International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 1 Aug. 2017, pp. 77-95

http://www.ijias.issr-journals.org/

Le programme formaliste de David Hilbert

LULA BABOLE A.-Roger[1-2]

[1]Département des Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

[2]Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

ABSTRACT: The research shows clearly that the HILBERT's program look at to obtain the formalisms of the formals theories. This program stamp a fertile optimism of symbolic which allowed to create the logics and mathematics formalisms, and there formal and automatable manipulation. So the formalism is the image of thinking; in this sense the forms become the work matter.

KEYWORDS: Fondationnal research, formalism, finitism, metamathematique, coherence, existence, decidability, epsilon.

RÉSUMÉ: L'étude montre clairement que le programme de HILBERT cherche à obtenir les formalismes des théories formelles. Ce programme marque un optimisme fécond du symbolique permettant de créer les formalismes logiques et mathématiques ainsi que leur manipulation formelle et automatisable. Donc, les formalismes sont des images des pensées ; en ce sens les formes deviennent la matière du travail.

MOTS-CLEFS: recherche fondationnelle, formalisme, finitisme, metamathématique, cohérence, existence, décidabilité, epsilon.

INTRODUCTION

L'idée fondamentale du formalisme de HILBERT consiste à réduire la déduction à un procédé mécanique et aveugle faisant abstraction du sens. La théorie des preuves à la HILBERT devait permettre de récupérer une théorie douteuse, celle de CANTOR afin d'expliquer toutes sortes de choses fort : les nombres, les fonctions, etc. En clair, elle impliquait une croyance en la perfection d'une axiomatique universelle pour toutes les mathématiques.

UNE MISE AU POINT SUR LE PROGRAMME DE HILBERT

Le programme formaliste de HILBERT est à appréhender dans le contexte des recherches fondationnelles. Il se situe dans une longue tradition commençant par l'arithmétisation de l'analyse mathématique, en éliminant petit à petit, par exemple, les grandeurs infinies dans les définitions de limites. Ce programme réussit enfin à construire toute la mathématique de l'époque, sur une théorie des nombres naturels et des ensembles des nombres naturels, réduisant au fond le problème de la consistance de la mathématique à celle de la théorie, comme *l'arithmétique de PEANO* de second ordre.

Progressant davantage dans la tradition des recherches fondationnelles, HILBERT n'a pas tenu à l'évidence la possibilité de réduire la théorie des nombres naturels. En clair, il convient de réduire la notion de nombre à celle d'ensemble telle que proposée par le logicisme de FREGE et de RUSSELL. Pour HILBERT, cela paraitrait un pas allant dans une mauvaise direction. Autrement dit, cela serait un essai de réduction de quelque chose de relativement simple, à quelque chose ayant une idée moins claire. Tel est, par exemple, le cas des antinomies de la théorie des ensembles. Il faut en plus se dire que la théorie des nombres naturels contient encore un appel à l'infini ; en particulier en utilisant la loi du tiers exclu, et cela lorsqu'on quantifie sur tous les nombres naturels. Le programme formaliste de HILBERT se préoccupait de justifier pareil type de raisonnement dans une perspective restreignant la mathématique finitaire, qui s'intéresse aux configurations finies et aux opérations constructives sur elle, est acceptée comme théorie formelle vraie. Pour HILBERT, il y avait lieu de montrer par raisonnement finitaire que l'utilisation de la mathématique transfinie établissant les résultats qui se traduisent déjà dans la mathématique finitaire, donne des résultats corrects d'un point de vue finitaire. Donc, la théorie de la démonstration se présente comme un outil pour le programme hilbertien.

Etant donné qu'on ne trouve pas de modèle finitaire de l'arithmétique de PEANO, il faudrait, d'un point de vue finitaire, pouvoir prouver la vérité de toutes les formules ayant un contenu finitaire et étant prouvables dans la version formalisée de l'arithmétique de PEANO. Une telle démarche nous invite fondamentalement à démontrer la consistance du système formel, qui résulte de la détermination prise par HILBERT à construire des formules à contenu finitaire.

En cela, le formalisme hilbertien ne justifie pas que la mathématique est un simple jeu ayant des formules sans contenu.

Des questions cernant le programme formaliste hilbertien sur la vérité et la fausseté, se situent dans la partie du système formel correspondant à la mathématique finitaire. D'un point de vue formaliste, on ne retient que les formules qui n'expriment pas de propositions finitaires. Pour HILBERT, ces formules sont ajoutées comme éléments *idéaux* permettant une manipulation plus aisée et dont le contenu réel s'exprime dans sa partie finitaire ou partie *réelle* d'après HILBERT.

Par rapport à l'intuitionnisme mathématique, il faut remarquer que HILBERT a adopté à certains égards une position philosophique plus radicale. Evidemment, cette radicalité montre d'une part que la mathématique finitaire restreint l'approche de la mathématique classique. Cette restriction dépasse largement la restriction que l'intuitionnisme mathématique a proposée. D'autre part, pour HILBERT, il y aurait lieu de conserver, comme éléments idéaux, des parties de la mathématique classique (loi du tiers exclu ou principe de la preuve indirecte) qui, dans leurs formes non restreintes, sont rejetées par les intuitionnistes. HILBERT s'opposait donc à l'idée de revoir la mathématique dans un développement constructif aussi loin que possible.

Quant à la logique interne, il sied de noter que ce n'est pas une logique ordinaire ni une logique formelle jouant tout rôle, c'est-à-dire ce qui prouve les théorèmes dans une théorie mathématique donnée, est seulement auxiliaire. Mais la logique interne, souvent identifiée à la métamathématique interne, devrait être considérée comme une « intramathématique » dans le sens que la consistance interne des axiomes est plus importante que la déduction des théorèmes particuliers [1].

D'après Y. GAUTHIER, la théorie de la démonstration est perçue comme la théorie des systèmes formels ; c'est donc la véritable incarnation du formalisme. De ce point de vue, la logique interne est l'opposé du formalisme. Le programme formaliste de HILBERT a pu se formuler dans les termes suivants : la logique interne finitaire vise à réduire la logique formelle infinitaire de la même manière qu'une théorie mathématique finitaire (par exemple l'arithmétique) réduit les problèmes infinis de la théorie des formes ou de la théorie des invariants à un calcul fini [1].

Du point de vue philosophique, le programme formaliste hilbertien est défaillant ; en ce sens que la marque de ce formalisme laisse certaines formules sans interprétation, comme éléments idéaux. D'après PRAWITZ, il est clair qu'en pratique, c'est-à-dire dans les tentatives d'exécution dudit programme, HILBERT lui – même et la plupart de ses successeurs, ont essayé de donner à chaque formule démontrable, une interprétation constructive pouvant dépendre de la démonstration ; mais ces interprétations ont toujours semblé plus *ad hoc* que les interprétations intuitionnistes correspondantes.

LE DEUXIÈME PROBLÈME DE HILBERT

La quête hilbertienne des fondements des mathématiques débute dans les années 1898-1899 en revisitant systématiquement la géométrie euclidienne[1]. En ce moment, il fallait à la fois étudier les relations de dépendance à établir

[1] *La géométrie euclidienne sert de modèle de rigueur pour les mathématiques par la clarté de ses conclusions et la sévérité de ses méthodes d'approche. La géométrie euclidienne de R^n est l'étude des propriétés métriques des figures de R^n (mesure d'un angle, longueur, aire). Elle vérifie le 5^e^ postulat d'Euclide : Par chaque point x non situé sur une droite d passe une et seule droite parallèle à d dans le plan formé par d et x. La découverte par LOBATCHEVSKI (1829) et BOLYAI (1831) des géométries ne satisfaisant plus ce 5^e^ postulat fut une révolution dans la géométrie.*

entre les axiomes et analyser les conséquences de l'abandon ou de la modification d'un ou de plusieurs de ces axiomes pour examiner les géométries pouvant en découler.

1 LA SYSTÉMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Dans le cadre des fondements des mathématiques, on retient précisément le point relatif à la modification des axiomes : comment s'assurer que l'ensemble d'axiomes résultant de ces modifications est non contradictoire, et qui définit ainsi une géométrie. Donc, il faut trouver une structure mathématique (pré existante) qui rend les axiomes vrais.

D'où, la preuve de l' »existence » des géométries non euclidiennes pour interpréter les notions de point et de droite, de manière non conventionnelle dans les structures qui ne concernent pas le plan euclidien.[2]

Les géométries non euclidiennes sont sorties en modifiant le cinquième postulat d'EUCLIDE [2]. Par la géométrie riemanienne, le postulat subit la modification suivante : Pour tout point, P, extérieur à une droite, passe une et une seule droite parallèle à d. Dans la géométrie sphérique, le cinquième postulat contraint la modification suivante : au lieu qu'il y ait une et une seule droite passant par P et parallèle à cette droite, il n'y a aucune ; ceci représente un modèle très simple : la géométrie sphérique. On pose S la surface d'une certaine sphère et les points de la géométrie sont interprétés comme les points, de la sphère et les droites, les géodésiques de la sphère. Dans ce sens, on peut prouver que les axiomes de la géométrie sphérique sont vrais. Donc, on y montre que : 1) l'ensemble des axiomes de la géométrie sphérique est non contradictoire, et 2) le postulat des parallèles n'est pas dépendant des autres axiomes.

Les résultats mathématiques 1) et 2) dépendent de l'existence préalable de la sphère, ce n'est pas une hypothèse. Il se dégage que la sphère se définit en fonction des nombres réels et le nombre réel est un ensemble de rationnels ; et le nombre rationnel est défini par une relation d'équivalence sur les entiers. D'où, le support final du modèle est l'arithmétique ayant la quantification de premier et de deuxième ordre.

Pour assurer l'existence de la géométrie sphérique (et bien d'autres modèles d'ailleurs), il faut donc seulement prouver que l'arithmétique (du premier et du deuxième ordre) est dénuée de contradictions.

