International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 13 No. 2 Oct. 2015, pp. 327-334

http://www.ijias.issr-journals.org/

Sur l'ellipticité des équations non linéaires pour une certaine classe de matériau isotrope et compressible

[On the ellipticity of nonlinear equations for a certain class of isotropic material and compressible]

Edouard Diouf

Laboratoire de Mathématiques et Applications,
Université Assane Seck de Ziguinchor, Sénégal

ABSTRACT: Problems related to the elasticity, studied based on the models represented by the elliptic equations are characterized by their invariable in time. For an isotropic compressible medium, the loss of ellipticity criterion depends on the determinant of the Hessian matrix of the energy potential and therefore invariant tensor Cauchy Green. Necessary and sufficient conditions on the ellipticity or Legendre -Hadamard condition are given from two energy functions of polynomial type from the isotropic compressible case.

KEYWORDS: nonlinear equation, compressibility, ellipticity, Legendre-Hadamard condition.

RÉSUMÉ: Les problèmes liés à l'élasticité, étudiés sur la base des modèles représentés par les équations de type elliptique, se caractérisent par leur invariabilité dans le temps. Pour un milieu isotrope et compressible, le critère de perte d'ellipticité dépend du déterminant de la matrice hessienne du potentiel d'énergie et donc des invariants du tenseur de Cauchy Green. Des conditions nécessaires et suffisantes sur l'ellipticité ou condition de Legendre-Hadamard sont données à partir de deux fonctions d'énergie de type polynomial dans le cas isotrope et compressible.

MOTS-CLEFS: équations non linéaires, compressibilité, matrice hessienne, invariants, ellipticité.

1 INTRODUCTION

Le développement de la théorie des solutions des systèmes mécaniques non linéaires a été l'une des grandes avancées dans l'étude des équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques, pendant ces dernières années. En mécanique des fluides et des solides, une attention particulière a été portée sur l'ellipticité des équations issues de l'étude des systèmes matériels compressibles ou incompressibles [1].

En élastostatique, par exemple, Knowles et Sternberg [2] ont montré que la perte d'ellipticité dans les systèmes non linéaires est due aux grandes déformations locales, alors qu'en acoustique, cette perte est liée à la non-singularité du tenseur acoustique.

En plasticité, il a été établi que lorsque le comportement élasto-viscoplastique tend vers un comportement élastoplastique, le critère d'ellipticité peut être lié à l'analyse de la stabilité [3]. Ainsi, l'absence de critère de stabilité unique, peut conduire à rapprocher la condition d'ellipticité considérée comme un critère de stabilité local, à la forme locale d'analyse classique de stabilité par le théorème de Lyapunov.

D'autres auteurs [4] ont quant à eux, montré l'influence de la non linéarité et de la compressibilité des matériaux homogènes isotropes sur le champ de déplacement élastostatique et donc sur l'ellipticité. A cet égard, ils ont établi que la réponse du matériau, en présence de grandes déformations, se trouve dans les paramètres du potentiel d'énergie comme celui par exemple de Blakz-Ko.

Pour ce qui est du critère de la perte d'ellipticité, donné aussi par l'analyse de Rice [5,6], il est basé sur la discontinuité du champ gradient des vitesses vérifiant les conditions de compatibilité cinématique et une condition d'équilibre.

L'étude de l'ellipticité, relativement à un milieu isotrope, peut se faire selon deux types de matériaux à savoir l'incompressibilité et la compressibilité [1]. Il est établi qu'avec le modèle Neo-Hookean, l'ellipticité est conservée avec l'ensemble des déformations, alors que pour le modèle isotrope compressible de type Blatk-Ko, il y a perte d'ellipticité avec des grandes déformations [7].

Dans ce papier, après une formulation cinématique, nous nous intéressons à l'ellipticité de deux types de matériau. Nous étudions d'une part la perte (ou non) d'ellipticité d'un système matériel relativement à un modèle de type polynomial (exemple du modèle proposé par Diouf et Zidi) et d'autre part du modèle de Blatz-Ko.

2 APPROCHE CINÉMATIQUE

Considérons une déformation χ associant à une position (a) de la configuration de référence R_0 le point $x = \chi(a)$ de configuration déformée, de référence R.

Pour un système matériel, une description équivalente de cette déformation consiste à considérer le champ de déplacement u défini par $x = \chi(a) = a + u(a)$.

