International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 67 No. 2 Jul. 2023, pp. 249-258

http://www.ijisr.issr-journals.org/

Nombre de topologies finies sur un ensemble fini: Une approche de décomposition en topologies partielles

[Number of finite topologies on a finite set: An approach of decomposition into partial topologies]

Clara Paluku Kasoki and Salem Kumpovela

Departement de Mathématique et Informatique, Faculté des Sciences, Université pédagogique nationale, Kinshasa, RD Congo

ABSTRACT: This article deals with finite topological spaces. It shows that the set of all finite topologies on a finite set with n elements is the union of sets of partial topologies on X, where the number of elements in each set varies between 2 and 2^n. The number of partial topologies with k elements on X is also determined, as well as the number of finite topologies on X using these results.

KEYWORDS: Finite topological space, partial topology, cardinality, finite set.

RESUME: Cet article traite des espaces topologiques finis. Il montre que l'ensemble de toutes les topologies finies sur un ensemble fini à n éléments est la réunion d'ensembles de topologies partielles sur X, où le nombre d'éléments dans chaque ensemble varie entre 2 et 2^n. Le nombre de topologies partielles à k éléments sur X est également déterminé, ainsi que le nombre de topologies finies sur en utilisant ces résultats.

MOTS-CLEFS: Espace topologique fini, topologie partielle, cardinalité, ensemble fini.

1 INTRODUCTION

Les espaces topologiques finis constituent un sujet d'étude intéressant en mathématiques et en informatique théorique. Ils permettent d'étudier les propriétés topologiques des ensembles finis et ont de nombreuses applications dans la théorie des codes correcteurs d'erreurs, la combinatoire, l'informatique théorique et bien d'autres domaines.

Dans cet article, nous allons nous intéresser à un résultat important sur les topologies finies sur un ensemble fini. Nous montrerons que l'ensemble de toutes les topologies finies qu'on peut définir sur un ensemble fini à n éléments est une réunion d'ensembles de topologies partielles sur cet ensemble. Nous verrons également que ces ensembles ont des cardinalités particulières qui permettent de calculer la cardinalité de l'ensemble de toutes les topologies finies définissables sur l'ensemble donné.

2 LES TOPOLOGIES FINIES SUR UN ENSEMBLE FINI [2], [3], [7], [8], [9]

Avant de détailler le résultat précédent, commençons par rappeler quelques définitions et propriétés sur les topologies finies sur un ensemble fini.

2.1 Définitions [7]

Soit X un ensemble fini à n éléments. Une topologie finie sur X est une collection τ de sous-ensembles de X telle que:

1. X et l'ensemble vide sont dans τ.
2. L'union de deux éléments de τ est dans τ.
3. L'intersection de deux éléments de τ est dans τ.

On appelle espace topologique fini l'ensemble X muni d'une topologie finie τ.

Remarque

Contrairement aux topologies usuelles sur les ensembles infinis, il n'est pas nécessaire de spécifier toutes les parties de X pour définir une topologie finie sur X. En effet, il suffit de spécifier les parties qui seront les ouverts de la topologie.

2.2 Exemples

Voici quelques exemples de topologies finies sur des ensembles finis:

- Sur l'ensemble à un élément *{a},* il n'y a qu'une seule topologie finie, la topologie discrète, qui contient les deux parties *{a}* et Ø.
- Sur l'ensemble à deux éléments *{a, b},* il y a quatre topologies finies: la topologie discrète, la topologie triviale *{Ø, X},* et deux topologies à trois éléments *{Ø, {a}, {a, b} }* et *{Ø, {b}, {a, b} }.*
- Sur l'ensemble à trois éléments *{a, b, c},* il y a vingt-neuf topologies finies.

Nous pouvons donc constater que le nombre de topologies finies sur un ensemble fini augmente rapidement avec la taille de l'ensemble. Dans la section suivante, nous verrons que l'ensemble de toutes les topologies finies sur un ensemble fini peut être décomposé en une union d'ensembles de topologies partielles sur cet ensemble.

