

Stabilité d'un tube déformable par la méthode des perturbations

[Stability of a deformable tube by the perturbation method]

Edouard Diouf

Laboratoire de Mathématiques et Applications,
Université de Ziguinchor, BP 523 Ziguinchor, Sénégal

Copyright © 2015 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the *Creative Commons Attribution License*, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: We consider a nonlinear hyperelastic tube subjected to a deformation radial. We study then the phenomena of asymptotic stability of the tube. We use techniques for obtaining approximations to periodic time solutions of nonlinear second-order differential equations subject to a harmonic forcing term, and to limit cycles of autonomous equations. These approximations take the form of an expansion in integer powers of a small parameter, having coefficients that are functions of time.

KEYWORDS: Hyperelastic, Compressibility, Nonlinear differential equations, Perturbation methods, stability.

RESUME: Dans cette étude, le comportement d'un tube creux hyperélastique, compressible et soumis à des déformations radiales est analysé. Le but est l'étude du problème de la stabilité asymptotique du comportement d'un tube régi par d'une équation différentielle non linéaire. Cette approche est réalisée par la méthode de la linéarisation obtenue par dérivation au sens Gâteaux. Des possibilités d'instabilité ont été mises en évidence. Ces différents comportements dépendent uniquement de la loi constitutive du matériau aux travers des coefficients qui dépendent eux-mêmes des dérivées du potentiel par rapport aux invariants.

MOTS-CLEFS: Hyperélasticité, Compressibilité, Equations différentielles non linéaires, Méthodes des perturbations, Stabilité.

1 INTRODUCTION

Pour étudier la stabilité / instabilité d'un problème mécanique ou physique, il est souvent nécessaire, dans la description mathématique, de résoudre des systèmes d'équations généralement non linéaires afin d'en rechercher les solutions périodiques ou stationnaires. Les premiers travaux sur la stabilité ne retenaient des équations différentielles ordinaires que leur approximation linéaire du premier ordre. Il a fallu attendre quelques années pour que A.M. Lyapunov et H. Poincaré justifient et étendent les propriétés locales déduites du modèle linéarisé.

Lyapunov donne d'intéressants résultats sur la stabilité des équations non linéaires : si l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé, alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

Poincaré a quant à lui fait des études qualitatives sur la notion de stabilité.

Ces différentes théories seront améliorées par Chataev et Lefschetz [1] notamment par un théorème d'instabilité et une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

D'autres travaux ont abouti à une théorie générale sur la stabilité (orbitale) des systèmes hamiltoniens [2]. Il existe différentes notions de stabilité suivant le type ou la symétrie des équations considérées.

Pour la symétrie, il s'agit par exemple d'un changement de variables pouvant porter sur les variables dépendantes (ou indépendantes) et qui laisse l'équation inchangée.

Grillakis, Shatah et Strauss traitent d'ailleurs de groupes de symétrie assez généraux dans leur théorie sur la stabilité [2].

Il existe d'autres approches de la stabilité comme par exemple la technique de la perturbation. Il s'agit de la linéarisation des équations au voisinage d'un point d'équilibre [3].

Certaines méthodes visant à stabiliser les systèmes non linéaires sont basées sur l'utilisation de la linéarisation statique ou dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats satisfaisants du point de vue pratique : existence de solutions périodiques d'une certaine base de systèmes d'équations différentielles non linéaires et construction de telles solutions [4,5]. Le problème général de la théorie des perturbations peut être décrit comme suit:

nous avons un système (système d'équations différentielles ou équations aux dérivées partielles) S_0 , sur lequel nous avons déterminé des informations (solutions analytiques, propriétés qualitatives des solutions).

Nous considérons alors «à proximité» de S_0 un autre système S_ε dont les informations qui en sortiront seront comparées à celles obtenues de S_0 [6].

La question posée est alors de savoir si les informations tirées de S_ε sont assez « proches » ou assez « éloignées » de S_0 .

Si certaines perturbations créent des solutions nouvelles, loin de toute solution de l'équation de départ, il y a instabilité, sinon nous parlerons de stabilité [7].

Dans ce papier, nous présentons les aspects cinématiques et dynamiques d'un tube creux composé de matériau hyperélastique compressible.

Ensuite, on étudie les conditions d'instabilité dans le comportement du tube ; une solution simple est recherchée, puis une technique de perturbation est employée pour mettre en évidence d'éventuelles instabilités.