Si $\delta a = a' - a$ représente un vecteur pris autour de a, le champ de déplacement u le transporte en un vecteur $\delta x = x' - x = \delta a + u(a') - u(a)$.

C'est ainsi que : $\delta x - \delta a = u(a') - u(a) = \mathbf{H}(a)\delta a + o\left(\left|\delta a\right|^2\right)$,

avec : $\mathbf{H}(a) = \left(H_{ij}(a)\right) = \left(\partial u_i(a)/\partial a_j\right),\ i, j = 1,2,3$ l'application linéaire tangente.

Le tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$ défini à partir de cette application et du tenseur identité est tel que $\mathbf{F}(a) = \mathbf{I}_d + \mathbf{H}(a)$.

Il s'en suit le tenseur de déformation gauche de Cauchy-Green $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

Les trois premiers invariants élémentaires sont ainsi définis :

$$I_1 = tr(\mathbf{B}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$
$$I_2 = tr(\mathbf{B}^*) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2,\ \mathbf{B}^* = \det(\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1} \text{ est l'adjoint de } \mathbf{B},$$
$$I_3 = \det(\mathbf{B}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2,$$

les λ_i étant les valeurs propres de $\mathbf{F}$.

Considérons une fonction d'énergie :

$$W(\mathbf{F}) = g\left(\lambda_1(\mathbf{F}), \lambda_2(\mathbf{F}), \lambda_3(\mathbf{F})\right)$$

deux fois continument différentiable. Une condition nécessaire et suffisante pour que $W(\mathbf{F})$ satisfasse les conditions d'ellipticité (ou de Legendre-Hadamard) est donnée par [8] :

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{3} \frac{\partial^2 W(\mathbf{F})}{\partial F_{ik}\partial F_{jl}} \alpha_i\alpha_j\beta_k\beta_l \geq 0, \tag{2.1}$$

pour tout vecteur α, β.

Si de plus la fonction g est symétrique, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que $W(\mathbf{F})$ soit convexe sont données par:

$$\frac{\lambda_i g_i - \lambda_j g_j}{\lambda_i - \lambda_j} \geq 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ 1 \leq i \prec j \leq 3, \tag{2.2.a}$$

et la matrice $\mathbf{M}^{\varepsilon}$ est définie positive.

$$\mathbf{M}^{\varepsilon} = \left(M_{ij}^{\varepsilon}\right)_{1\leq i,j\leq 3},$$

$$M_{ij}^{\varepsilon} = \begin{cases} g_{ii} & \text{si } i = j \text{ ou si } i \prec j \text{ et } \lambda_i = \lambda_j \\ \varepsilon_i \varepsilon_j g_{ij} + \dfrac{g_i - \varepsilon_i \varepsilon_j g_j}{\lambda_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \lambda_j} & \text{si } i \prec j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ ou } \varepsilon_i \varepsilon_j \neq 1 \end{cases} \tag{2.2.b}$$

pour tout $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$, avec $g_i = \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_i},\ g_{ij} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}.$

La preuve de ces résultats montre que la condition d'ellipticité est équivalente [8] à (2.2.a).

Pour un système matériel élastique, compressible et non linéaire, les équations d'équilibres sont données par :

$$C_{ijkl} = (\mathbf{I}_d + \nabla u) u_{k,ij} = 0 \quad \text{sur } R_0 \tag{2.3}$$

avec $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\mathbf{I}_d + \nabla u) = C_{ijkl}(\mathbf{F}) = \dfrac{\partial^2 W(\mathbf{F})}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}.$

Le système (2.3) est un problème elliptique. Il admet une solution u si et seulement si

$$\det(C_{ijkl}(\mathbf{F}) n_j n_l) \neq 0. \tag{2.4}$$

Les n_j, n_l représentent les composantes d'un vecteur unitaire $\vec{n}$.

Dans la configuration déformée, les équations d'équilibre sont données par [9]:

$$L_{ijkl} u_{k,lj} = 0 \quad \text{sur } R \tag{2.5}$$

avec $L_{ijkl} = C_{ijkl}(\mathbf{I}_d + \nabla u).$

L'ellipticité (ou la perte d'ellipticité) sera déterminée par la recherche des zéros du polynôme caractéristique de L_{ijkl}.