3 Décomposition De L'ensemble Des Topologies Finies

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble de toutes les topologies finies qu'on peut définir sur un ensemble fini à n éléments est une réunion d'ensembles de topologies partielles sur cet ensemble. Plus précisément, nous allons montrer que cet ensemble est la réunion des ensembles de topologies finies à k éléments, où k varie entre 2 et 2^n.

3.1 Définition

Soit X un ensemble fini à n éléments. Un ensemble de topologies partielles k sur X est une collection topologies à k sous-ensembles de X qui vérifient les conditions de la définition d'une topologie finie (X et l'ensemble vide sont dans τ, et l'union de deux éléments de τ est dans τ, et l'intersection de deux éléments de τ est dans τ).

Nous noterons T_k (X) l'ensemble des topologies partielles sur X à k éléments, où k est un entier compris entre 2 et 2^n.

3.2 Théorème

L'ensemble de toutes les topologies finies sur un ensemble fini à n éléments est la réunion des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^n.

Preuve

Nous allons montrer que tout élément de l'ensemble de toutes les topologies finies sur X appartient à l'un des ensembles T_k (X).

Soit τ une topologie finie sur X, c'est-à-dire un ensemble de parties de X vérifiant les conditions suivantes:

1. Ø et X appartiennent à τ
2. L'union de deux éléments de τ est dans τ
3. L'intersection de deux éléments de τ est dans τ

Notons que la condition 1 implique que τ est non vide. De plus, comme τ est finie, il existe un entier k tel que τ contient k éléments. Nous allons maintenant montrer que τ appartient à T_k (X).

Pour cela, il suffit de montrer que τ est une topologie à k éléments sur X. En effet, si c'est le cas, alors τ appartient à T_k (X) par définition de cet ensemble.

Montrons donc que τ est une topologie à k éléments sur X. Comme τ contient k éléments, notons-les $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Montrons que ces éléments vérifient les trois conditions nécessaires pour être une topologie sur X:

1. Ø et X appartiennent à τ: C'est vrai par définition de τ
2. La réunion de toute famille finie de parties de τ appartient à τ: Soit $V_1, V_2, \ldots, V_m$ une famille finie de parties de τ. Comme chaque V_i est une partie de τ, chaque V_i est une réunion de certains U_j. Ainsi, la réunion de tous les V_i est une réunion de certains des U_j. Comme τ est une topologie, cette réunion appartient à τ
3. L'intersection de deux parties de τ appartient à τ: Soient U_i et U_j deux éléments de τ. Comme τ est une topologie, l'intersection $U_i \cap U_j$ appartient à τ

Nous avons donc montré que τ est une topologie à k éléments sur X. Par conséquent, tout élément de l'ensemble de toutes les topologies finies sur X appartient à un et un seul des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^{n}, où T_k (X) est l'ensemble de topologies à k éléments sur X. Ainsi, l'ensemble de toutes les topologies finies sur X est la réunion des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^n. De plus, ces ensembles étant disjoints deux à deux, le cardinal de l'ensemble de toutes les topologies finies sur X est la somme des cardinaux des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^n.

Remarque

Il est à noter que pour certaines valeurs de k, l'ensemble T_k (X) peut être vide. En particulier, si $k > n$, alors il n'y a pas suffisamment d'éléments dans X pour former k parties distinctes, donc T_k (X) est vide. Par conséquent, dans la réunion des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^{n}, certains ensembles T_k (X) peuvent être absents. Cependant, si $k \leq n$, alors T_k (X) est non vide car il est toujours possible de former k parties distinctes à partir des n éléments de X.

Cette observation peut être utile pour comprendre la complexité de calcul des cardinaux des ensembles T_k (X) pour k allant de 2 à 2^n.

3.3 Proposition

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et pour tout ensemble X de cardinal n, le cardinal de l'ensemble des topologies T_3 (X) est égal à $2^n - 2$.