2 MÉTHODE

2.1 CINÉMATIQUE

L'étude cinématique d'un milieu continu nécessite de définir l'état actuel par rapport à une configuration choisie comme référence et qui peut être la configuration initiale ou une autre faisant intervenir d'autres phénomènes d'élasticité comme la prise en compte des contraintes résiduelles[8]. Dans la cadre des transformations finies, il est approprié de décrire la cinématique d'un milieu continu en configuration Lagrangienne [9].

On considère un secteur circulaire de tube creux composé d'un matériau hyperélastique compressible (figure1).

On appellera configuration 0, l'état de référence ou état de contraintes nulles à déformations nulles ; configuration 1, l'état engendré précontraint dû à la présence des contraintes résiduelles, sans aucun chargement extérieur ; et configuration 2, l'état qui traduit la configuration déformée.

Le système de coordonnées choisi est celui de la configuration cylindrique. Un point matériel M^R est repéré par ses coordonnées (R, Θ, Z) dans la configuration 0, devient le point matériel M^P de coordonnées (ρ, ϕ, ζ) dans la configuration 1, pour enfin se transformer en un point matériel M^T de coordonnées (r, θ, z) dans la configuration 2.

Par la suite, on prendra les notations "i" et "e" pour exprimer respectivement la limite interne et externe du tube [10].

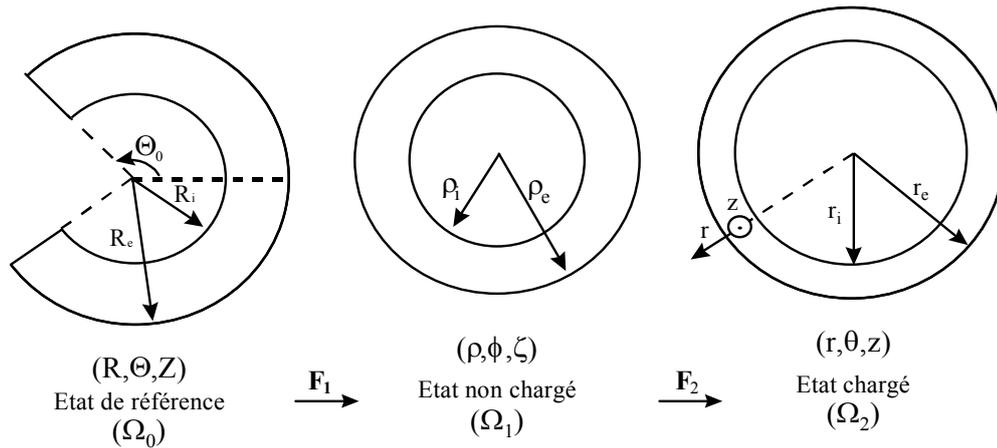


Figure 1: Représentation de la section du tube à l'état de référence (configuration 0), à l'état non chargé (configuration 1) et l'état chargé (configuration 2).

A partir des hypothèses précédemment énoncées, on peut décrire la cinématique du modèle. Pour cela, on note \mathbf{F}_1 le gradient de la transformation qui définit le passage de la configuration 0 à la configuration 1.

D'autre part, la configuration 2, qui traduit l'état chargé, est définie à partir d'un deuxième gradient de transformation \mathbf{F}_2 .

Le tenseur gradient de la transformation totale (configuration 0 à configuration 2) est donné par $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1$.

La déformation radiale du tube est décrite par ;

$$r = r(R,t), \quad \theta = \alpha \cdot \Theta, \quad z = \lambda \cdot Z, \tag{2.1}$$

où $\alpha = \frac{\pi}{\Theta_0}$, Θ_0 est l'angle caractérisant l'ouverture du tube.

Nous notons par λ le coefficient d'élongation axiale pour la seconde transformation, par R_i et r_i respectivement les rayons internes du tube dans la configuration de référence et la configuration déformée (R_e et r_e représentent les rayons externes).

