International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 1 Aug. 2017, pp. 153-160

http://www.ijias.issr-journals.org/

Incomplétude et vérité

***A.-Roger LULA BABOLE*[1-2]**

[1]Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

[2]Faculté de Philosophie, Université Catholique du Congo, RD Congo

ABSTRACT: The provability of a formal system is an insufficient criterion to translate properly the truth notion of logico-mathematic. The incompleteness is well understanding by its reference in interpretation and truth concept is one of the result. Taking into account the level of language -object language and metalanguage- allow skirting interns contradictions and establishing the logic consistence of the formal system.

KEYWORDS: Incompleteness, truth, provability, language, metalanguage, metatheory, formal system.

RÉSUMÉ: La prouvabilité dans un système formel est un critère insuffisant pour traduire convenablement la notion de vérité logico-mathématique. L'incomplétude se comprend mieux en sa référence à une interprétation et le concept de vérité en est le résultat indiqué. La prise en compte des niveaux de langage -Langage objet et métalangage- permet de contourner les contradictions internes et établit donc la consistance logique du système formel.

MOTS-CLEFS: incomplétude, la vérité, la prouvabilité, le langage, le métalangage, la métathéorie, le système formel.

INTRODUCTION

La métathéorie hilbertienne se donne l'arithmétique pour prouver que l'arithmétique est cohérente.

Quand bien même GÖDEL ne l'a pas explicitement déclaré, l'incomplétude est mieux comprise en référence à une interprétation et le concept de vérité qui en découle.

1 SYSTÈME FORMEL DE TARSKI (SFT)

Le SFT se caractérise comme suit : [1]

- Il contient des moyens suffisants permettant de formaliser l'arithmétique ordinaire ;
- Il contient des axiomes de la logique des propositions, des axiomes relatifs aux quantificateurs et des règles de dérivation;
- Il contient la théorie de types (et en particulier les axiomes de réductibilité et de détermination) ou des axiomes qui correspondent à la théorie des ensembles de ZERMELO.

Pour ce système formel, il y a lieu de tenir compte de certaines propositions qui en font partie.

Une classe *cl* des propositions de SFT est dite *cohérente*, si elle ne comprend pas à la fois une proposition et sa négation. Elle est dite *complète*, si, quelle que soit la proposition A de SFT, la classe *cl* comprend soit A soit sa négation.

- Supposons que *Cl - Pr* soit la classe de toutes les propositions de SFT et *Cl-Dr* la classe des propositions démontrables de SFT ; si l'on construit un prédicat Vri relatif à SFT et soit *Cl -Vr* et la classe de proposition vraie de SFT.
- Il s'en suit qu'on construit le prédicat Vri tel que *cl -Vr* comprenne les propriétés suivantes :
- La classe *Cl -Vr* comporte tous les axiomes de SFT et est fermée par rapport à l'application des règles de conséquence immédiate pour SFT. Donc Cl-Dr fait partie de la classe *Cl - Vr.*
- La classe *Cl - Vr* est cohérente
- La classe *Cl- Vr* est complète avant l'incomplétude.

2 LE THÉORÈME DE TARSKI

Le théorème de TARSKI affirme que la vérité arithmétique n'est pas définissable en arithmétique. L'auteur précise donc qu'il n'y a pas d'énoncé Arithmétique V $[n]$ tel que l'équivalence $V\,\overline{[A]}\ \leftrightarrow A$ soit vraie pour tout énoncé clos A, c'est –à-dire énoncé sans variables libres. En clair, la vérité est, d'après TARSKI, hyperarithmétique sans être arithmétique. On pourrait assimiler cela à la sémantique formelle de prédicats de vérité bornés. Cela se déduit d'une diagonalisation triviale. Ce qui signifie que, dans le théorème d'incomplétude, on remplace '' prouvable '' par '' vrai ''. On donnerait ainsi l'impression que GÖDEL a tenté de *définir la* vérité par la prouvabilité et a cru, dans ce cas, obtenir une contradiction du genre de l'antinomie de RUSSELL[1].