3 MODÈLE DE DIOUF-ZIDI

Le modèle proposé par Diouf-Zidi [10] est une forme à plusieurs paramètres qui aboutit à une formulation unifiée de diverses représentations :

$$W = \frac{\mu}{2}\left[(I_1 - 3) + a_1(I_2 - 3) + a_2\left[\left(I_3^{1/p} - 1\right)^p + (2-p)(I_3 - 1)\right] + a_3 \frac{2-p}{1+p}\log(I_3)\right]. \tag{3.1}$$

Admettons le théorème de Rosakis [11,12] qui montre que :

$$W(I_1, I_2, I_3) = W(\alpha, \beta),$$

avec

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \beta_1^2+\beta_2^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2,\\
I_2 &= \beta_1^2\left(\alpha_2^3+\alpha_3^2\right)+\beta_2^2\left(\alpha_3^3+\alpha_1^2\right)+\beta_3^2\left(\alpha_1^3+\alpha_2^2\right),\\
I_3 &= \left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)^2,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

où $\beta=\left(\beta_1,\beta_2\right)$, $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ sont des vecteurs choisis tels que β_1, β_2, α_3 soient strictement positifs.

Les expressions données en (3.2) permettent de réécrire la fonction d'énergie (3.1) sous la forme :

$$
W(\beta,\alpha)=\frac{\mu}{2}\left|\begin{array}{l}
\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-3\right)+\\
a_1\left(\beta_1^2\left(\alpha_2^3+\alpha_3^2\right)+\beta_2^2\left(\alpha_3^3+\alpha_1^2\right)+\beta_3^2\left(\alpha_1^3+\alpha_2^2\right)-3\right)\\
+a_2\left[\begin{array}{l}\left(\left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)^{2/p}-1\right)^p\\ +(2-p)\left(\left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)^2-1\right)\end{array}\right]\\
+a_3\dfrac{2-p}{2(1+p)}\log\left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)
\end{array}\right]
\tag{3.3}
$$

Posons $H_{ij}=\dfrac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}$ les composantes de la matrice hessienne $\mathbf{H}_W$ de $W(\beta,\alpha)$ avec la condition β_1, β_2 constants.

Les composantes non nulles de $\mathbf{H}_W$ sont :

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= \mu\left(1+a_1\beta_2^2\right),\\
H_{22} &= \mu\left(1+a_1\beta_1^2\right),\\
H_{33} &= \frac{\mu a_2}{p}\beta_1^2\beta_2^2\left[\left(pI_3+2(1-p)\beta_1^2\beta_2^2\alpha_3^2\right)\left(I_3^{\frac{1}{p}}-1\right)+2\frac{p-1}{p}\beta_1^2\beta_2^2\alpha_3^2 I_3^{\frac{1}{p}}\right]I_3^{\frac{1}{p}-2}\left(I_3^{\frac{1}{p}}-1\right)^{p-2}+\\
&\mu\left[1+a_3\frac{p-2}{(p+1)\alpha_3^2}\right]+\mu a_1\left(\beta_1^2+\beta_2^2\right)-\mu a_2\frac{p-2}{p}\beta_1^2\beta_2^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi nous avons :

$$
\det\left(\mathbf{H}_W\right)=\mu^3\left(1+a_1\beta_1^2\right)\left(1+a_1\beta_2^2\right)H_3,
\tag{3.4}
$$

avec $H_3=H_{33}/\mu.$

Ainsi, pour le modèle décrit en (3.1) et relativement à un milieu isotrope et compressible, l'ellipticité (globale) des équations (2.3) dépend fortement de H_3, et donc de I_3.

Dans les conditions où p est un paramètre strictement positif, la recherche analytique des zéros de l'équation $\det\left(\mathbf{H}_W\right)=0$ est moins évidente.

Par ailleurs, il est possible de considérer l'ellipticité en posant dans (3.4) $\beta_1=\beta_2=\sqrt{-a_1^{-1}}$, avec la condition $a_1 \prec 0.$

Cela garantit l'existence du vecteur β avec les conditions $\beta_1, \beta_2 \succ 0.$ Cependant, comme le paramètre a_1 est lié au matériau, cela réduit le nombre de système matériel globalement elliptique sur R_0.