De l'équation (2.1), on déduit le gradient de la transformation \mathbf{F} , qui dans le système de coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\mathbf{F} = \mathbf{diag} \left[\frac{\partial r(R,t)}{\partial R}, \alpha \frac{r(R,t)}{R}, \lambda \right]. \tag{2.2}$$

Notons par $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ les tenseurs de déformations droit et gauche de Cauchy-Green,

(\mathbf{F}^T est le transposé de \mathbf{F}). A noter que d'après (2.1), $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Les invariants élémentaires de déformations de \mathbf{B} s'écrivent :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{B}), I_2 = \text{tr}(\mathbf{B}^*), I_3 = J^2 = \det(\mathbf{B}), I_4 = t_0 \cdot \mathbf{C} \cdot t_0, \tag{2.3}$$

Où $\mathbf{B}^* = \det(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1}$, $J, t_0^T = [t_R, t_\theta, t_z]$ sont respectivement l'adjoint de \mathbf{B} , la variation de volume local et la direction d'isotropie transverse qui caractérise un renforcement fibreux du matériau.

2.2 ETUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE

Tenant compte d'une part des hypothèses d'anisotropie, d'hyperélasticité et de compressibilité et de l'autre des hypothèses définies du point de vue cinématique, le comportement mécanique du tube peut être décrit par un potentiel thermodynamique [11].

En négligeant le caractère visqueux du milieu, la densité d'énergie de déformation par unité de volume W , dans la configuration initiale s'écrit

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4), \quad (2.4)$$

Pour obtenir une relation qui décrit le comportement mécanique, hyperélastique non linéaire, on introduit le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff [9].

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.5)$$

et le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$

$$J \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \mathbf{S} = 2 \left((I_2 W_2 + I_3 W_3) \mathbf{I}_d + W_1 \mathbf{B} - I_3 W_2 \mathbf{B}^{-1} + I_4 W_4 \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right), \quad (2.6)$$

où $W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$, ($i = 1, 2, 3, 4$) et \mathbf{t} la direction d'isotropie transverse dans la configuration déformée, définie par

$$\sqrt{I_4} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{F} \mathbf{t}_0. \quad (2.7)$$

Dans de nombreux problèmes, le modèle incompressible conduit à une bonne description de la réponse mécanique du matériau. Cependant, tous les matériaux « réels » sont compressibles à divers degrés [12], et l'hypothèse $J = 1$ peut conduire, pour certains problèmes aux limites à des résultats considérablement faussés [13]. Le modèle compressible que nous considérons dans cette étude, est celui d'Ogden renforcé [14]. La densité d'énergie de déformation est alors définie par :

$$W = \frac{\mu}{2} \left[(I_1 - 3) + a_1 (I_2 - 3) + a_2 (I_3 - 1) + a_3 \log \sqrt{I_3} + a_4 (I_4 - 1)^2 \right], \quad (2.8)$$

où a_k , ($k = 1, 2, 3$) et μ sont des constantes matérielles et a_4 une constante qui caractérise le renforcement fibreux.

D'après (2.6) la relation de comportement s'écrit

$$\boldsymbol{\square} = \frac{\mu}{J} \left[\left(a_1 I_2 + a_2 I_3 + \frac{a_3}{2} \right) \mathbf{I}_d + \mathbf{B} - a_1 I_3 \mathbf{B}^{-1} + 2 a_4 I_4 (I_4 - 1) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right], \quad (2.9)$$

Compte tenu de (2.1), (2.2), (2.3) et (2.7), les quatre premiers invariants élémentaires de déformation s'expriment alors par

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}(R, t)}{\partial R} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{r(R, t)}{R} \right)^2 + \lambda^2, \\ I_2 &= (\alpha \lambda)^2 \left(\frac{r(R, t)}{R} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}(R, t)}{\partial R} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{r(R, t)}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(R, t)}{\partial R} \right)^2, \\ I_3 &= J^2 = (\alpha \lambda)^2 \cdot \left(\frac{r(R, t)}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(R, t)}{\partial R} \right)^2, \\ I_4 &= t_R^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}(R, t)}{\partial R} \right)^2 + \alpha^2 t_\theta^2 \left(\frac{r(R, t)}{R} \right)^2 + \lambda^2 t_z^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

3 PROBLÈME AUX LIMITES ET STABILITÉ

Dans cette section, nous étudions les phénomènes d'instabilité dans le comportement du tube, une solution triviale de l'équation du mouvement, puis une technique de perturbation pour mettre en évidence d'éventuelles instabilités.