2.1 VÉRITÉ VS PROUVABILITÉ

Le lien entre vérité et prouvabilité est établi par un théorème de complétude qui a été prouvé en 1930 par GÖDEL[2].

En logique du premier ordre, le théorème de complétude établit un lien entre la théorie de la démonstration et la théorie des modèles. En effet, la logique du premier ordre est apparue en isolant les principes logiques de la partie de l'arithmétique de PEANO ne contenant pas de quantification sur les ensembles de nombres naturels (arithmétique de PEANO de premier ordre). Mais on notera que, pour chaque formule de premier ordre non prouvable du point de vue logique, GÖDEL construit un modèle arithmétique assez simple, dans lequel la formule est fausse. Cela veut dire que si une formule du premier ordre est, du point de vue logique, valide, c'est-à-dire vraie dans tous les modèles, alors elle est aussi prouvable du point de vue formel.

Alors que GÖDEL montre dans son premier théorème d'incomplétude que le phénomène décrit sur la complétude pour la logique du premier ordre ne vaut plus pour la logique du second ordre ou logique obtenue en permettant aussi la quantification sur les ensembles d'individus, et que la partie mathématique de l'arithmétique de PEANO de premier ordre est incomplète.

D'une manière générale, le théorème d'incomplétude établit que dans tout système formel non-contradictoire qui contient l'arithmétique de PEANO, il existe des formules qui sont vraies mais indémontrables dans le système. Aussi montre-t-il que la consistance ou la non-contradiction d'un système formel contenant au moins l'arithmétique de PEANO de premier ordre, ne peut être établie en utilisant seulement les principes logiques qui sont formalisés dans le système formel. La cohérence d'un système ne peut pas être démontrée à l'intérieur de ce système lui-même.

Pour TARSKI donc « aucune théorie déductive ne peut être complète si, à l'intérieur des frontières, la théorie de l'addition et de la multiplication des nombres entiers, peut être établie et si en même temps, certaines présuppositions supplémentaires concernant, entre autres, la consistance de la théorie donnée sont satisfaites. La portée de ce résultat s'étend à de nombreuses théories [2] ».

La logique binaire classique nous apprend qu'une proposition est nécessairement vraie ou fausse, alors que dans l'étude syntaxique des systèmes formels, on sait que toute proposition sensée y est nécessairement prouvable, réfutable ou

---

[1] *L'antinomie de RUSSELL (1902) rapporte que le seul barbier d'un village rase toutes les personnes du village qui ne se rasent pas d'elles-mêmes. Qui rase le barbier ? ou autre version ensembliste de l'antinomie de RUSSELL :* $\{x/x\notin x\} \in \{x/x \notin x\}$ *ssi* $\{x/x\notin x\} \notin \{x/x\notin x\}$.

[2] *K. GÖDEL, Sur la complétude du système logique, 1929. En 1930, dans sa thèse de doctorat GÖDEL prouve la complétude de la théorie de la quantification de FREGE, réduite au premier ordre..*

indécidable. Il en résulte que les doubles inférences, prouvable $\leftrightarrow$vrai et réfutable $\leftrightarrow$ faux ne peuvent pas se tenir en toute généralité.

Puisqu'on ne peut pas considérer un système axiomatique qui prouverait des propositions fausses ou qui réfuterait des propositions vraies ; une seule possibilité reste et tient, à savoir :

Prouvable $\rightarrow$ Vrai   Vrai $\not\rightarrow$ Prouvable

mais

Réfutable $\rightarrow$ Faux   Faux $\not\rightarrow$ Réfutable

D'où, le résultat des identités suivantes exprimant qu'au contraire de la vérité, la prouvabilité ne commute pas avec la négation. Ce qui, en effet, donne :

$\neg$ Vrai = fausse $\neg$ Prouvable = réfutable v indécidable

mais

$\neg$ Faux = vrai $\neg$ Réfutable = prouvable v indécidable

TARSKI soutient fermement que ''le concept de vérité ne coïncide jamais à celui de démontrabilité, car toutes les propositions démontrables sont vraies, mais il existe des propositions vraies qui ne sont pas démontrables'' [6]. La comparaison entre la notion formelle de preuve et le concept de vérité est en effet une réalité. Les résultats trouvés au niveau du premier théorème d'incomplétude établissent clairement ce décalage.