3.4 Exemple

L'exemple suivant est particulièrement intéressant car l'ensemble X est petit, puisqu'on a 4 éléments, ce qui permet de facilement énumérer toutes les topologies finies possibles. De plus, le fait que chaque topologie finie soit représentée par un ensemble de parties de X rend cet exemple plus intuitif et facile à comprendre pour ceux qui n'ont pas une formation mathématique avancée. En outre, les résultats obtenus pour cet exemple peuvent être généralisés à des ensembles plus grands.

Voici les ensembles T_k (X) pour l'ensemble $X = \{a, b, c, d\}$ et k allant de 2 à 2^4=16:

- Le seul élément de l'ensemble T_2 (X) est $\{Ø, X\}$, ce qui correspond à la topologie grossière.
- Les éléments de l'ensemble T_3 (X) sont:

  $\tau_1 = \{Ø, \{a\}, X\}$; $\tau_2 = \{Ø, \{b\}, X\}$; $\tau_3 = \{Ø, \{c\}, X\}$; $\tau_4 = \{Ø, \{d\}, X\}$; $\tau_5 = \{Ø, \{a, b\}, X\}$; $\tau_6 = \{Ø, \{a, c\}, X\}$;

  $\tau_7 = \{Ø, \{a, d\}, X\}$; $\tau_8 = \{Ø, \{b, c\}, X\}$; $\tau_9 = \{Ø, \{b, d\}, X\}$; $\tau_{10} = \{Ø, \{c, d\}, X\}$; $\tau_{11} = \{Ø, \{a, b, c\}, X\}$;

  $\tau_{12} = \{Ø, \{a, b, d\}, X\}$; $\tau_{13} = \{Ø, \{a, c, d\}, X\}$; $\tau_{14} = \{Ø, \{b, c, d\}, X\}$
- Les éléments de l'ensemble T_4 (X) sont:

  $\tau_1 = \{Ø, \{a\}, \{a, b\}, X\}$; $\tau_2 = \{Ø, \{a\}, \{a, c\}, X\}$; $\tau_3 = \{Ø, \{a\}, \{a, d\}, X\}$; $\tau_4 = \{Ø, \{b\}, \{a, b\}, X\}$; $\tau_5 = \{Ø, \{b\}, \{b, c\}, X\}$;

  $\tau_6 = \{Ø, \{b\}, \{b, d\}, X\}$; $\tau_7 = \{Ø, \{c\}, \{a, c\}, X\}$; $\tau_8 = \{Ø, \{c\}, \{b, c\}, X\}$; $\tau_9 = \{Ø, \{c\}, \{c, d\}, X\}$; $\tau_{10} = \{Ø, \{d\}, \{a, d\}, X\}$;

τ_{11} = {Ø, {d}, {b, d}, X}; τ_{12} = {Ø, {d}, {c, d}, X}; τ_{13} = {Ø, {a}, {a, b, c}, X}; τ_{14} = {Ø, {a}, {a, b, d}, X};

τ_{15} = {Ø, {a}, {a, c, d}, X}; τ_{16} = {Ø, {a}, {b, c, d}, X}; τ_{17} = {Ø, {b}, {a, b, c}, X}; τ_{18} = {Ø, {b}, {a, b, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {b}, {a, c, d}, X}; τ_{20} = {Ø, {b}, {b, c, d}, X}; τ_{21} = {Ø, {c}, {a, b, c}, X}; τ_{22} = {Ø, {c}, {a, b, d}, X};

τ_{23} = {Ø, {c}, {a, c, d}, X}; τ_{24} = {Ø, {c}, {b, c, d}, X}; τ_{25} = {Ø, {d}, {a, b, c}, X}; τ_{26} = {Ø, {d}, {a, b, d}, X};

τ_{27} = {Ø, {d}, {a, c, d}, X}; τ_{28} = {Ø, {d}, {b, c, d}, X}; τ_{29} = {Ø, {a, b}, {c, d}, X}; τ_{30} = {Ø, {a, c}, {b, d}, X};

τ_{31} = {Ø, {a, d}, {b, c}, X}; τ_{32} = {Ø, {a, b}, {a, b, c}, X}; τ_{33} = {Ø, {a, b}, {a, b, d}, X}; τ_{34} = {Ø, {a, c}, {a, b, c}, X};