Nous supposons que le vecteur unitaire matérialisant la direction d'isotropie transverse est de la forme $t_0^T = [0, t_\theta, t_z]$

Le problème dynamique aux limites est obtenu à partir de l'équation du mouvement qui se réduit, d'après (2.1), à une seule équation :

$$\frac{1}{\frac{\partial r(R, t)}{\partial R}} \cdot \frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{r(R, t)} = \rho \cdot \frac{\partial^2 r(R, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

où ρ est la masse volumique du tube dans la configuration courante, et qui, en fonction de la masse volumique dans la configuration initiale ρ_0 s'exprime par

$$\rho = \rho_0 / J. \quad (3.2)$$

3.1 SOLUTION TRIVIALE

Pour que R soit solution triviale de (3.1), il faut et il suffit que

$$(\alpha^2 - 1)(W_1 + \lambda^2 W_2) + \alpha^2 t_\theta^2 W_4 = 0. \quad (3.3)$$

Compte tenu de (2.8), la relation (3.3) est équivalente à

$$2a_4 \alpha^2 t_\theta^2 (\alpha^2 t_\theta^2 + \lambda^2 t_z^2 - 1) + (\alpha^2 - 1)(a_1 \lambda^2 + 1) = 0. \quad (3.4)$$

3.2 LINEARISATION PRES DE LA SOLUTION TRIVIALE

Qu'advient-il si nous perturbons légèrement la solution triviale?

Pour trouver l'évolution des fluctuations autour de cette solution, nous appliquons la technique standard de la linéarisation autour de cette solution triviale.

Ainsi, nous obtenons une nouvelle forme de cinématique [5]

$$r = \varphi_0 + \bar{\Psi}(R, t, \varepsilon), \quad \theta = \alpha \Theta, \quad z = \lambda Z, \quad (3.5)$$

où ε est un paramètre indiquant l'amplitude de la perturbation et de norme très petite devant 1 :

$$|\varepsilon| \ll 1,$$

$\varphi_0 = R$ la solution triviale,

$\bar{\Psi}(R, t, \varepsilon)$ une fonction à déterminer.

Dans la base cylindrique $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$, nous avons $r = \varphi_0 \bar{e}_r + \Psi \bar{e}_r$.

où nous posons $\bar{\Psi}(R, t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \Psi(R, t, \varepsilon)$ [4].

Dans cette nouvelle configuration, Le tenseur gradient s'écrit alors

$$\mathbf{F} = \nabla(\varphi_0 + \Psi) = \mathbf{F}_0 + \varepsilon \cdot \mathbf{\Phi}, \quad (3.6)$$

où $\mathbf{F}_0 = \nabla \varphi_0 = \text{diag}(1, \alpha, 1)$, $\mathbf{\Phi} = \nabla \Psi$.

Le premier tenseur de Piola – Kirchhoff, développé à l'aide d'une dérivation au sens de Gâteaux donne

$$\pi = \pi_0 + 2.\varepsilon \left\{ \begin{aligned} & W_1^0 \Phi + W_2^0 \left[\Phi.(tr(C_0)I_d - C_0) + F_0(2(F_0 : \Phi)I_d - \Phi^T F_0 - F_0^T \Phi) \right] + \\ & W_3^0 \left((\det(F_0))^2 F_0^{-T} \Phi F_0^{-T} \right) + W_4^0 \Phi(t \otimes t) + \\ & \left[\frac{\partial W_1}{\partial F}(F_0) : \Phi \right] \Phi + \left[\frac{\partial W_2}{\partial F}(F_0) : \Phi \right] F_0(tr(C_0)I_d - C_0) + \left[\frac{\partial W_3}{\partial F}(F_0) : \Phi \right] (\det(F_0))^2 F_0^{-T} \\ & \left[\frac{\partial W_4}{\partial F}(F_0) : \Phi \right] F_0(t \otimes t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\}. \quad (3.7)$$

Avec $W_k^0 = W_k(F_0)$ et $\pi_0 = \pi(F_0)$ le tenseur associé à F_0 .