La notion de preuve dans le métalangage du calcul des classes se formule dans les sciences déductives. En effet, les méthodes déductives du métalangage sont réduites à 1) la substitution, 2) le modus ponens ou « détachement », 3) l'introduction de quantificateur universel. Ainsi la règle de substitution exige de formaliser préalablement les variables en considérant Sub (x, n, m), qui est la formule obtenue de x en substituant la variable $\bar{x}_n$ à la variable $\bar{x}_m$. La formalisation des règles (1) à (4) exige la prise en compte de la notion intermédiaire de conséquence du $n^{ième}$ degré. Si X est un ensemble de fonctions proportionnelles (x$\in$ x $\supset$ F

P (x)), une conséquence du n-ième degré de X s'établit comme suit :

X $\in$ C on_n (X)$\equiv$(n=0$\wedge$ x $\in$X)

V (n $>$ 0 $\wedge$ X $\in$ Con_{n-1} (X))

V (n $>$ 0$\wedge$ $\exists y \exists k \exists l$ (FP (y) $\wedge$ y $\in$ Con_{n-1} (X) $\wedge$ x=Sub (y,k,l)))

V(n$>$0$\wedge$ $\exists y \exists z$ (FP (y)$\wedge$ y FP (z)$\wedge$ $\bar{\neg}$$\wedge$ y $\in$ Con_{n-1} (x) ^v^ $\bar{\neg}$^ y ^ x $\in$ Con_{n-1} (X)))

V (n $>$ 0$\wedge$ $\exists y \exists_k$ (FP (y) $\wedge$ y$\in$ Con_{n-1} (x) $\wedge$X= $\bar{\forall}$^$\bar{x}_k$^ y))

V (n $>$ 0$\wedge$ $\exists y \exists_k$ (FP(y) $\wedge\bar{\forall}$^$\bar{x}_k$^ y $\in$ Con_{n-1} (x) $\wedge$x = Sub (y, k ,l)))

La conséquence du n-ième degré de X fait relèver ce qui suit :

Nous avons pour chaque terme de la disjonction un cas :

a) Tous les éléments de X sont des conséquences ;

b) Les conséquences du n-1-i-ème degré sont aussi des conséquences n-ième degré ;

c) Une formule, obtenue d'une conséquence par substitution, est une conséquence (règle 1) ;

d) Une formule, obtenue de conséquences par détachement, est une conséquence (règle 2) ;

e) Une formule, obtenue d'une conséquence par généralisation, est une conséquence (règle3) et

f) Une formule, obtenue d'une conséquence par élimination d'un quantificateur, est une conséquence (règle 4).

Donc, il y a lieu d'affirmer que X est une conséquence logique des formules proportionnelles dans X, x$\in$ Con_n (X), si et seulement si, il existe un entier naturel n tel que x est la n-ième conséquence de X, $\exists$x (x$\in$ Con_n (X)). Si X est vide, alors x est prouvable.

Etant donné que la vérité est un prédicat qui ne s'applique qu'aux énoncés ; ici sont pris en considération les énoncés prouvables du calcul des classes, les x tels que x ∈ S ∧ x ∈ Con (∅). Comme il est dit plus haut, le théorème de GÖDEL se traduit par un décalage entre les ensembles vrais Vr et démontrables, Dem :

THEOREME 1. Si X ⊆ Vr alors Con (X) ⊆ Vr En particulier, Con (Vr) ⊆ Vr.

THEOREME 2. Vr est un ensemble non contradictoire et déductivement clos

THEOREME 3. Tous les énoncés démontrables sont vrais, cela signifie que Dem ⊆ Vr.

THOEREME 4. Il existe des énoncés vrais indémontrables, cela veut dire que Dem ≠Vr.