τ_{35} = {Ø, {a, c}, {a, c, d}, X}; τ_{36} = {Ø, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_{37} = {Ø, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_{38} = {Ø, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_{39} = {Ø, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{40} = {Ø, {b, d}, {a, b, d}, X}; τ_{41} = {Ø, {b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{42} = {Ø, {c, d}, {a, c, d}, X};

τ_{43} = {Ø, {c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_5 (X) sont:

τ_{1} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, X}, τ_{2} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, X}; τ_{3} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, X}; τ_{4} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, X};

τ_{5} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, X}; τ_{6} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, X}; τ_{7} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, b, c}, X};

τ_{8} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, b, d}, X}; τ_{9} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, c, d}, X}; τ_{10} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, b, c}, X};

τ_{11} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, b, d}, X}; τ_{12} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, c, d}, X}; τ_{13} = {Ø, {a}, {a, d}, {a, b, c}, X};

τ_{14} = {Ø, {a}, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_{15} = {Ø, {a}, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_{16} = {Ø, {a}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_{17} = {Ø, {a}, {b, d}, {a, b, d}, X}; τ_{18} = {Ø, {a}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{19} = {Ø, {b}, {a, b}, {a, b, c}, X};

τ_{20} = {Ø, {b}, {a, b}, {a, b, d}, X}; τ_{21} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, c, d}, X}; τ_{22} = {Ø, {b}, {a, c}, {a, b, c}, X};

τ_{23} = {Ø, {b}, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_{24} = {Ø, {b}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{25} = {Ø, {b}, {b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{26} = {Ø, {b}, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{27} = {Ø, {b}, {b, d}, {a, b, c}, X}; τ_{28} = {Ø, {b}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{29} = {Ø, {b}, {b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{30} = {Ø, {b}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{31} = {Ø, {c}, {a, b}, {a, b, c}, X};

τ_{32} = {Ø, {c}, {a, c}, {a, b, c}, X}; τ_{33} = {Ø, {c}, {a, c}, {a, c, d}, X}; τ_{34} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, c, d}, X};

τ_{35} = {Ø, {c}, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_{36} = {Ø, {c}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{37} = {Ø, {c}, {b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{38} = {Ø, {c}, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{39} = {Ø, {c}, {b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{40} = {Ø, {c}, {c, d}, {a, b, c}, X};

τ_{41} = {Ø, {c}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{42} = {Ø, {c}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{43} = {Ø, {d}, {a, b}, {a, b, d}, X};

τ_{44} = {Ø, {d}, {a, c}, {a, c, d}, X}; τ_{45} = {Ø, {d}, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_{46} = {Ø, {d}, {a, d}, {a, c, d}, X};

τ_{47} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, c, d}, X}; τ_{48} = {Ø, {d}, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{49} = {Ø, {d}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{50} = {Ø, {d}, {b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{51} = {Ø, {d}, {b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{52} = {Ø, {d}, {c, d}, {a, b, d}, X};

τ_{53} = {Ø, {d}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{54} = {Ø, {d}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{55} = {Ø, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{56} = {Ø, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{57} = {Ø, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{58} = {Ø, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{59} = {Ø, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{60} = {Ø, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_6 (X) sont:

τ_{1} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, b, c}, X}; τ_{2} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, b, d}, X}; τ_{3} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c, d}, X};

τ_{4} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, c, d}, X}; τ_{5} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, b, c}, X}; τ_{6} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, b, d}, X};

τ_{7} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, c, d}, X}; τ_{8} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, c, d}, X}; τ_{9} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {a, b, c}, X};

τ_{10} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_{11} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_{12} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, c, d}, X};

τ_{13} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{14} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{15} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{16} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{17} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {a, b, c}, X}; τ_{18} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{20} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{21} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, {a, b, c}, X};

τ_{22} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, {a, b, d}, X}; τ_{23} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{24} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{25} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, X}; τ_{26} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, X};

τ_{27} = {Ø, {a}, {a, b}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{28} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, d}, {a, c, d}, X};