Un exemple en est la géométrie hyperbolique ; le plan hyperbolique peut se définir comme suit : les points sont les points intérieurs d'un disque plein de centre 0 et bordé par un cercle ; les droites sont les droites passant par 0 et les cercles orthogonaux au cercle. Rajoutant au plan réel usuel un point à l'infini, dans chaque direction, on obtient un espace appelé le plan projectif réel : deux droites distinctes ont toujours un point en commun. Plus généralement, une géométrie plane projective consiste en la donné de 2 ensembles P et Q et d'un sous-ensemble T de P x Q. Les éléments de P sont appelés points, les éléments de Q droites. Le point x est dit assujetti aux trois conditions suivantes : 1) Par 2 points différents passe une et une seule droite ; 2) Toute droite a au moins 3 points ; 3) Deux droites distinctes se coupent en un seul point.

[2]*En géométrie, c'était en vain qu'on cherchait depuis les grecs de dériver le 5ème postulat (axiome) d'EUCLIDE, dit « postulat des parallèles », des autres axiomes. Pour cela, il y avait souvent des tentatives de prouver ce postulat à partir des autres, ce fait l'aurait transformé en un simple théorème. Mais on assistait au 19ème siècle à une révolution dans la géométrie s'exprimant en termes de crise du fondement des mathématiques créant ainsi les géomètres non euclidiennes. En 1820, GAUSS, parrain de la révolution en géométrie, a développé le plus profondément la théorie des surfaces en introduisant notamment la courbure totale d'une surface en un point. Devant cette question pressante sur le 5ème postulat, GAUSS dit alors que : « Pour la théorie des parallèles, nous ne sommes pas plus avancés qu'EUCLIDE, c'est une honte pour les mathématiques ». LOBATCHEVSKI (1829) et BOLYAI (1859) inventaient de nouvelles géométries avec des axiomes différents et incompatibles entre eux. Dans la géométrie de RIEMANN, par exemple, le plan devient la surface d'une sphère, les points sur le plan deviennent les points sur cette surface et les droites des grands cercles.*

Deux segments si on les prolonge se rencontrent. Pour l'opinion courante en pensai que les axiomes de la géométrie pouvaient s'établir par l'apparente évidence qui les caractérisait et elle perdait donc tout fondement les justifiant théoriquement. On déduisait de cela que les « assertions » (axiomes) étant vraies dans notre espace elles étaient donc consistantes. Dans la vérification de la véracité du 5ème postulat on trouve dans n'importe quel espace la relation

$\int k(s)\, ds = \alpha + \beta + \delta - \pi$ *où k est la courbure*

- *La géométrie sphérique k(s) > 0*
- *La géométrie hyperbolique : k(s) < 0*
- *La géométrie plane : k(s) = 0*

Notons que les mathématiciens ont utilisé la topologie pour faire la géométrie et cela en décrivant les espaces plus compliqués. Ainsi, on a la géométrie sur les variétés ; les variétés topologiques et les variétés différentielles constituent la géométrie différentielle.

D'une manière concrète, une preuve de cohérence relative est une preuve ressemblant au modèle de la géométrie sphérique. Elle ne nous est d'aucun secours, puisqu'une telle preuve dépendait au fond de l'arithmétique, afin de construire un modèle de l'arithmétique. Pour assurer la consistance de l'arithmétique, il faut disposer d'une preuve absolue de non contradiction. HILBERT avait donc recours à une telle preuve pour consolider les fondements des mathématiques. En 1900, le problème de grouper la cohérence des axiomes de l'arithmétique, se plaçait en deuxième position. En principe, HILBERT posait la résolubilité de tout problème mathématique, lequel problème est susceptible d'une solution définitive [3].

La géométrie absolue est le fragment de la géométrie élémentaire qui est amputée de l'axiome dit des parallèles. En fait, suite à cette amputation, la géométrie absolue est syntaxiquement incomplète. Ce qui veut donc dire que la proposition relative aux parallèles, devient *indécidable* et elle emmène, à sa suite, les propositions ne pouvant pas se passer d'elles pour recevoir une démonstration.

Evidemment, en partant de la géométrie absolue, comme étant un fragment de la géométrie élémentaire, il y a lieu d'affirmer que la géométrie absolue constitue le socle potentiellement commun à deux géométries distinctes, l'une, euclidienne, qui accepte l'axiome des parallèles et l'autre, hyperbolique, qui le rejette. Mais, à l'inverse, on peut considérer ces deux géométries comme étant des extensions distinctes de la géométrie absolue. En géométrie plane hyperbolique, on pose que, par un point, P, extérieur à une droite, d, passe une infinité de parallèles à cette droite. La géométrie elliptique, par contre, adopte une troisième version de l'axiome des parallèles, à savoir : Par un point, P, extérieur à une droite, d, ne passe aucune parallèle à celle-ci. D'un point de vue critique et rigoureux, on peut dire que la géométrie elliptique n'est pas une extension de la géométrie absolue.

La raison fondamentale est que certains axiomes ne sont pas communs aux deux autres systèmes géométriques. En clair, en géométrie elliptique, on démontre que la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droites. D'où, il est exclu de penser à une extension de la géométrie absolue. En présence de matière, la géométrie d'Euclide ne convient pas et on la remplace d'ordinaire par une variante de type elliptique.

2 La géométrie étendue de HILBERT

Pour HILBERT, la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit comme suit :

« Nous pensons trois sortes de choses ; nous nommons les choses du système des ***points*** ; nous les désignons par des lettres majuscules A, B, C,…, nous nommons ***droites*** les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a,b,c,…, nous appelons ***plans*** les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs α,β, γ» [4].

Ainsi, renchérit- il, « entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur », « entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie [4].

Du point de vue du raisonnement, c'est le postulat des parallèles qui assure la distinction entre la sphère et le plan et cela sous réserve que le plan soit euclidien.

EUCLIDE affirme que « Par un point non situé sur une droite, on peut mener une droite parallèle et une seule à cette droite ». Mais, pour BKOUCHE, le problème résidait moins dans la vérité du postulat des parallèles que dans celle de la preuve à apporter d'une proposition vraie et non évidente; vraie au vu de ses résultats, car c'est le postulat des parallèles qui fonde la méthode des aires et la théorie des propositions géométriques; vraie aussi parce que ce postulat est lié à l'existence de cette figure première de la géométrie élémentaire qu'est le rectangle [5].

La géométrie élémentaire de TARSKI constitue un fragment d'une géométrie étendue exprimée dans le langage le plus puissant de la théorie des ensembles. Le prix occasionné par le pouvoir étendu est la perte de décidabilité. Pour ce faire, il faut donc envisager une métrique adaptée pour la traduction analytique de la géométrie étendue. Quant au modèle euclidien, on a la métrique :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tandis que, pour le modèle hyperbolique, la métrique est

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

Ici, on retient que toute « droite » du modèle hyperbolique respecte l'axiome exigeant le prolongement indéfini dans ses deux directions.

Ainsi, le « segment de droite » joignant deux points, (x_1, y_1) et (x_2, y_2), se définit comme étant le plus court chemin entre ces points. La métrique étant adaptée, on peut minimiser l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx = \int_1^2 f(y,\dot{y},x)\ dx\,.$$

On passe en effet par la résolution de l'équation d'EULER associée pour résoudre ce genre de problème.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{d\dot{y}} = 0 \;\rightarrow\; (x-x_c)^2 + y^2 = R^2,$$

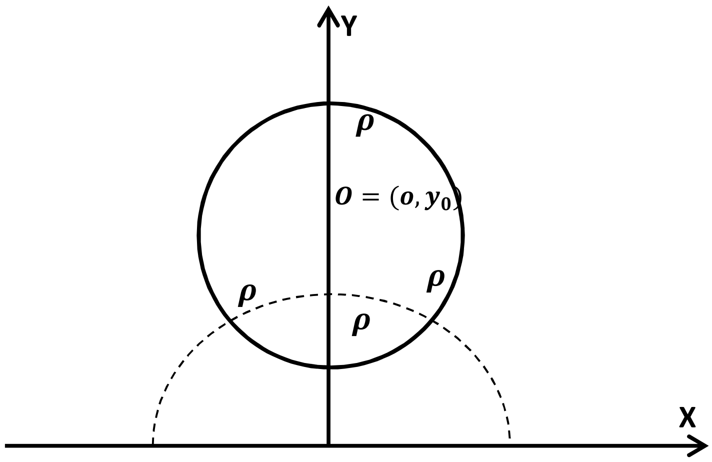
qui représente un arc de demi-cercle centré sur la frontière et qui passe par les deux points.

L'abscisse du centre et le rayon sont indiqués respectivement par

$$x_c = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2\,(x_1 - x_2)}$$

$$R = \frac{1}{2|x_1-x_2|}\sqrt{[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2][(x_1-x_2)^2 + (y_1+y_2)^2]}$$

Il se dégage que les « cercles » ont l'aspect d'un cercle euclidien, mais au fond, ils sont décentrés pour se conformer à la métrique particulière à cette géométrie.



Notons que le « cercle » « centré » sur 0 et de rayon ρ a pour équation,

$x^2 + y^2 - 2yy_0\ ch\rho + y_0^2 = 0$. Donc, il est possible de vérifier que dans la métrique imposée, on retrouve que chaque « rayon » qui émane de 0 à une longueur constante, P.Par calcul sur les deux « rayons » rectilignes, on obtient :

$$\int_{y_0}^{y_0^{e^{\rho}}} \frac{dy}{y} = \int_{y_0^{e^{-\rho}}}^{y_0} \frac{dy}{y} = \rho,$$

et la longueur de la circonférence est :

$$2\int_{y_0^{e^{-\rho}}}^{y_0^{e^{\rho}}} \frac{dy}{y}\sqrt{1+(dx/dy)^2} = 2\pi \sin h\,(\rho)\,;$$

et ce, en la convertissant dans la version euclidienne.