Le problème linéarisé est alors équivalent à

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Trouver } \Psi \in H^2(\Omega) \text{ solution de} \\ & \Phi = \nabla \Psi, \\ & \frac{1}{\partial r(R,t) / \partial R} \frac{\partial \sigma_{rr}(R,t)}{\partial R} + \frac{\sigma_{rr}(R,t) - \sigma_{\theta\theta}(R,t)}{r(R,t)} - \frac{\rho_0}{J} \frac{\partial^2 r(R,t)}{\partial t^2} = 0 \\ & r = \varphi_0 + \varepsilon.\Psi \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Où Ω est le domaine tri dimensionnel limité par deux cylindres de rayons respectifs r_i et r_e ,

$H^2(\Omega)$ (espace de Sobolev) est l'espace « naturel » des fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles des équations aux dérivées partielles.

En mécanique et en physique, les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie.

3.3 RÉOLUTION ET STABILITÉ

Pour la résolution du problème (3.8), nous choisissons la forme de Ψ de la façon suivante [4]

$$\Psi(R,t) = U(R) + V(R) \cos(w.t),$$

où $U(R)$ et $V(R)$ sont des fonctions inconnues à déterminer.

En l'absence des forces de volume, l'équation du mouvement est de la forme

$$\begin{aligned} & 2.a_4.\alpha^2.t_\theta^2.(\alpha^2.t_\theta^2 + \lambda^2.t_z^2 - 1) + (\alpha^2 - 1)(a_1.\lambda^2 + 1) + \\ & \varepsilon.G_1(R,t) + \varepsilon^2.G_2(R,t) + \varepsilon^3.G_3(R,t) + \varepsilon^4.G_4(R,t) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{où } G_k = \varepsilon^k G_k \left(R, U(R), \frac{\partial U(R)}{\partial R}, \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2}, V(R), \frac{\partial V(R)}{\partial R}, \frac{\partial^2 V(R)}{\partial R^2}, \cos(w.t) \right), k = 1,2,3,4.$$

L'idée de base est une généralisation du développement de Taylor. On cherche la solution d'un problème avec perturbation comme un développement en puissance de la perturbation.

Compte tenu de (3.4), l'équation (3.9) se réduit à

$$\begin{aligned} & 2.a_4.\alpha^2.t_\theta^2.(\alpha^2.t_\theta^2 + \lambda^2.t_z^2 - 1) + (\alpha^2 - 1)(a_1.\lambda^2 + 1) + \\ & \varepsilon.G_1(R,t) + \varepsilon^2.G_2(R,t) + \varepsilon^3.G_3(R,t) + \varepsilon^4.G_4(R,t) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

Avec l'hypothèse que ε est assez petit, nous négligerons tous les termes quadratiques en ε (i.e. $\varepsilon^n \cong 0, n \geq 2$).

L'équation (3.10) devient une équation découplée

$$\beta_0 R^5 \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2} + \beta_1 R^4 \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2} + \beta_2 R^3 U(R) + \left(\beta_0 R^5 \frac{\partial^2 V(R)}{\partial R^2} + \beta_1 R^4 \frac{\partial^2 V(R)}{\partial R^2} + (\beta_2 + \beta_3 R^2) R^3 V(R) \right) \cos(\omega t) = 0 \quad (3.11)$$

Ce qui donne après simplification les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \beta_0 R^2 \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2} + \beta_1 R \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2} + \beta_2 U(R) &= 0 \\ \beta_0 R^2 \frac{\partial^2 V(R)}{\partial R^2} + \beta_1 R \frac{\partial^2 V(R)}{\partial R^2} + (\beta_2 + \beta_3 R^2) V(R) &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où les β_i ; ($i = 0,1,2,3$) sont des constantes définies par

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 1 - a_2 a_3 + a_1 (\alpha^2 + \lambda^2), \\ \beta_1 &= 3 - a_2 a_3 + (a_1 - 2) \alpha^2 + a_1 \lambda^2 (3 - 2\alpha^2) + 4a_4 \alpha^2 t_\theta^2 (1 - \alpha^2 t_\theta^2 - \lambda^2 t_z^2), \\ \beta_2 &= 1 + a_2 a_3 - (a_1 + 2) \alpha^2 + a_1 \lambda^2 (1 - 2\alpha^2) + 4a_4 \alpha^2 t_\theta^2 (1 - 2\alpha^2 t_\theta^2 - \lambda^2 t_z^2), \\ \beta_3 &= \rho_0 \omega^2 / \mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La première équation de (3.12) est une équation du type équation d'Euler dont la solution est