Par un passage à l'incompressible : $I_3 \to 1,$ nous aurons :

$$H_3 = 1 + a_1\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) - a_2\beta_1^2\beta_2^2\,\frac{p-2}{p} + a_3\,\frac{p-2}{(p+1)\alpha_3^2},$$

ce qui peut donner comme zéro de $\det\left(\mathbf{H}_W\right) = 0$:

$$\alpha_3^2 = \frac{p-2}{p+1}\frac{a_3}{\left[-1 - a_1\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) + a_2\beta_1^2\beta_2^2\,\dfrac{p-2}{p}\right]}.$$

D'autre part, le modèle (3.1) peut être considéré comme une généralisation [10] du modèle d'Ogden $(p=1)$ et d'Hadamard $(p=2)$.

Lorsque $p=1,$ nous avons $H_3 = 1 + 2a_2\beta_1^2\beta_2^2 + a_1\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) - \dfrac{a_3}{2\alpha_3^2},$

Et pour $p=2,\ H_3 = 1 + a_2\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dfrac{\beta_1^2\beta_2^2}{2}\right).$

Dans ces deux cas limites, il est possible de montrer que $\det\left(\mathbf{H}_W\right) = 0$ admet au moins une solution. Ainsi, avec les formes de H_3 l'existence des vecteurs β et a est prouvée avec les conditions $\beta_1,\ \beta_2,\ \alpha_3 \succ 0$ ainsi que la régularité des coefficients de $\mathbf{H}_W$.

Dans le cas où $W = \tilde{W}(I_1(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})),$ et $\mathbf{F} = \sum_i \lambda_i(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j),\ i = 1,2,3,$ les $\vec{e}_i$ formant une base orthogonale dans $\mathbf{R}^3$ et λ_i positif, Walton et Wilbert [13] montrent qu'il y a ellipticité si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
&\tilde{W}_1 \succ 0,\\
&\tilde{W}_1 + \tilde{W}_3 \succ 0,\\
&\tilde{W}_1 + \tilde{W}_3 + 2\left[(\lambda_1 - \lambda_2^2/\lambda_1)^2\tilde{W}_{11} + 2(\lambda_1 - \lambda_2^2/\lambda_1)\tilde{W}_{13}\lambda_1 + \tilde{W}_{33}\lambda_1^2\right] \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $\tilde{W}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial I_i \partial I_j}.$

En posant $a_1 = 0$ dans le modèle décrit en (3.1) et compte tenu que $\mu \succ 0$, il apparaît que la première inégalité de (3.5) est vérifiée, et que la seconde s'écrit :

$$1 + a_2\left[(2-p) + \left(I_3^{1/p} - 1\right)^{p-1} I_3^{\frac{1}{p}-1}\right] + a_3\,\frac{2-p}{(p+1)I_3} \geq 0. \tag{3.6}$$

La dernière inégalité de (3.5) devient :

$$\begin{aligned}
&1+a_2\left[(2-p)+\left(I_3^{1/p}-1\right)^{p-1} I_3^{\frac{1}{p}-1}\right]+a_3\frac{2-p}{(p+1)I_3}\\
&+2\lambda_1^2 a_2\left[\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(I_3^{1/p}-1\right)I_3^{\frac{1}{p}-2}+\frac{p-1}{p}I_3^{2\left(\frac{1}{p}-1\right)}\right]\left(I_3^{1/p}-1\right)^{p-2}\\
&-2\lambda_1^2 a_3\frac{2-p}{(p+1)I_3^2}\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Cette inégalité peut encore s'écrire sous la forme :

$$1+\tilde{W}_3(I_3)+2\lambda_1^2\frac{d\tilde{W}_3(I_3)}{dI_3}\geq 0\,.$$

Il faut alors remarquer que l'ellipticité dépend fortement du paramètre p et du troisième invariant I_3.