La surface du cercle est finalement donnée par l'intégrale :

$$\iint \frac{dsdy}{y^2} = 2\pi\,(ch\rho - 1).$$

Remarquons tout de suite que la métrique associée au modèle hyperbolique à un cercle ouvert, exige logiquement une métrique un peu différente valant :

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Mais, en changeant simplement de variable, on se place dans un modèle du demi-plan de POINCARE, ce qui montre, de toute violence, que ce sont des interprétations isomorphes.

3 RAPPORT ENTRE CONSISTANCE ET EXISTENCE

Sur le deuxième problème, HILBERT s'évertue à trouver une preuve de la consistance (de la non – contradiction) des axiomes de l'arithmétique.

Selon lui, les axiomes portent sur l'arithmétique des nombres réels. Il s'agit des axiomes de corps, les axiomes d'ordre, l'axiome d'ARCHIMEDE et un axiome assez étrange exigeant l'élargissement du domaine.

A partir des années 1920, on avait perçu ce problème en l'appliquant d'abord à l'arithmétique des entiers naturels et aux axiomes de PEANO. Ce problème, une fois résolu, pour cette arithmétique là, on passerait aux nombres réels et à l'analyse.

Le problème de la consistance de l'arithmétique est posé prioritairement. On dirait qu'en prouvant la consistance de l'arithmétique, on franchirait un pas décisif dans la preuve de toutes les mathématiques.

Pour HILBERT, affirmer que les mathématiques sont vraies, est équivalent à prouver leur consistance. D'où, il faut seulement prouver la consistance des mathématiques pour pouvoir affirmer l'existence des objets auxquelles elles font allusion. Autrement dit, *consistance* signifie *existence*. Une telle idée est parfois enseignée par POINCARE.

HILBERT n'est pas de ceux-là qui soutiennent une preuve de consistance *relative,* qui s'obtient en interprétant, dans une autre théorie mathématique, la consistance en rapport avec notre croyance. Mais pour ce qui regarde particulièrement l'arithmétique, qui est à la base même, il faut trouver une preuve *directe*.

On sait que pour prouver que toutes les formules, parmi les théorèmes de l'arithmétique, ont une certaine propriété, on doit préciser que les axiomes la possèdent et que les règles de déduction, par lesquelles les théorèmes s'obtiennent à partir des axiomes, préservent à cet effet, cette propriété [6].

Pour une preuve de la consistance, la formule n'est pas de la forme $1 = 0$. Si l'on prouvait une contradiction, alors toutes les formules seraient des théorèmes. Dans ce cas, on aurait $1 = 0$ aussi. Au cas où $1 = 0$ était un théorème, alors on montrerait une contradiction, car $1 \neq 0$. Cela signifie qu'on aurait $non\ 1 = 0$, est aussi un théorème.

Evidemment, ce procédé exige que l'arithmétique soit formalisée. En d'autres termes, l'arithmétique doit se présenter comme un système formel. Pour cela, son langage doit être un ensemble décidable de formules, et ses théorèmes doivent être choisis parmi les formules qui présentent des ensembles décidables d'axiomes et de règles de déduction.

Etant donné les formules, les axiomes et les règles de déduction constituent des ensembles décidables, on peut aussi dire que l'ensemble des preuves est, dans ce cas, décidable lui également. Dans un système formel quelconque, par contre, l'ensemble des théorèmes n'est pas nécessairement décidable. Du fait qu'un théorème est le dernier membre d'une suite de formules qui, au fond, est une formule pour laquelle on exhibe une preuve.

L'arithmétique de PEANO de premier ordre ou l'arithmétique de PEANO tout court, est le système formel le plus important lié à l'arithmétique.

Les points de vue de HILBERT sur les fondements des mathématiques avaient été marqués par l'assaut intuitionniste de L.BROUWER. En clair, HILBERT avait formulé son programme de recherche formaliste en parant à cet assaut. De là, il y eut eu avènement d'une nouvelle théorie mathématique appelée *théorie des preuves* ou encore *métamathématique*.

4 LE FINITISME HILBERTIEN

Le programme de KRONECKER d'une arithmétique générale a inspiré le programme finitiste de HILBERT. Il y a lieu de souligner que la pratique mathématique de KRONECKER a joué une influence déterminante sur l'option fondationnelle de HILBERT.

En fait, la métamathématique ou la théorie hilbertienne des systèmes formels est essentiellement d'origine arithmétique [7]. Autant le dire, la logique interne du discours mathématique est en effet l'arithmétique ; cela signifie qu'elle est assujettie aux modes d'inférence propres à l'arithmétique. Il est à noter que partant de KRONECKER, le constructivisme arithmétique a influencé un bon nombre des mathématiciens (BOREL, POINCARE et BROUWER) ainsi que le prolongement de l'arithmétique générale en algèbre abstraite chez STEINITS. GAUTHIER estime que la logique doit assurer le passage de l'arithmétique finie à l'arithmétique transfinie (et l'analyse) et la fonction du choix de la logique de HILBERT est mise au point aux fins de construire le fossé entre les deux arithmétiques.

Pour ce faire, les objets concrets qui sont destinés à remplacer les entiers dans la métamathématique de HILBERT sont simplement des symboles ; le système combinatoire fini qu'ils génèrent est l'homologue formel de l'arithmétique. A ce propos, il affirme qu' « au commencement est le symbole » Telle est la devise philosophique de HILBERT en 1922.

HILBERT qualifie de *finitiste* la partie des mathématiques dans laquelle on ne trouve que des propositions ne parlant pas de l'infini et cela s'explique intuitivement. Sur l'élimination de l'infini, notons que Karl WEIERSTRASS a éliminé les infinement petits et les infinement grands de l'analyse. De même, le programme de recherche formaliste de HILBERT se donnait pour but d'éliminer l'infini mathématique. D'une manière concrète, HILBERT se proposait de l'éliminer, en opérant, le reste de l'infini sur des suites infinies, ou en quantifiant sur tous les entiers naturels.

Il nous faut préciser qu' "éliminer l'infini, c'est une *fiction utile*". On doit accepter son usage mais on interdit de prouver qu'il ne faut pas le figurer. La perception sur l'élimination de l'infini ne consiste pas à rejeter les méthodes des mathématiques classiques qui paraissent le présupposer mais le justifier adéquatement.

Dans la perspective hilbertienne, la philosophie des mathématiques est une conciliation entre l'intuitionnisme et l'instrumentalisme (ou le formalisme). L'étude des fondements des mathématiques le conduit à diviser les mathématiques en deux groupes. Il s'agit notamment des mathématiques *réelles* procédant de notre intuition, et des mathématiques *idéelles* la dépassant.

En effet, la validité des mathématiques réelles n'est pas problématique, elle est donc immédiate par la nature même de notre faculté de représentation. Par contre, les mathématiques idéelles se rapportent aux objets qui vont au-delà des limites de notre intuition ; ce qui laisse comprendre que leur validité est loin d'être assurée.

Raison pour laquelle l'intuitionnisme de BROUWER interdit toute forme de méthode mathématique qui ne se rapporte pas à un objet d'intuition, quand bien même l'intuitionnisme proposé par HILBERT constitue un compromis. Cela signifie que les mathématiques idéelles peuvent être admises comme théorie mathématique, car elles n'introduisent pas de contradiction interne. Dons, elles sont intrinsèquement cohérentes.

HILBERT précise que le problème des objets réels et des objets idéaux en mathématiques est introduit par l'entremise de l'infini[3]. A ce propos, NEIL RENNEDY souligne que l'entreprise finitiste de HILBERT se construit sur base d'une théorie de l'esprit rappelant l'architecture de la raison de KANT. Citons-le : « KANT a déjà enseigné (…) que les mathématiques ont à leur disposition un contenu assuré indépendamment de toute logique et, par conséquent, qu'elles ne peuvent jamais être fondées par l'entremise de la logique seule (…). Plutôt, comme condition pour l'utilisation des inférences logiques et l'exécution des opérations logiques, quelque chose doit déjà être donnée à notre faculté de représentation, des objets extralogiques concrets qui sont présents intuitivement comme une expérience immédiate précédant toute forme de pensée [8] ».

Il renchérit en disant que « si une inférence logique est pour être fiable, il doit être possible d'analyser exhaustivement ces objets dans toutes leurs parties, et le fait qu'ils se produisent, qu'ils diffèrent l'un de l'autre, et qu'ils se suivent l'un l'autre, ou qu'ils soient concaténés, est immédiatement donné intuitivement, de la même manière que les objets, comme quelque chose qui ne peut être réduit à autre chose et qui ne nécessite aucune réduction (…) ». En mathématiques, en particulier, ce que nous considérons sont les signes concrets eux – mêmes dont la forme, selon la conception que nous avons adoptée, est immédiatement claire et reconnaissable [8].

Evidemment, il convient de noter que la philosophie hilbertienne des mathématiques est construite sur l'idée d'un contenu intuitif (*inhaltlich*) donnant à l'entendement des objets et des lois *a priori*. Toutefois, il est à remarquer que le contenu intuitif n'est pas suffisant à explorer toutes les mathématiques, mais il concerne seulement une portion limitée,

[3] *Comme nous l'avons dit, les mathématiques font appel à deux sortes d'infini : l'infini actuel et l'infini potentiel.*

c'est-à-dire l'arithmétique finitiste ou « contentuelle ». En effet, on construit les propriétés finilistes à partir d'observations ou de saisies immédiates d'un nombre. Pour HILBERT donc, le nombre est de façon informelle une suite quelconque de « 1 ». Cela est un code dans sa terminologie qui exprime un terme dans la suite

1,11,111,1111,11111,…

Ces termes abrégés traduisent et s'emploient couramment, par exemple : « 2 » pour « 11 », « 3 » pour « 111 », « 4 » pour « 1111 ».