τ_{29} = {Ø, {a}, {a, c}, {b, d}, {a, b, d}, X}; τ_{30} = {Ø, {a}, {a, d}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_{31} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{32} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{33} = {Ø, {b}, {a, b}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{34} = {Ø, {b}, {a, c}, {b, d}, {a, b, c}, X};

τ_{35} = {Ø, {b}, {a, d}, {b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{36} = {Ø, {b}, {b, c}, {b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{37} = {Ø, {c}, {a, b}, {c, d}, {a, b, c}, X}; τ_{38} = {Ø, {d}, {a, b}, {c, d}, {a, b, d}, X};

τ_{39} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{40} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{41} = {Ø, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{42} = {Ø, {c}, {a, d}, {b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{43} = {Ø, {c}, {b, c}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{44} = {Ø, {d}, {a, c}, {b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{45} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{46} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{47} = {Ø, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{48} = {Ø, {d}, {b, d}, {c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{49} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{50} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{51} = {Ø, {a}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{52} = {Ø, {a}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{53} = {Ø, {a}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{54} = {Ø, {a}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{55} = {Ø, {b}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{56} = {Ø, {b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{57} = {Ø, {b}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{58} = {Ø, {b}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{59} = {Ø, {b}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{60} = {Ø, {b}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{61} = {Ø, {c}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{62} = {Ø, {c}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{63} = {Ø, {c}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{64} = {Ø, {c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{65} = {Ø, {c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{66} = {Ø, {c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{67} = {Ø, {d}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{68} = {Ø, {d}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{69} = {Ø, {d}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{70} = {Ø, {d}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{71} = {Ø, {d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{72} = {Ø, {d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_7 (X) sont:

τ_1 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, X}; τ_2 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_3 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, X}; τ_4 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_5 = {Ø, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, X}; τ_6 = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_7 = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_8 = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, X};

τ_9 = {Ø, {a}, {a, b}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{10} = {Ø, {a}, {d}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, X};

τ_{11} = {Ø, {a}, {d}, {a, c}, {a, d}, {a, c, d}, X}; τ_{12} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{13} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{14} = {Ø, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_{15} = {Ø, {b}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, X}; τ_{16} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{17} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{18} = {Ø, {b}, {d}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {b}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, X}; τ_{20} = {Ø, {b}, {d}, {b, c}, {b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{21} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{22} = {Ø, {c}, {d}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, X};

τ_{23} = {Ø, {c}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, X}; τ_{24} = {Ø, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{25} = {Ø, {c}, {d}, {b, d}, {c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{26} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{27} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{28} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{29} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{30} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{31} = {Ø, {c}, {d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{32} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{33} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{34} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{35} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{36} = {Ø, {a}, {a, c}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{37} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{38} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{39} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{40} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{41} = {Ø, {b}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{42} = {Ø, {b}, {b, c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{43} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{44} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{45} = {Ø, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{46} = {Ø, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{47} = {Ø, {c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{48} = {Ø, {c}, {b, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{49} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{50} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{51} = {Ø, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, {a, b, d}, X}; τ_{52} = {Ø, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{53} = {Ø, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{54} = {Ø, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_8 (*X*) sont:

τ_{1} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{2} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{3} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{4} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{5} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{6} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{7} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{8} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{9} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{10} = {Ø, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{11} = {Ø, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{12} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{13} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{14} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{15} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{16} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{17} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{18} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {a}, {d}, {a, b}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{20} = {Ø, {a}, {d}, {a, b}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{21} = {Ø, {a}, {d}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{22} = {Ø, {a}, {d}, {a, c}, {a, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{23} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{24} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{25} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{26} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{27} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{28} = {Ø, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{29} = {Ø, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{30} = {Ø, {b}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_{31} = {Ø, {b}, {c}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{32} = {Ø, {b}, {c}, {a, d}, {b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{33} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{34} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{35} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{36} = {Ø, {b}, {c}, {b, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{37} = {Ø, {b}, {d}, {a, b}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X}; τ_{38} = {Ø, {b}, {d}, {a, b}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{39} = {Ø, {b}, {d}, {a, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{40} = {Ø, {b}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{41} = {Ø, {b}, {d}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{42} = {Ø, {b}, {d}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{43} = {Ø, {b}, {d}, {b, c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{44} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{45} = {Ø, {b}, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}; τ_{46} = {Ø, {c}, {d}, {a, b}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_{47} = {Ø, {c}, {d}, {a, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X}; τ_{48} = {Ø, {c}, {d}, {a, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{49} = {Ø, {c}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X}; τ_{50} = {Ø, {c}, {d}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{51} = {Ø, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X}; τ_{52} = {Ø, {c}, {d}, {b, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{53} = {Ø, {c}, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X}; τ_{54} = {Ø, {c}, {d}, {b, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_9 (*X*) sont:

