évoquée dans le cadre des espaces vectoriels. Nous avons, en effet, clairement établi que chacun des espaces ou chacune des structures mathématiques sur lesquels était établie la notion de dualité pouvait, au prix d’une construction structurale plus ou moins évidente (selon le cas), être muni d’une structure d’espace vectoriel. Comme nous l’avons postulé au début du présent travail, la dualité algébrique est donc bien la forme de dualité qui fédère, unifie, généralise et simplifie toutes les autres formes de dualité étudiées en mathématiques.

REFERENCES

[1] DICTIONNAIRE (1981). *Le Petit Robert,* Dictionnaire Le Robert, Paris.
[2] DIEUDONNE J. (1977). *Panorama des mathématiques pures : le choix bourbachique*, Bordas, Paris.
[3] DE VLEESCHOUWER M. (2010). *Enseignement à l’université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire.* Thèse de doctorat en Sciences, orientation : didactique des mathématiques, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur (Belgique).
[4] KEIL J. (1975). *Géométrie analytique plane : exposé moderne,* La Procure, Bruxelles.
[5] LEHMANN D. (1988). *Invitation à la géométrie,* PUF, Paris.
[6] QUEYSANNE M. (1968). *Algèbre MP et Spéciales AA’*, Armand Colin, Paris.