De cette perception intuitive (*a priori*), il en résulte qu'on peut définir les prédicats et les opérations fondamentales sur lesquelles est fondée l'arithmétique. On définit, par exemple, le prédicat d'égalité comme l'identité entre deux suites, le prédicat $a < b$ est le fait que le nombre b est un segment initial propre du nombre a.

En clair, la loi de la trichotomie est donc valide :

- une et une seule des trois possibilités est toujours le cas,
- l'addition de deux nombres a et b est la concaténation de la suite de « 1 » de a et de celle de b.

Par conséquent, il y a lieu d'affirmer que 2+3=3+2 ; en ce sens, le fait d'ajouter trois fois un « 1 » au nombre 2 indique le même nombre que le nombre 3 augmenté de deux « 1 ».D'une manière générale, l'utilisation de l'induction intuitive permet de prouver que l'addition est commutative, $n + m = m + n$, et associative, $(l + m) + n = l + (m + n)$.

L'arithmétique finitiste procède directement de notre intuition et de la construction des nombres. C'est une arithmétique irréductible qui ne nécessite de toute manière aucune réduction. Elle est donc limitée. Aussi remarquons – nous qu'il manque à cette arithmétique d'importants contingents de la mathématique : tout ce qui est relatif à l'infini actuel. HILBERT indique que parmi les concepts cardinaux touchant à l'infini, il y a les notions de quantification existentielle et universelle ainsi que la loi du tiers exclu ; parmi les objets infinis en mathématiques, il y a les ensembles de tous ordres et en particulier tous les systèmes de nombres (actualisés).

Les raisonnements sur les preuves mathématiques constituent une métamathématique. En effet, la métamathématique, précise CASSOU NOGUES, doit fournir une justification théorique à la mathématique. Cela veut dire qu'il faut établir, à l'aide de raisonnements finitistes qui, possédant une évidence propre, ne doivent pas être justifiés, que les raisonnements mathématiques s'effectuent sans contradiction.

Au fond, pour le programme formaliste, l'infini est quelque chose de purement apparent utilisé en mathématiques sans ne lui reconnaître aucune réalité.

Dans son article de 1926 ''Sur l'infini'', HILBERT pose comme un dilemme, qui reste à démontrer, la résolubilité finitiste des problèmes arithmétiques, c'est-à-dire une formule ''tout entier vérifie P'', P étant une propriété arithmétique, peut être ou démontrée ou réfutée par la donnée d'un contre-exemple. Du point de vue technique, il est question, à ce stade, de l'élimination de la fonction ε.

HILBERT établit « une distinction entre une mathématique finitiste dont les raisonnements possèdent une évidence propre mais sont soumis à des restrictions, et une mathématique formelle, qui consiste en manipulations symboliques selon des règles convenues » [3]. La question est de démontrer la consistance des théories formelles.

Du point de vue finitiste, HILBERT et BERNAYS définissent clairement les quantificateurs comme suit :

« *Un jugement universel* sur les codes (les nombres) ne peut être interprété de façon finitiste que dans un sens hypothétique, c'est-à-dire, comme un énoncé sur n'importe quel code donné ; un tel jugement exprime une loi qui doit se vérifier dans chaque cas isolé qui se présente.

Un théorème d'existence sur des codes, donc un théorème de la forme « il existe un code *n* ayant la propriété A(*n*) », se conçoit de manière finitiste comme un jugement partiel (…) qui se compose soit de la donnée directe d'un code ayant la propriété A(*n*), soit de la donnée d'un procédé pour la production d'un tel code [.] » [9].

On identifie la notion de vérité à un calcul ou à une vérification. Autrement dit, la proposition : p est vrai ↔ $p$est vérifiée. Mais, du fait que l'intellect finitiste ne peut exécuter qu'un nombre fini d'opérations dans une vérification, il ne peut donc pas vérifier un énoncé du genre :s « A(*n*) est vrai pour tout n ». Il en résulte qu'on ne peut pas affirmer sa vérité. Quant au sort du tiers exclu, il est intimement relié à celui des propositions universelles et existentielles. Si « être vrai » c'est « être vérifié », on ne peut plus admettre pour vraie une loi qui s'énoncerait comme :

Pour tout nombre $n, A(n) ou \neg A(n)$ est vérifié.

Puisque cela laisserait entendre que l'intellect mathématique a profondément examiné un ensemble infini des propositions, à savoir $A(0), A(1), A(2), \dots\ et\ \neg A(0), \neg A(1), \neg A(2), \dots$ Cet état des choses contraint HILBERT et BERNAYS à s'adhérer aux conclusions de BROUWER sur la validité du principe du tiers exclu à telle enseigne qu'ils affirment que "du point de vue finitiste, cette non – validité existe en fait, dans la mesure où on ne réussit pas à y trouver, pour le jugement existentiel aussi bien que pour l'universel, une négation du contenu [*inhalt*] finitiste satisfaisant au principe du tiers exclu" [9].

En fait, pour Y. GAUTHIER, « le finitisme hilbertien évacue les objets idéaux, tandis que l'intuitionnisme récuse le tiers exclu, les méthodes de preuve indirecte et les totalités infinies » [14].

5 HILBERT ET LES COURANTS DE PENSÉE MATHÉMATIQUE

Pour HILBERT, la vérité en mathématiques est la même chose que la consistance (ou la cohérence). En rapport avec la philosophie des mathématiques [15], le programme de recherche de HILBERT amène DOSEN à poser deux questions centrales sur l'interprétation du langage mathématique ; le langage mathématique décrit quelque chose :

La première question se formule comme : « Est – ce que le langage mathématique se rapporte à une réalité extérieure à lui, est – ce qu'il décrit quelque chose ? ».

Répondre par "non", on est en présence du *formalisme pur*. En effet, un formaliste pur ne voit dans les mathématiques qu'un langage, que l'on manie selon les règles de syntaxe (Haskell CURRY et le cercle devienne).

Il en résulte que POINCARE, BOURBAKI et HILBERT lui – même sont réputés formalistes à un certain point. Pour un formaliste pur, il ne faut pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies, mais si elles sont *utiles* ou *belles*.

Répondre par "oui", la question se reformule comme suit : "est – ce que ces choses décrites par le langage mathématique sont indépendantes de l'homme ?".

Répondre par "non" à la question principale : les choses décrites par le langage mathématique ont été créées par l'homme, que ce sont donc les constructions de l'intelligence humaine.

Puisqu'on trouve normal de supposer que l'homme ne peut pas créer des choses infinies. Pour cela, on conçoit que l'infini mathématique peut être seulement potentiel. En effet, cette doctrine est appelée *constructivisme*. Ainsi se réclament de cette pensée les intuitionnistes à la suite de BROUWER, mais aussi des écoles ayant voulu limiter les moyens mathématiques classiques.

DOSEN précise, à ce sujet, ce qui suit : "les mathématiques classiques – qui se servent librement du principe logique du tiers exclu et parlent de l'infini comme s'il était actuel, et non seulement potentiel, ne sont devenues prépondérantes que vers la fin du 19ème siècle, par les soins de HILBERT entre autres". Des positions constructivistes sont soutenues par POINCARE aussi. Pour un constructivisme, il ne faut pas se demander si les propositions mathématiques sont vraies, mais si elles sont *prouvables*.

Répondre par "oui", c'est-à-dire les choses qui sont décrites par le langage mathématique n'ont pas été créées par l'homme ; ce n'est donc pas une réalité construite par l'intelligence humaine, mais une réalité qui se met seulement à appréhender, en le faisant passablement bien et si on considère davantage que l'infini mathématique est actuel, alors, dans ce cas, on a le *platonisme* appelé parfois le *réalisme*. Ainsi, le défenseur les plus connu de cette pensée est GÖDEL.[4] Ici, on ne trouve pas une école du genre de constructivisme et d'intuitionnisme. Car la plupart de logiciens, tout comme la grande majorité des mathématiciens, sont des platonistes.

Comme nous l'avons souligné, le logicisme est cette doctrine qui affirme que les mathématiques se réduisent à la logique et qui ne s'inscrit pas dans la compréhension de cette classification. L'histoire de la logique mathématique nous apprend que les logicistes FREGE et RUSSELL étaient des platonistes. Ce n'est pas étonnant d'imaginer un logicisme formaliste qui affirmerait que la logique est de la *syntaxe pure*.

---

[4] *GÖDEL précise son idée en ces termes : « la position platoniste est la seule qui soit tenable. Par là j'entends la position selon laquelle les mathématiques décrivent une réalité non sensible qui existe indépendamment aussi bien des actes que des dispositions de l'esprit humain et qui est seulement perçue et probablement perçue de façon très incomplète par l'esprit humain ».*

De tous ces points de vue, il faut dire que le formalisme de HILBERT se situe dans l'approximité entre le formalisme pur et le constructivisme, et cela en se mettant d'accord avec le platonisme et en acceptant les méthodes abordées en mathématiques classiques.

Au fond, il nous revient d'affirmer ce qui suit :

L'infini se déguise [13]

Que veut dire par exemple

$1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} + {}^{1}/_{8} + {}^{1}/_{16} \cdots$?

Plus on ajoute de termes plus la somme s'approche de 2. Donc cette somme qui est étendue à l'infinité des termes vaut exactement ! Et que vaut par exemple la série :

1 - 1 + 1 - 1 + 1- 1+… ?

Si on écrit :

(1-1) + (1-1) +(1-1) +….

Il est évident que la somme est nulle. En écrivant cette série comme suit :

1- (1-1) - (1-1) - …

On se rend compte que la somme est 1. Donc 1 = 0 ! Dans ce cas, toutes les mathématiques s'effondrent, détruites par cette contradiction.