τ_1 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, X};

τ_2 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, X};

τ_3 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, X};

τ_4 = {Ø, {b}, {c}, {d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {b, c, d}, X};

τ_5 = {Ø, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_6 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_7 = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, d}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_8 = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_9 = {Ø, {a}, {d}, {a, b}, {a, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{10} = {Ø, {a}, {d}, {a, c}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{11} = {Ø, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{12} = {Ø, {b}, {c}, {a, c}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{13} = {Ø, {b}, {d}, {a, b}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{14} = {Ø, {b}, {d}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{15} = {Ø, {c}, {d}, {a, c}, {b, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{16} = {Ø, {c}, {d}, {a, d}, {b, c}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{17} = {Ø, {a}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{18} = {Ø, {b}, {a, b}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {c}, {a, c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{20} = {Ø, {d}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les éléments de l'ensemble T_{10} (*X*) sont:

τ_1 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_2 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_3 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_4 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, X};

τ_5 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_6 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_7 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, X};

τ_8 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_9 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{10} = {Ø, {a}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{11} = {Ø, {a}, {c}, {a, c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{12} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {b, c, d}, X};

τ_{13} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{14} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{15} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{16} = {Ø, {a}, {b}, {a, b}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{17} = {Ø, {a}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_{18} = {Ø, {a}, {d}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{19} = {Ø, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{20} = {Ø, {b}, {c}, {a, c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{21} = {Ø, {b}, {d}, {a, b}, {b, d}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{22} = {Ø, {b}, {d}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{23} = {Ø, {c}, {d}, {a, c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{24} = {Ø, {c}, {d}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- L'ensemble T_{11} (X) n'a aucun élément
- Les éléments de l'ensemble T_3 (X) sont:

τ_1 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_2 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_3 = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_4 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_5 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_6 = {Ø, {a}, {b}, {d}, {a, b}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_7 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, X};

τ_8 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_9 = {Ø, {a}, {c}, {d}, {a, c}, {a, d}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{10} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {b, c, d}, X};

τ_{11} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {a, c}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, c, d}, {b, c, d}, X};

τ_{12} = {Ø, {b}, {c}, {d}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}

- Les ensembles T_{13} (X), T_{14} (X) et T_{15} (X) *n'ont pas d'élément.*
- Le seul élément de l'ensemble T_{16} (X) est:

{Ø, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, X}, ce qui correspond à la topologie discrète sur *X*.

Dans cet exemple, on trouve que le nombre total de topologies finies sur *X* est de 355. On peut observer que les cardinaux de T_k (X) pour *k* allant de 2 à 16 sont relativement "inégaux" en termes de cardinaux. Certains ensembles sont beaucoup plus grands que d'autres, comme T_6 (X) qui contient 72 éléments, tandis que d'autres sont vides, comme T_{11} (X), T_{13} (X), T_{14} (X) et T_{15} (X). Cela peut être expliqué par le fait que pour les petites valeurs de *k,* il y a peu de choix de sous-ensembles de *X* pour construire une topologie, alors que pour les grandes valeurs de *k,* il y a de plus en plus de choix possibles, mais beaucoup d'entre eux sont redondants ou non pertinents. Ainsi, les valeurs maximales de T_k (X) sont atteintes pour des valeurs de *k* où il y a suffisamment de choix pour construire une topologie de manière variée, mais pas trop pour éviter la redondance.