Le théorème 4 se déduit d'une proposition qui dit qu'un certain énoncé et sa ≪négation, en l'occurrence l'énonce≪ $\overline{\forall}$^$\bar{x}_1$ ^$\overline{\forall}$^$\bar{x}_2$^$\bar{c}$^$\bar{x}_1$ ^$\bar{x}_2$≫ et sa négation ≪ ¬^$\overline{\forall}$^$\bar{x}_1$ ^$\overline{\forall}\bar{x}_2$ ^$\bar{c}$^$\bar{x}_1$ ^$\bar{x}_2$ ≫ n'appartiennent ni l'un ni l'autre à Dem.

TARSKI démontre l'analogue des théorèmes de GÖDEL avec son concept de vérité :

(I) Si le langage-objet avec le métalangage ML a les ressources nécessaires pour définir une interprétation de ML dans lui – même, alors il est impossible de définir un prédicat de vérité pour L dans ML,

(II) S'il est possible de définir un prédicat de vérité de L dans ML ; et si le prédicat de démontrabilité Dem est interprétable dans L, il existe un énoncé vrai mais qui est indémontrable.

La preuve de ces méta – méta théorèmes s'établit par une correspondance biunivoque entre les expressions du langage L et les entiers naturels, de sorte qu'une proposition, qui porte sur des expressions de L (qui sont typiquement les propositions du métalangage) est une proposition qui porte sur des entiers. En vertu des hypothèses (I), si toutes les propositions portant sur des expressions de L(ou toutes les propositions de ML) sont traduisibles dans L ; en vertu des hypothèses (II), si la notion de prouvabilité est traduisible dans L. Pour la preuve, la correspondance biunivoque entre les expressions de L et les entiers naturels se donne par la suite $\emptyset_n$ =($\emptyset_{1,}\emptyset_{2,},$ $\emptyset_{3,}$, ...). Cela signifie que $\emptyset_n$ est corrélé à un entier n. Puisqu'on peut définir l'arithmétique dans le calcul des classes d'ordre infini. Donc les énoncés de L sont corrélés à des classes. La preuve de (I) s'adapte au fond à l'antinomie du menteur et procède comme suit. Si un prédicat de vérité pour L est définissable dans ML.

Pour chaque entier naturel x(x étant une variable de classe dans le calcul des classes), l'expression « $\emptyset_x$ ∉Vr » est une expression du métalangage, en vertu des hypothèses (I), « $\emptyset_x$ ∉Vr » est traduisible dans L par une certaine expression arithmétique φ (x) pour chaque entier naturel x de sorte que $\emptyset_x$ ∉Vr ≡ Ψ (x) (*).

Etant donné que Ψ(x) est une expression du calcul des classes, il existe un entier k tel que $\emptyset_k$ est le nom de Ψ(x).

En remplaçant x par k dans l'équivalence (*), nous avons $\emptyset_k \notin V_r$ (xx). Mais « $\emptyset_k$ » est le nom d'une proposition équivalente à Ψ(k), par la convention (T), nous avons $\emptyset_x \notin V_r \equiv \Psi$ (k).

D'où, contradiction avec (xx). Donc, si le langage-objet d'un métalangage ML est suffisamment puissant pour traduire ML, alors ML ne peut pas définir un prédicat de vérité pour L sans être contradictoire. On peut modifier l'argument aisément pour montrer (II) en remplaçant V_r par Dem. En effet, soit l'expression $\emptyset_x \notin$ Dem. En vertu des hypothèses (II), on peut traduire$\emptyset_x \notin$ Dem par une expression numérique θ (x) de sorte que $\emptyset_x \notin$ Dem ≡ θ (x) (♯).par la correspondance ∅ et le fait que∅ (x) soit une expression du calcul des classes, il existe L tel que $\emptyset_l$ est l'énoncé de θ (x). Substituant x par l dans (♯), nous avons $\emptyset_l \notin$ Dem≡ θ (l) (♯♯), car il existe un prédicat de vérité pour ce langage, nous obtenons $\emptyset_l \epsilon v_r \equiv \theta$ (l).Ainsi $\emptyset_l \notin$ Dem≡ $\emptyset_l \epsilon V_r$ par (♯♯). Pourtant Dem ⊆ $v_r$dans ce langage en vertu du théorème 3. Il résulte que l'énoncé ∅ est vrai mais non prouvable ($\emptyset_l$ est également indécidable parce que ¬^$\emptyset_l \notin$ Dem).