On tente de résoudre ces difficultés de détail ou ces problèmes philosophiques en remplaçant les affirmations en rapport avec les sommes infinies par d'autres qui sont plus compliqués mais qui ne concernent que des sommes finies. En termes clairs, au lieu de dire que la somme infinie : $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ est égale à a, on va plutôt dire que la différence entre la somme finie $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et le nombre a est supérieur à un certain entier ℕ dépendant de ε. Si, en effet, il y a une quantité a qui remplit la condition que la série est dite convergente et que la somme possède un sens.

6 LE CALCUL EPSILON

L'Epsilon constitue un thème central dans le programme fondationnel de HILBERT. Les quantificateurs contentuels ne s'accommodent pas à toute la généralité que possèdent les quantificateurs de la théorie mathématique ordinaire. C'est ce qui explique qu'on ne peut pas déduire à partir des définitions respectives que $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ devrait être valide ou que $\exists(x)\neg A(x)$ pourrait découler de $\neg\forall x A(x)$.

Somme toute, l'arithmétique contentuelle n'assume pas la version transfinie du principe du tiers exclu. De là, il en résulte que les quantificateurs existentiel et universel pris dans leurs significations respectives, créent des éléments idéels, et la métamathématique aura à prouver pareilles conditions qui ne conduisent à aucune contradiction.

D'une manière concrète, HILBERT étend le calcul des prédicats au calcul Epsilon. Pour lui, l'introduction du symbole ε était motivée par le désir d'assurer le passage de l'arithmétique finitaire aux éléments idéaux à l'aide de la logique, alors que l'élimination du même symbole ε reprenait la méthode Kroneckerienne de l'élimination des "indéterminés".

Le concept d'association des indéterminés permet l'extension du domaine de l'arithmétique qui conserve les déterminations conceptuelles de l'arithmétique. Pourtant, l'extension conservatrice permet à HILBERT d'introduire le symbole ε.

Donc, il a ajouté une expression au calcul des prédicats aux fins d'unifier le traitement des axiomes qui portent sur les quantificateurs universels et existentiels. Il s'agit là des axiomes transfinis. L'axiome premier du symbole ε est la formule

$$A(x) \to A\big(\varepsilon_x A(x)\big).$$

Où $\varepsilon_x A(x)$ est à interpréter comme étant une fonction logique de choix transfinie associant un objet à chaque prédicat (ou un nombre à chaque fonction). L'opération ε est une généralisation de l'opérateur de description définie de RUSSELL et WHITEHEAD et que HILBERT définit comme suit :

$$(E_x)\big(A(x) \wedge (y)(A(y) \to x = y)\big) \to A\big(\varepsilon_x A(x)\big),$$

où $A(x)$ est l'unique élément qui satisfait $A(x)$, évidemment s'il existe. Pour RUSSELL, l'opérateur se réduit aux quantificateurs existentiel et universel

$(\forall x)A(x) \equiv A(\varepsilon_x \neg A(x))$, tandis que HILBERT fait juste le contraire ε, c'est-à-dire il réduit les quantificateurs à des expressions qui contiennent le symbole ε. Ainsi, le quantificateur existentiel se définit par :

$$(\exists x)A(x) \equiv A(\varepsilon_x A(x))$$

Quant à eux :

l'axiome aristotélicien par:

$$(\forall x)A(x) \rightarrow A(x)$$

et le principe du tiers exclu par :

$$\neg(Ax)A(x) \rightarrow (\exists x)$$

qui constituent le cadre axiomatique pour le symbole ε.

La fonction de choix étant transfinie, la finitude de la procédure de choix, d'après HILBERT, était assurée par son itération finie ; ce qui permet de garantir le passage consistant de l'arithmétique à l'analyse et à la logique qui est un moyen auxiliaire ou un détour au moyen d'éléments idéaux. Mais un chemin de retour est l'arithmétisation de la logique qui montre l'arithmétisation ou la formalisation finitaire des systèmes formels. Pour Y.GAUTHIER, ceci constitue tout le programme métamathématique de la théorie des preuves [7].

Les éléments idéels servent à faciliter la preuve de théorèmes de la mathématique finitiste réelle. HILBERT estime en effet qu'ils devraient être éliminables de la preuve d'un théorème ne faisant pas intervenir le symbole εdans ses hypothèses ou sa conclusion. D'où, on obtient le premier théorème epsilon, il s'énonce comme suit [10] :

(ε_1) Si $F\ et\ A_1, \dots A_n$ sont des formules ne contenant pas le symbole ε et si F est déductible de $A_1, \dots A_n$ dans le calcul epsilon, alors il existe une preuve de F à partir de $A_1, \dots A_n$ dans le calcul des prédicats sans quantificateurs (sans symboles).

On peut en effet clarifier ici une preuve de la consistance pour une théorie arithmétique dont les axiomes ne comprennent pas de variables liées. Elle se définit par les axiomes suivants :

- $(=_1) x = x$
- $(=_2) x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$
- $(<_1) \neg x < x$
- $(<_2)(x < y \wedge y < z) \rightarrow x <$z
- $(<_3) x < x'$
- $(P_1) x' \neq 0$
- $(P_2) x' = y' \rightarrow x = y$

Soit (S), ce système d'axiomes. Le métathéorème est formulé comme suit : une formule numérique déductible des axiomes de (S) dans le calcul epsilon est forcément vraie.

Pour HILBERT et BERNAYS [10], la démonstration de ce métathéorème résulte du premier théorème epsilon et de deux remarques métathéoriques, à savoir :

1) Une démonstration d'une formule numérique, c'est-à-dire une formule ne contenant ni variable libre ni variable liée, n'utilisant que le calcul des prédicats sans quantificateurs, et qui peut se transformer en une démonstration ne contenant aucune variable libre, et où, chacune des formules initiales est soit une substitution des axiomes de la théorie arithmétique (S), soit une instance numérique d'une anthologie du calcul propositionnel.
2) Toute formule numérique qui s'obtient par substitution d'une tautologie est vraie ; de même toute formule numérique, qui résulte des axiomes de la théorie arithmétique (S), et si $A\ et\ A \rightarrow B$ sont vraies alors B l'est aussi.

Le procédé de la démonstration de la consistance se fait comme suit : si F est une formule numérique déduite dans le calcul ε à partir des axiomes arithmétique, $(\varepsilon 1)$ affirme qu'il existe une démonstration de F dans le calcul des prédicats et cela sans quantificateurs.

En effet, HILBERT et BERNAYS soulignent que la première remarque de la démonstration indique que la démonstration peut se transformer davantage en une démonstration ne contenant que des formules numériques et possédant comme formules initiales, des instances numériques d'axiomes ou de tautologies en rapport avec les propositions.

Par la seconde remarque, ils estiment que toutes les formules initiales de la démonstration vraies, et toutes les conséquences découlant des formules qui s'obtiennent par *modus ponens* le sont aussi. Pourtant les formules de la démonstration sont en effet toutes numériques. Il en résulte que la seule règle applicable dans celle – ci est le *modus ponens*. Et dès lors on peut d'affirmer que toutes les formules de la démonstration sont vraies et, en particulier, la formule F l'est également.

Mais il est à remarquer que la théorie arithmétique définie par les axiomes $=_1, =_2, <_1, <_2, <_3, P_1\ et\ P_2$ n'a pas de principe d'induction ; c'est donc un fragment très faible de l'arithmétique ordinaire.

Pour Y.GAUTHIER, il faut deux théorèmes sur l'élimination des "formules critiques" pour l'introduction du symbole ε.

Elles ont la forme

$$A(t) \rightarrow A\big(\varepsilon_r A(r)\big)$$

Pour un terme t et un terme ε_T. Pourtant, la procédure de résolution symbolique reprend exactement la décomposition des polynômes ; car les termes ε sont disposés suivant leur degré et leur rang. Les polynômes sont aussi ordonnés de cette même manière. D'où, on a la réduction à une forme disjonctive de termes sans symbole ε en tant qu'un polynôme linéaire par la substitution d'un terme t au terme ε_T [11].

Le second théorème ε, écrit GAUTHIER, applique la même méthode aux formules existentielles et à l'axiome d'égalité pour les formules $\varepsilon(x)$. Il s'agit ici du schéma d'induction créant ainsi des difficultés supplémentaires et exigeant alors une nouvelle formule critique.

$$A(t) \rightarrow \varepsilon_r A(r) \neq t$$

C'est au moyen de chiffres que s'effectuera la substitution et ce pour les termes ε. Dans ce cas, une forme du principe de descente infinie tiendra lieu de substitut à l'induction complète. Et GAUTHIER d'écrire : « Pour tout prédicat numérique P qui correspond à un nombre au moins, il existe un tel nombre auquel correspond le prédicat qui ne correspond pas au prédécesseur (différent de 0) de ce nombre » [11].

Au fond, c'est une conséquence du principe du plus petit nombre avec la fonction récursive μ.

$$A(x) \rightarrow \big(\mu_x A(x)\big)$$

Remarquons cependant que la procédure générale équivaut à la décomposition polynomiale en facteurs irréductibles. Cela signifie que ces facteurs ne peuvent pas se réduire à l'algorithme euclidien du plus grand diviseur commun qui est généralisé par la descente infinie pour les polynômes de degré n.

De toute façon, indique GAUTHIER, la démonstration de la consistance ne conduira qu'à trouver les formules réduites irréductibles [12].

En effet, il se passe que pour les théories logiques ouvertes, c'est-à-dire les théories logiques sans quantificateurs, le théorème de HILBERT – ACKERMANN suffit amplement. Mais, pour l'arithmétique, on a dû recourir à la preuve de GENTZEN ou celle de GÖDEL ou encore celle de ACKERMANN, utilisant la méthode d'élimination du symbole ε.

Il est opportun de souligner que la position finitiste est l'héritière du constructivisme arithmétique ou l'arithmétique générale de KRONECKER. Sur ce, pour GAUTHIER "l'introduction du symbole ε et de la logique formelle qu'on élimine ensuite pour revenir à la logique interne de l'arithmétique signifie à la fin que l'arithmétique finie est auto – consistante par *construction* en vertu de la finitude du procédé de décomposition polynomiale et de la méthode de descente finie" [12].