$$U(R) = A_0 R^{r_1} + A_1 R^{r_2}, \quad (3.14)$$

où A_0 et A_1 sont des constantes d'intégrations, r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 + \left(\frac{\beta_1}{\beta_0} - 1 \right) r + \frac{\beta_2}{\beta_0} = 0, \quad (3.15)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\beta_0 - \beta_1}{2\beta_0} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_0} \right)^2 - 4 \frac{\beta_2}{\beta_0} \right]^{1/2}, \\ r_2 &= \frac{\beta_0 - \beta_1}{2\beta_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_0} \right)^2 - 4 \frac{\beta_2}{\beta_0} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La seconde équation de (3.12) est une équation de Bessel généralisée dont la solution est

$$V(R) = R^{\left(\frac{\beta_0 - \beta_1}{2\beta_0} \right)} \cdot Z_\nu \left(\left(\frac{\beta_2}{\beta_0} \right)^{1/2} R \right),$$

avec

$$Z_\nu(z) = B_0 J_\nu(z) + B_1 J_{-\nu}(z),$$

B_0 et B_1 des constantes d'intégrations, $J_\nu(z)$ la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν ,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} ; \nu = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta_0 - \beta_1}{\beta_0}\right)^2 - 4 \frac{\beta_3}{\beta_0} \right]^{1/2}.$$

Le problème (3.8) a donc pour solution

$$r = R + \varepsilon \cdot \Psi(R, t), \tag{3.17}$$

Avec

$$\Psi(R, t) = U(R) + V(R) \cdot \cos(\omega t).$$

Dans le cas où ν n'est pas un entier (c'est qui est le cas dans cette étude), les fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont linéairement indépendantes et forment une base de l'espace des fonctions.

En effet, la fonction $\Gamma(u)$ ne prend des valeurs infinies que pour des valeurs entières de u . Ainsi lorsqu'on fait tendre z vers 0, J_ν tend vers 0 à cause du terme $(z/2)^\nu$, alors que $J_{-\nu}$ tend vers l'infini à cause du terme $(z/2)^{-\nu}$.

De plus les Z_ν convergent car les J_ν convergent. Il en ressort l'existence d'une constante positive majorant Z_ν

$$|Z_\nu| \leq L.$$

Ce qui conduit à :

$$|V(R_1) - V(R_2)| \leq L |R_1 - R_2| \sum_{k=1}^{n_0} R_1^{\bar{r}-k} R_2^{k-1}, \forall R_1, R_2 \in [R_i, R_e] \tag{3.18}$$

où $n_0 = 1 + E\left(\left|\frac{\beta_0 - \beta_1}{2\beta_0}\right|\right)$ et $E(u)$ la partie entière de u .

De la même manière, nous pouvons aussi majorer $U(R)$, et par suite la fonction $r(R, t)$ définie en (3.17)

$$|r(R_1, t) - r(R_2, t)| \leq L_0 |R_1 - R_2|, \forall R_1, R_2 \in [R_i, R_e] \tag{3.19}$$

Avec

$$L_0 = 1 + \varepsilon \cdot \text{Sup}[L_1, L_2]$$

où

$$L_1 = \left| A_0 \sum_{k=1}^{\bar{r}_1} R_1^{\bar{r}_1 - k} + A_1 \sum_{k=1}^{\bar{r}_2} R_1^{\bar{r}_2 - k} + L \sum_{k=1}^{n_0} R_1^{n_0 - k} R_2^{k-1} \right|,$$

$$L_2 = \left| A_0 \sum_{k=1}^{\bar{r}_1} R_2^{\bar{r}_1 - k} + A_1 \sum_{k=1}^{\bar{r}_2} R_2^{\bar{r}_2 - k} + L \sum_{k=1}^{n_0} R_1^{n_0 - k} R_2^{k-1} \right|,$$

$$\bar{r}_1 = 1 + E(|r_1|), \quad \bar{r}_2 = 1 + E(|r_2|).$$

L'inégalité (3.19) montre que la fonction $r(R, t)$ est L_0 - contractante.

Cette inégalité démontre aussi une propriété de stabilité liée aux perturbations [15]. Cette propriété repose essentiellement sur le caractère lipchitzien de $r(R, t)$.

La sensibilité est mesurée par la constante de stabilité L_0 qui dépend à la fois ε, n_0, r_1 et r_2 et des conditions initiales et/ou aux limites (constantes d'intégrations).