Dans les cas limites de la généralisation du modèle (3.1), le critère d'ellipticité établi en (3.6) et (3.7) donne respectivement pour les modèles d'Ogden et D'Hadamard:

$$p=1:\begin{cases}2\left(1+2a_2\right)I_3+a_3\geq 0,\\ 2\left(1+2a_2\right)I_3^2+a_3 I_3-2\lambda_1^2 a_3\geq 0,\end{cases}$$

$$p=2:\begin{cases}\left(1+a_2\right)\sqrt{I_3}-a_2\geq 0,\\ \left(1+a_2\right)I_3^{3/2}-a_2 I_3-\lambda_1^2 a_2\geq 0.\end{cases}$$

4 MODÈLE DE BLATZ-KO

La densité d'énergie de type Blatz-Ko [14] est donnée par :

$$W=\frac{\mu}{2}f\left[I_1-1-\frac{1}{\nu}+\frac{1-2\nu}{\nu}I_3^{\frac{-\nu}{1-2\nu}}\right]+\frac{\mu}{2}(1-f)\left[\frac{I_2}{I_3}-1-\frac{1}{\nu}+\frac{1-2\nu}{\nu}I_3^{\frac{\nu}{1-2\nu}}\right]. \tag{4.1}$$

En portant les équations (3.2) dans (4.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
W(\beta,\alpha)=&\frac{\mu}{2}f\left[\beta_1^2+\beta_2^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-1-\frac{1}{\nu}+\frac{1-2\nu}{\nu}\left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)^{\frac{-2\nu}{1-2\nu}}\right]\\
&+\frac{\mu}{2}(1-f)\left[\frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\beta_2^2\alpha_3^2}+\frac{\alpha_1^2+\alpha_3^2}{\beta_1^2\alpha_3^2}+\frac{1}{\alpha_3^2}-1-\frac{1}{\nu}+\frac{1-2\nu}{\nu}\left(\beta_1\beta_2\alpha_3\right)^{\frac{2\nu}{1-2\nu}}\right].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En posant $\mathbf{H}_W=\mu\mathbf{H}$ la matrice hessienne de la fonction (4.2), nous obtenons du fait de la symétrie, les composantes non nulles de $\mathbf{H}$:

$$H_{11} = f + \frac{1-f}{\beta_1^2 \alpha_3^2},$$
$$H_{13} = \frac{-2(1-f)\alpha_1}{\beta_1^2 \alpha_3^3},$$
$$H_{22} = f + \frac{1-f}{\beta_2^2 \alpha_3^2},$$
$$H_{23} = \frac{-2(1-f)\alpha_2}{\beta_2^2 \alpha_3^3},$$
$$H_{33} = f\left[1 + \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{1-2\nu}(\beta_1 \beta_2 \alpha_3)^{2(\nu-1)/(1-2\nu)}\right] +$$
$$(1-f)\left[\frac{3\alpha_2^2}{\beta_2^2 \alpha_3^4} + \frac{3\alpha_1^2}{\beta_1^2 \alpha_3^4} + \frac{3}{\alpha_3^4} + \frac{4\nu-1}{1-2\nu}\beta_1^2 \beta_2^2 (\beta_1 \beta_2 \alpha_3)^{2(3\nu-1)/(1-2\nu)}\right].$$

En posant $f = 1$, nous avons $\det(\mathbf{H}_W) = \mu^3\left[1 + \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{1-2\nu}(\beta_1 \beta_2 \alpha_3)^{2(\nu-1)/(1-2\nu)}\right]$,

Ce qui montre que pour le modèle (4.1), relativement à un milieu isotrope et compressible, les équations (2.3) sont globalement elliptiques sur R_0 lorsque $f = 1$.

Supposons $f \in [0,1[$, et posons $\mathbf{H}_W = \mu(1-f)\mathbf{h}$, où les composantes non nulles de $\mathbf{h}$ (symétrique) sont :

$$h_{11} = \frac{H_{11}}{1-f}, h_{13} = \frac{-2\alpha_1}{\beta_1^2 \alpha_3^3}, h_{22} = \frac{H_{22}}{1-f}, h_{23} = \frac{-2\alpha_2}{\beta_2^2 \alpha_3^3}, h_{33} = \frac{H_{33}}{1-f}.$$

En considérant le cas limite où $f = 0$ et $\nu = 1/4$, nous avons :

$$\det(\mathbf{h}) = \frac{3\beta_1^2 \beta_2^2 - \alpha_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \beta_1^2}{\beta_1^4 \beta_2^4 \alpha_3^8}.$$

Ainsi, nous avons une perte d'ellipticité pour le modèle de Blatz-Ko décrit en (4.1) si et seulement si $\det(\mathbf{h}) = 0$, c'est à dire : les vecteurs β, α sont tels que :

$$\frac{\alpha_1^2}{3\beta_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{3\beta_2^2} = 1.$$

Le résultat est le même pour le cas $f = 0$ et $\nu \neq 1/4$.