7 LE CONGRÈS DE BOLOGNE

En 1928, au congrès de Bologne, HILBERT s'interrogeait précisément sur trois questions essentielles, significatives du programme hilbertien et pouvant donc constituer sa philosophie formaliste. D'après cette philosophie, il faut analyser les mathématiques comme *une activité dépourvue de signification en elle – même, et réglée par des combinaisons de symboles* ; les mathématiques sont construites sur une axiomatique, c'est-à-dire, un système formel par les axiomes des règles de formation, des formules et des règles de déduction. Pour sa part, HILBERT estime pouvoir répondre positivement aux questions suivantes :

1°« Tout système formel peut – il être rendu syntaxiquement complet ? »

Cela signifie que toute formule peut y être démontrée ou réfutée, y-a-t-il lieu de prouver que tout énoncé peut être soit infirmé, soit uniforme ? un système est dit *syntaxiquement complet,* si toute proposition sensée, A,y est démontable ou réfutable. Autrement dit, quelque que soit A, il existe une proposition qui n'est ni démontrable ni réfutable dans ce système formel.

Donc, cette proposition est un *indécidable* du système formel. C'est pour dire que, syntaxiquement, l'incomplétude est en effet dépourvue d'originalité. HILBERT était convaincu de cela. La géométrie euclidienne, privée de l'axiome des parallèles, est ordinairement incomplète. Cela veut dire que sa démonstration est limitée à une trentaine des propositions, mais il faudrait seulement rétablir l'axiome manquant pour avoir un système formel qui redevient syntaxiquement complet.

On sait également que le système de la théorie des groupes est syntaxiquement incomplet. Cela signifie par exemple que la proposition, $aob = boa$, n'y est ni démontrable ni réfutable sur la base des axiomes admis. Donc, la proposition$aob = boa$, et sa négation, sont des indécidables de la théorie des groupes. Supposons qu'on ajoute l'axiome, $aob = boa$, à la théorie des groupes, on aura l'extension de la théorie des groupes commutatifs.

Le nouveau système ainsi créé contiendra encore des propositions indécidables du genre$a = b$. D'où, ce nouveau système reste et restera syntaxiquement incomplet. Cependant, il est complétable et cela de plusieurs manières distinctes.

Pour cela, il faut seulement de lui adjoindre l'axiome, a=b, pour qu'il devienne le système syntaxiquement complet du groupe à un seul élément.

Répondre affirmativement à cette question revient à énoncer que l'incomplétude syntaxique de tout système formel n'est jamais que provisoire et que ce n'est qu'une question de temps pour que quelqu'un trouve un jeu d'axiomes capables de compléter l'ensemble. Répondre négativement revient au contraire à estimer que pour certains systèmes formels, la procédure de complétion ne s'arrête jamais. Autrement dit, on a beau ajouter des axiomes, il subsiste toujours des propositions indécidables, c'est-à-dire des propositions impossibles à démontrer ou à réfuter.

D'une manière générale, la réponse est *négative*. Pour GÖDEL, tout système formel, en particulier ZF, contenant l'arithmétique de ROBINSON est impossible à compléter ; on dit donc qu'il est *essentiellement syntaxiquement incomplet*.

2°« Peut – on acquérir la certitude qu'un système est consistant (cohérent ou non contradictoire) ? »

Autrement dit, peut – on prouver qu'il est possible d'arriver, par une suite d'étapes obtenues à partir des axiomes, d'après les règles de déduction, à un énoncé contradictoire ? où à celui du genre 1+2=3 ? où encore est – il exclu que le système d'axiomes puisse permettre de déduire des propositions contradictoires ?

Un système formel est dit *consistant* (cohérent ou non contradictoire) si, à un aucun moment, il ne démontre une proposition et sa contraire. En somme, il est inconsistant (incohérent ou contradictoire) dans le cas contraire. Il n'y a aucune limite à l'inconsistance d'un système à tel point qu'on peut y prouver tout et n'importe quoi. En clair, il y a lieu de se convenir qu'un système inconsistant est à rejeter ; tel est le bien fondé de la question posée.

Pour HILBERT donc, il devait être possible de démontrer l'inconsistance (la cohérence ou la non contradiction) ou l'inconsistance (l'incohérence ou la contradiction) de n'importe quel système formel, en particulier ZF. Mais il n'avait pas de raison de soutenir de tels propos. Par ailleurs, GÖDEL a donc démontré que tout système formel, en particulier ZF contenant suffisamment d'arithmétique de ROBINSON ne peut pas démontrer sa propre consistance.

Au fond, la question de consistance ou non d'un système formel intervient au moment où le système d'axiomes ne peut plus se décrire sous la forme d'un modèle fini. Donc, la question devient capitale au moment où l'ensemble des axiomes ne se rapporte plus à un secteur d'objets familiers et bien définis. Ceci nous amène à dire que, les paradoxes apparus dans la théorie des ensembles, indiquent clairement que l'apparente évidence des notions élémentaires ne garantit en rien la consistance du système formel qui est construit à partir d'elles.

3° « L'axiomatique formelle est – elle décidable ? »

En d'autres termes, existe – t – il une méthode effective pour décider si une formule quelconque est vraie ou fausse ?, c'est-à-dire une méthode effective qui permet de décider, sans avoir à établir la preuve, si un énoncé est vrai ? Du fait qu'on a une formule quelconque du calcul des prédicats, existe – t – il un procédé systématique, général, effectif (ou un algorithme) qui permet de déterminer si cette formule est démontrable ou réfutable.

En clair, il s'agit là de l'énoncé de *l'Entscheichungs Problem* ou *Problème de la décision*. D'où, par définition, un système formel est *décidable* s'il existe une *procédure effective* prenant en entrée n'importe quelle proposition sensée qui y est formalisable et qui, après analyse, répond par "oui, cette proposition est démontrable" ou "non, cette proposition est réfutable" dans le cadre de ce système. Il se dégage que tout système formel syntaxiquement complet est décidable.

La procédure de décision correspondante est aussi connue sous le nom d'algorithme du BRITISH MUSEUM[5]. Par contre, dans le cas d'un système formel syntaxiquement incomplet, on n'a aucune garantie que la procédure de décision est effective. De fds, cette procédure est vouée à l'échec chaque fois qu'on va lui soumettre une proposition qui n'est ni démontrable ni réfutable. Donc l'échec va résulter devant un indécidable.

En plus, lorsque le système formel est syntaxiquement incomplet, deux cas sont donc en effet possibles : ou bien la procédure de décision fonctionne ou bien on est en présence d'une procédure de semi – décision. Le deuxième cas nous amène à penser que la procédure de décision dit oui chaque fois que la proposition soumise est un théorème, sinon elle parcourt interminablement la liste des preuves dans l'ignorance ; si l'absence d'arrêt de la procédure est due à la non théoremicité de la proposition considérée ou puisque la preuve ainsi fournie est plus longue que prévue. Quand bien même on peut augmenter le temps d'attente, cela ne va pas résoudre le dilemme quand on sait *a priori* que la preuve cherchée n'existe pas. Il est évident d'affirmer que la situation des théorèmes et des non – théorèmes dans ce contexte n'est pas symétrique.

Donc, les systèmes formels indécidables existent et, par conséquent, la réponse à donner à la question posée par HILBERT sur la décidabilité de tout système formel, est à nouveau négative. Il y a lieu de reconnaître que les choses sont plus simples dans la mesure où aucun système décidable n'est, en même temps essentiellement et syntaxiquement incomplet.

Au congrès de Bologne, l'espoir de HILBERT était de parvenir à donner des réponses positives dans tous les cas. Mais, au fond, les trois réponses fournies sont négatives. Force est de souligner que les réponses négatives aux questions HILBERT, en particulier l'incomplétude et l'indécidabilité des systèmes formels suffisamment avancés, montrent clairement que l'activité mathématique ne pourra jamais se passer du secours de l'instruction.

De toute façon, il faut avouer que le calcul propositionnel est un exemple de système mathématique qui montre que les objectifs de la théorie hilbertienne de la démonstration, sont pleinement atteints. Remarquons que son vocabulaire et son appareil formel ne sont pas suffisamment alimentés pour développer ne serait – ce que l'arithmétique élémentaire.

8 LA COHÉRENCE D'UNE THÉORIE MATHÉMATIQUE

8.1 PRÉLIMINAIRE

Sur la cohérence d'une théorie, il y a lieu de retenir que les énoncés sans quantificateurs correspondent aux énoncés « finitistes ». Ce qui amène à concevoir une arithmétique qui répond aux axiomes suivants :

$Sx \neq 0$

$S(x) = S(y) \rightarrow x=y$

qui ne sont pas des modèles finis. On pourrait dire que ces axiomes sont vérifiés pour N. A priori la signification des quantificateurs pose problème ici, c'est-à-dire il n'est pas possible de calculer la valeur de vérité de$\forall$x ou $\exists$x A. D'où, on a les axiomes suivants :

$x = x$

[5] *La procédure de décision due à l'algorithme de BRITISH MUSEUM fonctionne comme suit : « on commence par énumérer toutes les preuves dans l'ordre canonique, ce qui ne pose pas de problème puisque l'ensemble des axiomes est récursivement énumérable. De fait, une preuve n'étant jamais qu'une succession ordonnée et finie d'invocations d'axiomes et de règles logiques, elles – mêmes en nombres fini, on peut, avec un peu de méthode, lister les preuves dans l'ordre des longueurs croissantes et à longueurs égales dans l'ordre lexicographique. En les passant en revue, on a, à un moment ou à un autre, la certitude de tomber sur une preuve de A ou de non – A puisque par hypothèse de la complétude syntaxique, une de ces preuves existe à coup sûr », voir. La tétralogique, le sixième problème de Hilbert.*

$x= y \Lambda\ y =z \rightarrow x=z$

$x=y \rightarrow y=x$

$x=y \rightarrow S(x) =S(y)$

$Sx \neq 0$

$S(x) = S(y) \rightarrow x=y$

Pour Hilbert [11] les termes sont 0, S(0), S (0)),…

Les axiomes ayant la forme $\alpha=\alpha$ sont des équations vraies. On pourrait percevoir les autres axiomes comme des règles d'inférences permettant de déduire d'autres équations à partir d'équations vraies. Donc, il ne sera jamais possible de ne déduire que des équations vraies. Partant de cette hypothèse, on pourrait montrer la cohérence d'une théorie n'ayant pas de modèle fini, à partir de raisonnement de type syntaxique. En effet, le raisonnement purement syntaxique doit être possible pour la théorie des nombres réels.