Plus elle est grande, plus la solution (3.17) s'éloigne de $\varphi_0 = R$, il apparaît alors des phénomènes d'instabilité à L_0 .

Ce résultat appliqué au théorème de Cauchy-Lipchitz [16], montre que le problème étudié est bien posé au sens de Hadamard, et que la solution dépend continûment de n_0, r_1 et r_2 .

D'autre part, nous savons du théorème sur la dépendance continue de la solution par rapport aux valeurs initiales [17] que si l'on se donne un intervalle de temps fini déterminé, pour un écart suffisamment petit des valeurs initiales, la solution s'écartera peu au cours d'un court temps donné. Pour l'étude de la stabilité, cet égard est quantifié par la constante L_0 .

Dans cette étude, l'analyse des solutions se ramène à celle des solutions maximales [16]. Il en ressort que la solution générale (3.17) ne pouvait être exprimée en utilisant les fonctions élémentaires.

4 CONCLUSION

A la lumière de cette étude, nous avons montré la possibilité offerte par cette méthode pour l'étude de la stabilité d'un tube creux au travers une équation différentielle non linéaire présentant une solution évidente. Il ressort de cette étude que l'analyse de la stabilité dépend de la loi constitutive du matériau aux travers des coefficients $\mathcal{E}, n_0, r_1, r_2$ en plus des constantes d'intégrations. Les résultats obtenus sont importants dans le sens où ils suggèrent qu'il est possible de retrouver un résultat de stabilité en étudiant le caractère lipchitzien des fonctions. Ce qui est d'ailleurs conforme au théorème de Cauchy – Lipchitz.

Cette approche est généralisable à toute loi constitutive de même nature.

REFERENCES

- [1] Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. N.J : Prentice-Hall inc, 1963.
- [2] Grillakis, M, Shatah, J et Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry.*, W. 1987, I.J. Funct. Anal, pp. 160 - 197.
- [3] Biot Ma., *Linear thermodynamics and the mechanics of solids*. Proc. Third U.S : American Society of Mechanical Engineers, 1958. National Congress, Applied Mechanics. pp. 1-18.
- [4] Diouf E., *Exact solution of a problem of dynamic deformation and nonlinear stability of a problem with a Blatz-Ko material*. 2012, International Journal of Scientific & Engineering Research, pp. ISSN 2229 - 5518.
- [5] Jouve, F et Dry, D L., *Modélisation de l'oeil en élasticité non linéaire*. Paris : Masson, 1993.
- [6] Giampaolo, Cicogna et Giuseppe, Gaeta. *Symmetry and perturbation theory in nonlinear dynamics*. Italy : Springer-Verlag Physics Editorial , 1999.
- [7] Olivier Druet, *La notion de stabilité pour les équations aux dérivées partielles elliptiques* 2010, Sociedade Brasileira de Matematica, Vol. 19, pp. 1-100.
- [8] Chuong C.J., Fung Y.C., *Residual Stress in arteries*. 1986, Journal of Biomechanical Engineering, pp. 189-192.
- [9] Green AA.E., Zerna W., *Theoretical Elasticity*. London:Oxford : University Press, 1968.
- [10] Zidi M., Cheref M., Oddou C., *Finite elasticity modelling of vascular prostheses mechanics*. 3, 1999, Eur. Phys. J. Appl. Phys, Vol. 7, pp. 271-275.
- [11] Spencer, A.J.M., *Continuum theory of a Mechanical of Fibre-Reinforced Composites*. Springer, 1984.
- [12] Lemaître J., Chabiche J.L., *Mécanique des milieux solide*. Paris : Dunod, 1985.
- [13] M.F., Beatty, *Topics in finite elasticity: hyperelasticity of rubber, elastomers and biological tissues- with examples*. 1987, Appl. Mech. Rev, pp. 1699-1734.
- [14] M., Zidi, *Combined torsion, circular and axial shearing of a compressible hyperelastic and prestressed tube*. 2000, ASME J. Appl. Mech., pp. 33-40.
- [15] Kato, Tosio, *Perturbation theory for linear operators*. Berlin : reprint of the 1980 edition, 1995.
- [16] Rouche, N et Mawhlin, J., *Equations différentielles ordinaires*. Paris, Tome II : Masson et Cie, 1973.
- [17] L.Pontriaguine, *Equations différentielles ordinaires*. Editions MIR.1975 Moscou.