Prenons le cas où $f \in]0,1[$. Nous avons :

$$\det(\mathbf{h}) = \frac{H_{11} H_{22} H_{33}}{(1-f)^3} - \frac{4\alpha_2^2 H_{11}}{(1-f)\beta_2^4 \alpha_3^6} - \frac{4\alpha_1^2 H_{22}}{(1-f)\beta_1^4 \alpha_3^4}.$$

Il en découle que l'ellipticité dans ce cas, dépend des invariants I_i.

5 CONCLUSION

Dans l'étude des deux modèles décrits au paragraphe 3 et 4, nous notons que la perte (ou non) d'ellipticité dépend fortement du troisième invariant I_3 (modèle 3.1) et des $I_i, i=1,2,3$ (modèle 4.1). Nous pouvons alors affirmer la corrélation entre la compressibilité et l'ellipticité pour les modèles de matériaux isotropes compressibles. Avec Rosakis, nous avons aussi un lien entre l'ellipticité, la variation du volume local et les vecteurs α et β. La recherche de l'existence de ces vecteurs repose sur la minimisation d'une fonctionnelle suffisamment régulière et reliée au déterminant de la matrice hessienne du potentiel d'énergie. Cependant certaines précautions sont nécessaires pour s'assurer de prédire l'ensemble des directions des vecteurs α et $I_i, i=1,2,3$ et donc l'ensemble des orientations possibles qui dépendent du modèle de comportement choisi. A un degré non moins négligeable, l'étude sur l'ellipticité dépend aussi des paramètres liés au matériau. Cela se confirme et devient évidente lorsque $I_3 \to 1,$ par passage à l'incompressible.

REFERENCES

[1] Zee L., Sternberg E., Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible Hyperelastic solids; *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 83, 53-90, 1983.

[2] Knowles J.K., Sternberg E.; On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics For a special material ; *Journal of Elasticity* 5,341-361, 1975.

[3] Barbier G., Benallal A., Cano V.; Realation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et L'analyse de bifurcation pour la prédication de la localisation des déformation ; *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*-series IIB, 326(3), 153-158, 1998.

[4] Walton J.R., Wilbert J.P. : Sufficient conditions for strong ellipticity for a class of anisotropic materials ; *International Journal of non linear mechanics,* 38, 441-455, 2003.

[5] Bigoni D., Hueckel T.; Uniqueness and localization associative and nonassocitive elastoplasticity; *International Journal of Solid and Structures*, 28(2); 197-213, 1991.

[6] Rice J.R.; The localization of plastic deformation; In: *14th IUTAM Congress, Koiter Amsterdam,* 1976.

[7] Triantafyllidis N., Abeyaratne R.; Instability of a finitely deformed fiber-reinforced elastic material; *Journal of Apllied Mechanic*, 50, 149-156, 1983.

[8] Dacorogna B.: Necessary and sufficient conditions for strong ellipticity of isotropic functions in any dimension; *Discrete and continuous dynamical systems.* Series B, vol.1 2001.

[9] Criscione J.C., Humphrey J.D., Douglas A.S., Hunter W.C. : An invariaant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelastic ; *J.Mech .Phys. Solids,*48,2445-2465, 2000.

[10] Diouf E., Zidi M. : Finite azimuthal shear motion of a transversely isotropic compressible elastic and prestressed tube ; *International Journal of Engineering Sciences,* 43,262-274,2005.

[11] Healey T.J., Rosakis P. : Unbounded branches of classical injective solutions to the forced displacement problem in non-linear elastostatics ; *Journal of Elasticity*, 49,65-78,1997.

[12] Rosakis P. :Ellipticity and deformations with discontinuous gradients in plane elastostatics of compressible solids ; *Arch. Rat. Mech. Anal,* 109,1-37,1990.

[13] Walton R., Wilber J.P., "Sufficient conditions for strong ellipticity for a class of anisotropic materials", *International Journal of Non-Linear Mechanics,* 38:441-455 *(2003).*

[14] Beatty M.F. : Topic in finite elasticity : hyperelasticity of rubber, elastomers and biological tissues ; *Appl. Mech. Review,* 40, 1699-1734, 1987.