Autrement, il est possible de montrer que les notions de base de la théorie de CANTOR, en particulier les alephs, ont une existence cohérente telle que Hilbert a affirmé :

Existence = Cohérence.

Peut-on avoir des raisonnements indirects qui passeraient par lemmes utilisant des énoncés quantifiés compliqués ? Il se remarque que la signification des énoncés quantifiés n'est pas, a priori, si claire qu'il faut expliquer des règles précises de déduction.

8.2 PREMIÈRE PREUVE DE COHÉRENCE

Pour HERBRAND, la cohérence d'une extension de théorie des preuves, se démontre en ajoutant les axiomes d'induction :

$\emptyset(\vec{x},0)\Lambda(\forall x.\emptyset\ (\vec{x},y) \rightarrow 0\ (\vec{x},s\ (y))) \rightarrow \forall y.\emptyset\ (\vec{x},y)$

Il faut souligner que l'argument est d'une simplicité notable, en ce sens que l'on pourrait le comparer aux preuves établies par ACKERMANN et Von NEUMANN. En effet, il présente aussi bien une preuve de cohérence qu'une caractérisation complète de la théorie ou de la procédure de décision.

Pour une théorie élémentaire de cohérence, il est possible de calculer la valeur de vérité des énoncés quantifiés [11].

En clair, d'après COQUAND, cet argument tient à éliminer les quantificateurs en associant à chaque formule $\phi(x)$ sans quantificateurs de manière à obtenir :

_ $\forall x.\ \phi(x) \leftrightarrow \phi\ (x)$ est démontables à partir des axiomes donnés[6].

8.3 UNE PREMIÈRE PREUVE DE COHÉRENCE

La démarche de HILBERT illustre une preuve de cohérence pour un fragment de théorie arithmétique. C'est plus la méthode que le résultat qui intéresse sa démarche mathématique. En effet, la méthode hilbertienne comprend en germe plusieurs idées directives relatives à la théorie des preuves. Ce fragment de la théorie mathématique se rapporte aux objets composés des symboles primitifs suivants :

1=,(,),f,f',ux et u, un terme de la théorie qui est une combinaison quelconque de ces sept symboles. A titre illustratif, on a des expressions <<11=>>, << ((11)(1)(1)>>,<<1(=1)f'>> et (1) (===) uf>> qui sont des termes.

Nous avons deux catégories des termes- les entités et les non entités qui sont divisés par les axiomes de la théorie mathématique, et ces catégories sont donc utiles pour déterminer la valeur de vérité, le vrai et le faux.

La théorie mathématique comporte les axiomes ci-après :

[6] *Ceci montre le résultat obtenu par TARSKI concernant l'élimination des quantificateurs sur la théorie des corps réels clos.*

1. $x=x$,
2. $(x=y \wedge F(x) \rightarrow F(y)$,
3. $f\,(ux)=u(f'(x)$,
4. $f(ux)=f'(uy) \rightarrow ux=uy$,
5. | $\neg\,(f(ux)=u1)$,

et quelques rudiments du calcul des prédicats permettant d'opérer des déductions.

D'une manière intuitive, le symbole u signifie un ensemble infini, ux un élément de l'ensemble u, f est la fonction successeur et f', sa fonction accompagnatrice. Notons que les axiomes 1 et 2 définissent une propriété familière de l'égalité ; l'axiome 3 affirme que tout élément ux à un successeur f(ux)) ; ce successeur est égal à un élément infini u, à savoir f' (ux), l'axiome 4 affirme que, si deux éléments de u ont le même successeur, alors ces éléments sont égaux ; et le dernier axiome stipule que 1 n'est le successeur d'aucun élément ou il est le premier élément.

Il est à noter que les expressions issues de l'application des axiomes 1 à 4 aux termes de la théorie, constituent la catégorie des entités, et que celles issues de l'application de l'axiome 5 à des termes, constituent la catégorie des non entités. Il convient de préciser que les expressions, dans la catégorie des entités, sont des propositions vraies, celles dans la catégorie des non entités, sont des propositions fausses. Ainsi, il y a lieu de déduire que l'on ne peut pas prouver, à ce point, une inconsistance. Cela signifie donc qu'on ne peut pas démonter qu'il n'y a pas d'expression logique qui soit à la fois une entité et une non entité.

L'homogénéité est une propriété invariante des entités. Elle est utilisée par la preuve de la consistance. Ainsi, une expression est dite homogène, si en faisant abstraction des parenthèses, on peut trouver un nombre égal de symbole de part et d'autre de l'égalité.

On voit, par exemple, que toutes les expressions décrivant des axiomes 1 et 2 sont de la forme $\infty=\infty$ où ∞ est un terme quelconque. Il en résulte que ces axiomes engendrent des expressions homogènes.

De même, les axiomes 3 et 4 engendrent des expressions homogènes. En effet, les expressions qui y figurent sont également homogènes. En clair, toutes les entités, c'est-à-dire des propositions vraies, sont homogènes.

Les expressions dans la catégorie des non- entités sont de la forme $f(ut) = u1$, où t est un terme quelconque. Si on y décèle une contradiction, cela veut dire qu'une expression de la forme $f(ut)=u1$ est donc une entité.

Pourtant, $f(ut)=u1$ n'est pas homogène. Par conséquent, l'expression en question ne peut pas être une entité. Donc, la théorie de la cohérence s'ensuit.

Chez HILBERT, et de l'avis de POINCARE, cette preuve est jugée comme une preuve emblématique de la théorie des preuves. Cela signifie que la théorie des preuves se décrit par une famille d'axiomes se rapportant aux objets symboliques. Et puis l'arithmétique élémentaire est utilisée en vue de prouver qu'aucune contradiction ne peut être en mesure de survenir dans la théorie. A cet effet, POINCARE déduit que l'arithmétique élémentaire est donc nécessaire, cela sans tenir compte des apparences pour arriver à donner une forme rigoureuse à l'argumentation.

Aussi trouve-t-il téméraire de penser qu'une preuve de cohérence de l'arithmétique, peut être établie suivant cette démarche, et pourtant elle pourrait dépendre très grandement de ce dont elle s'engage à prouver la consistance. Il s'agit ici des principes de l'arithmétique.

Donc, il estime qu'une telle entreprise serait circulaire et ne mentionne pas l'argumentaire soutenant que les théories pour lesquelles les dites preuves sont établies ne signifient rien. Mais, en réalité, elles sont essentiellement des combinaisons de symboles.

8.4 DEUXIÈME PREUVE DE COHÉRENCE

La méthode utilisée par TARSKI concernant l'élimination des quantificateurs sur la théorie des corps réels clos, ne fonctionne pas dès que l'on ajoute les opérations d'addition et de multiplication. Puisqu'elle pouvait donner lieu aussi à un procédé de décision. Sur ce, l'arithmétique de PRESBURGER ajoute seulement l'opération d'addition. On reconnait le rôle important que joue la méthode d'élimination des quantifications en démonstration automatique [11]. Elle est extrêmement faisable, car elle opère par ajoute des symboles des fonctions ayant des axiomes qui spécifient attentivement ces fonctions. A titre d'exemple, notons :

$x + 0 = x$,

$x + S(y) = S(x+y)$,

$x . 0 = 0$,

$x . S(y) = x+x .y$

Remarquons que si P(x) est sans quantificateur et t est un terme clos, alors on est devant une alternative, soit P(t) soit > P(t) est démontrable. Comme on le sait, intuitivement, les formules sans quantificateurs sont décidables [11].

Evidemment tous les termes clos sont égaux à des termes ayant la forme 0, S(0), S(S(0),…

Il est cependant possible d'ajouter des définitions ayant la forme

$\emptyset(x) \rightarrow f(x) = 0$,

$(\neg\emptyset(x)) \rightarrow f(x) = S(0)$

Et c'est pour avoir $\emptyset(x)$: formule sans quantificateurs. Une fois l'axiome d'induction enlevé, il est dérivable à partir de ces types de fonctions, pour les formules d'induction n'ayant donc pas de quantificateurs. [11]

9 LA MÉTAMATHÉMATIQUE : APPROCHE HILBERTIENNE

La métamathématique, en tant qu'une approche scientifique, utilise des méthodes fiables pour évaluer la fiabilité des théories mathématiques. Les méthodes fiables en question sont celles de l'arithmétique intuitive qui est une théorie qui nous est donnée *a priori*. L'évolution d'une théorie est une entreprise qui consiste à démontrer qu'elle est non contradictoire. Pour HILBERT, la philosophie mathématique ne se fonde pas sur des essences platoniciennes pour garantir la certitude d'une théorie, elle se contente plutôt de prouver la cohérence. Ainsi, pour HILBERT, du moment qu'un système formel ne mène à aucune contradiction, il est jugé admissible. Dans le sens hilbertien, fonder consiste donc à donner des preuves de consistance ; c'est là le mandat principal de la métamathématique.