De plus, on peut également remarquer que les cardinaux des ensembles T_k (X) semblent suivre une forme de loi de distribution, avec un maximum atteint pour T_6 (X), puis une diminution progressive des cardinaux. On pourrait même chercher à modéliser cette distribution en utilisant des outils mathématiques tels que la loi binomiale ou la loi normale.

Plus précisément, pour se faire une idée sur ce à quoi cela se rapporte, le tableau suivant présente les cardinaux des ensembles de topologies à *k* éléments pour des ensembles finis *X* de différentes tailles, où *n* représente le cardinal de *X,* où chaque intersection indique le nombre de topologies à *k* éléments sur un ensemble *X* de taille *n*. Les valeurs sont données pour *k* = 2, 3, 4 et 5.

Tableau 1. ***Cardinaux des ensembles de topologies à k éléments sur un ensemble fini X de taille n***

	***k*=2**	***k*=3**	***k*=4**	***k*=5**
n=1	1			
n=2	1	2	1	
n=3	1	6	9	6
n=4	1	14	43	60
n=5	1	30	165	390
n=6	1	62	571	2100
n=7	1	126	1869	10206
n=8	1	254	5923	46620
n=9	1	510	18405	204630
n=10	1	1022	56491	874500

Ce tableau représente le nombre de topologies finies de taille *k* sur un ensemble fini *X* de taille *n* pour différentes valeurs de *n* et *k*. Plus précisément, pour chaque valeur de *n* et *k,* les valeurs dans le tableau indiquent le cardinal correspondant à l'intersection des lignes et colonnes. Par exemple, si nous regardons la ligne correspondant à *n* = 4, nous pouvons voir que pour *k* = 2, il n'y a qu'une seule topologie finie possible sur un ensemble fini de quatre éléments, alors que pour *k* = 4, il y en a 43 possibles. En outre, nous pouvons constater que pour chaque valeur de *n,* le nombre de topologies finies augmente rapidement avec *k*

Ce tableau montre aussi que le nombre de topologies finies sur un ensemble fini est lié de manière complexe à la taille de l'ensemble. Les résultats sont particulièrement frappants pour des valeurs de *n* et de *k* plus élevées, où le nombre de topologies finies peut être extrêmement grand

4 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré que l'ensemble de toutes les topologies finies sur un ensemble fini à *n* éléments est la réunion d'ensembles de topologies partielles sur *X,* où le nombre d'éléments dans chaque ensemble varie entre 2 et 2^n. Nous avons également montré comment déterminer le nombre de topologies partielles à *k* éléments sur *X*.

Cet article est un premier pas vers la compréhension et la découverte des lois et formules mathématiques sur l'existence ainsi que le dénombrement des topologies distinctes et finies définissables sur un ensemble fini. Dans les articles suivants, nous explorerons comment calculer le nombre de topologies finies sur *X* en utilisant ces résultats.

REFERENCES

[1] Braud, A., Laflamme, C. «Topologies ensemblistes et propriétés locales des fonctions continues». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* vol. 112, 2018.

[2] Bressan, S., Coutin, O. «Compter les topologies sur un ensemble fini». *Leçons inaugurales du Collège de France,* pp. 218–234, 2016.

[3] M. Chaperon. Une introduction à la topologie. Ellipses, 2019.

[4] P.-L. Combettes. Topologie et analyse fonctionnelle. Dunod, 2019.

[5] J. Dixmier. Introduction à la topologie. Ellipses, 2012.

[6] F. Prudent. Introduction à la théorie des espaces topologiques et des fonctions continues. Ellipses, 2017.

[7] D. Richard, et M. Valero. «Sur le nombre de topologies sur un ensemble fini». *Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités,* vol. 36, pp. 1–16, 2002.

[8] D. Richard, et M. Valero. «Calcul de cardinalités de certains ensembles de topologies finies sur un ensemble fini». *Publications du Laboratoire de Statistique et Probabilités,* vol. 39, pp. 1–18, 2003.

[9] A. Togbé. «Ensembles finis et topologies finies». *Mathématiques et sciences humaines, vol.* 144, pp. 5–17, 1998.