Prenant le contre pied de BROUWER ou de KRONECKER, HILBERT ne considère pas la condition intuitionniste comme une finalité. Pour lui donc, le mathématicien ne doit pas s'aliéner les outils de base : le principe du tiers exclu, l'infini actuel et la théorie des ensembles transfinis. En effet, il estime que ces outils fondamentaux font la fertilité des mathématiques.

Evidemment, l'infini n'existe ni dans la réalité ni dans la psychologie du mathématicien. En toute éventualité, cet infini pourrait jouer un rôle dans notre manière de penser et d'être indispensable à la théorie mathématique.

A ce propos, des questions suivantes méritent d'être posées : comment introduire l'infini sans se commettre à l'infini ? Comment parler de l'infini si l'infini n'est pas un objet d'intuition valable ? Pour répondre à ces questions, il faut traiter l'infini comme une entité idéelle, c'est-à-dire une entité n'ayant pas de contenu intuitif réel et qui est défini seulement par le rôle qu'elle joue à l'intérieur d'une théorie mathématique.

HILBERT développe, pour les entités idéelles, une sémantique qui comporte de ressemblances avec la notion de classe introduite par RUSSELL et WHITEHEAD et qui s'explique par l'entremise des symboles incomplets. La sémantique hilbertienne renonce à donner aux entités idéelles un contenu déterminé qui se contente seulement de préciser les axiomes qui les définissent [12].

Pour HILBERT, le nombre imaginaire c'est un objet de pensée fictif, et son utilisation se passe en le considérant comme un objet arithmétique ayant la propriété supplémentaire $i^2 = -1$.

Au fond, c'était de la même manière que la notion d'infini a été introduite dans la théorie des ensembles de ZERMELO-FRAENKEL. Ainsi, un ensemble infini est en fait un objet X dont l'usage est régi par les deux axiomes ; à savoir :

1° L'ensemble vide appartient à X, $\emptyset \epsilon X$;

2° Si $x \in X$ alors le successeur de x appartient à X, x$\cup \{x\} \in X$.

En clair, l'ensemble infini aux axiomes 1 et 2 permet de définir l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ pris comme une totalité achevée dans cette théorie, c'est-à-dire :

$\mathbb{N} = \cap \{E\} | \emptyset \in E \wedge \forall x\, (x \in E \rightarrow x \cup \{x\} \in E)$, Il en résulte que l'ensemble des nombres naturels ℕ est le plus petit ensemble qui a la propriété « inductive », c'est-à-dire $\emptyset \epsilon E\ et\ \forall x\ (x \in E \to x \cup \{x\} \in E)$.Avec la méthode axiomatique, il est possible d'introduire plusieurs objets fictifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, le comportement de ∞ à l'endroit de ses comparses se présente comme suit, en posant :

(1) $n + \infty =\ \infty + n =\ \infty et \infty + \infty = \infty$;

(2) $0. \infty = \infty. 0 = 0, \infty. \infty =\ \infty\ et\ si\ n \geq 1\ alors\ n. \infty = \infty. n = \infty$;

(3) $n < \infty$.

Etant donné que ces règles indiquent la mémoire de manipuler avec les opérations « + » et « . » et les prédicats « = » et « < », la vérité de toute proposition arithmétique qui porte sur les objets de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pourra se déterminer sans tenir compte de l'inexistence de ∞. En effet, l'introduction d'un objet fictif comme ∞ est minée par l'exigence de prouver que cet objet ne conduit à aucune contradiction

« $0.\infty = \infty. 0 = \text{indiquée ci} - \text{haut était remplacée par } 0. \infty = \infty. 0 = 1$ »

l = (n.0).∞ = n.(0.∞) = n

quelque soit n. D'où on a une contradiction lorsque $n \neq 1$. Cela indique que le finitisme ne doit pas se doubler d'une méthode mathématique aux fins de prouver la consistance des systèmes d'axiomes. Pour HILBERT, cette méthode consiste à considérer la théorie mathématique idéelle comme une entité symbolique finie à scruter au moyen de l'arithmétique intuitive.

Le métalangage est perçu, dans la perspective des fondements, comme une notion cardinale pour l'étude de toute théorie mathématique. Cette approche est rendue possible par une conception symbolique de l'objet et de la théorie mathématique. Ainsi, la preuve de la consistance logique dépend seulement des propriétés symboliques du langage et ne se repère jamais à la structure définie par les axiomes. En fait, toute théorie mathématique, dépassant le contexte finitiste, est aussi dépourvue de référence. Ici les seules véritables propriétés logiques que la théorie mathématique possède sur le plan contextuel sont les propriétés symboliques liées à sa formalisation. Du point de vue de la théorie mathématique, le contenu procède du symbole et cela est dû au fait que le symbole est l'objet par excellence de la « raison arithmétique contextuelle ». Pour HILBERT, l'approche sémantique est telle que le symbole n'a pas de signification mais il est la signification[7].

Dès lors, HILBERT estime que la logique est une affaire de manipulations symboliques. Ici, l'objet et l'expression sont fondus en un. D'où, la métamathématique n'est pas, à vrai dire, une métathéorie. Elle est une seule et même théorie qui est la seule véritable théorie appelée *l'arithmétique contentuelle*. De ce point de vue, il résulte que les objets de la métamathématique sont toujours les mêmes : ce sont des symboles. Ils prennent différemment les noms de « axiomes de l'analyse réelle », « axiomes de la géométrie » ou encore « nombres naturels ».

Pour HILBERT, généralement, il n'y a pas de relation entre une théorie objet et son métalangage. Une seule théorie existant, c'est-à-dire *l'arithmétique réelle* ; celle-ci porte sur un seul type d'objet qui est le symbole prenant parfois plusieurs formes.

10 CONCLUSION

Pour terminer, il nous revient de déduire que, suivant le programme de HILBERT, les principes de la logique et ceux de l'arithmétique sont tels que pour RUSSEL, la logique est antérieure à l'arithmétique tandis que pour HILBERT, elles sont *simultanées*. Pour ce logicien et mathématicien, les mathématiques ne doivent combiner que de purs symboles. A ce titre, un vrai mathématicien doit raisonner sur ces symboles sans se préoccuper du sens à leur conférer.

L'échec irrémédiable du projet de HILBERT sur la cohérence de l'arithmétique était systématiquement et rigoureusement établi par les théorèmes de limitation de GÖDEL, dits théorèmes d'incomplétude. Mêmes accouplés d'un formalisme rigoureux, les résultats de GÖDEL n'ont pas totalement rejeté le finitisme de HILBERT, bien qu'ils aient jeté un discret sur le projet hilbertien.

---

[7] *Notons que ce point de vue remet en question le rapport traditionnel entre le symbole et ses significations. La perspective traditionnelle était soutenue par FREGE et RUSSELL pour qui l'objet logique est indépendant de la façon de la dénoter. Donc, il est désigné par l'expression symbolique et non pas par l'expression elle-même.*

Les preuves de la cohérence des systèmes formels en arithmétique ne sont pas les seules avancées significatives enregistrées dans le domaine des recherches métamathématiques, en particulier pour ce qui regarde la décidabilité et la calculabilité effective.

Les résultats très remarquables dans la théorie des preuves sont signalés et réalisés brillamment par les travaux de GÖDEL, CHURCH, TURING, TARSKI, KLEIN, ROSSER etc. Pour F.GONSETH, l'importance de la métamathématique est sans conteste. Elle peut s'apprécier indépendamment de toute pensée ou doctrine philosophique se rapportant à la théorie des fondements.

REFERENCES

[1] Y. Gauthier, "Hilbert and the Internal Logic of Mathematics" , *Synthese*, vol 101, n°1, 1994, p.1. 2013.
[Online] Available : *http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker* (août 2013).

[2] Jonas Bolyai: Science Absolue of Space, New York, Dover Publications, 1955.

[3] Pierre Cassou – Nogues, « Le programme de GÖDEL et la subjectivité mathématicienne », *Cahiers Français viete*, n°3, p.34, 2002.

[4] D. Hilbert : *Les fondements de la géométrie,* Paris : Dunod, 1971.

[5] Rodolf Bkouche, *La démonstration : du réalisme au formalisme*, 2013.
[Online] Available : http://www.michel.delord.free.fr/rb/rb-demrealform, (août 2013).

[6] Kosta Dosen, *Le programme de HILBERT*, Nouvelle Encyclopédie Didéront, Paris : Presses Universitaires de France, 1999, pp.87-106.

[7] Y. Gauthier, De Hilbert à Kronecker. *Les fondements de la logique arithmétique, 2013.*
[Online] Available : *http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker* (août 2013).

[8] Van Heijenoort: From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879 – 1931, Cambridge (Mass.) Harvard,University Press, 1967.

[9] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, Tomes I et II, Paris : L'Harmattan, 2001 (Tome I, p.87).

[10] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, Tome II, Paris : l'Harmattan, 2001.

[11] Thierry Coquand, *Herbrand et le programme de Hilbert (15 février 2008)*.
[Online] Available : https://www.math.ens.fr/herbrand100/coquand_slides (août 2013)

[12] D. Hilbert et P. Bernays : *Fondements des mathématiques*, T1, Paris : l'harmattan 2011.

[13] Ian, Stewaert : *Les mathématiques*, traduit de l'anglais par François GALLET, Collection Sciences d'Avenir, Paris : Pour la science, 1989.

[14] Y. GAUTHIER, « Fondements des mathématiques », *Encyclopédie Philosophique Universelle*. *Les notions philosophiques*, T1, Paris :PUF,1990.voir aussi Y GAUTHIER, *Les fondements de la logique arithmétique,*
http://mapageweb.umontreal.ca/lepagef/dept/cahiers/gauthier-hilbert_kronecker.pdf, (août 2013).

[15] Kosta DOSEN : *Le programme de Hilbert*, voir aussi *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, J.SALLANTIN et J-J. SZCZECINARZ eds, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Paris : Presses Universitaires de France, 1999.