En rapport avec le métalangage, on déduit qu'une façon d'interpréter (I) consisterait à dire que la métathéorie doit être *essentiellement* plus riche que sa théorie objet, afin d'éviter la contradiction. Quand bien même le métalangage est intégralement reproduit dans le langage-objet et le prédicat de démontrabilité est traduisible dans le langage-objet, il existe d'après (II), un énoncé vrai qui est indémontable[3]. Mais, en ce qui concerne la métamathématique, le prédicat de démontrabilité est traduisible dans le langage-objet, lorsque celui-ci contient la théorie des nombres. Dans une certaine

[3]*Pour éviter que ML soit contradictoire par (I), on supposera que ML est suffisamment riche pour que le prédicat Vr ne soit pas traduisible dans L.*

perspective, on peut dire que la définition tarskienne de la vérité ne pouvait pas être correcte. Ce résultat attribué à TARSKI montre sa propension à faire les poubelles [3].

En conséquence, il n'est pas indiqué de penser que la complétion d'une théorie cohérente soit forcément hyperarithmatique ou pure. Nous pouvons avoir des modèles tels que Δ_2^0 qui sont $\ll$ non standards $\gg$, Puisqu'ils vérifient un certain nombre de choses fausses. Nous pouvons Souligner par ailleurs que les théorèmes de TARSKI se prouvent à l'aide du théorème du point fixe.

Il est à remarquer que la différence entre vrai et prouvable ne faisait pas partie du paysage des années 1930. La plupart des nuances qui y sont faites sont postérieures à l'incomplétude. Nous tenons à faire remarquer également que la règle de *ModusPonens* établit une dualité entre preuves de A et preuves de $\neg A$. Donc une telle dualité suggère une forme de complétude « interne » ayant la forme « A et prouvable ssi ¬A n'est pas prouvable » et cela sans se référer à la vérité. Alors qu'avec la complétude, on pourrait définir la vérité comme la prouvabilité. On le sait, pour le premier théorème d'incomplétude, G n'est pas démontrable, bien que sa négation ¬G ne le soit pas de manière rigoureuse. Cela montre que si T est 1- cohérente, ou en remplaçant G par la variante de ROSSER, qui n'est ni prouvable ni réfutable [3].

2.2 THÉORÈME SUR LA VÉRITÉ

TARSKI donne une définition proprement logique de la vérité inaugurant ainsi la sémantique formelle en posant deux conditions : une théorie-T, ou une définition de la vérité pour un langage donné, doit tout d'abord être matériellement adéquate.

Une théorie -T doit ensuite être formellement correcte, c'est-à-dire portée sur un langage, dont la structure syntaxique est déjà spécifiée. TARSKI définit la vérité en terme de « satisfaction ». La vérité est conçue strictement de façon extensionnelle.

Chaque courant de pensée, chaque science particulière a sa propre conception du concept « vrai ». Mais une question revient à l'esprit : quelle est la bonne conception de la vérité ?

L'expression « la bonne conception de la vérité » est, d'après TARSKI, utilisée en un sens presque mystique, fondée sur la convention que chaque mot a une seule signification « réelle » et que toutes les conceptions concurrentes cherchent véritablement à saisir cette signification unique. Supposons que cette idée soit fondée et s'aperçoit que toutes les conceptions, qui posent problème, sont contradictoires entre elles [6].

Il y a lieu de remarquer qu'en présence du concept de « vérité », il n'y a pas un seul et même concept, mais une pluralité de concepts différents désignés sous un seul et un même mot. Il en résulte qu'il n'existe aucune conception de vérité, présentée jusqu'à nos jours sous une forme intelligible et univoque.

Par le théorème sur la vérité, TARSKI montre comment celui-ci découle de la généralisation sémantique du théorème de GÖDEL. En effet, le théorème sur la vérité se conçoit comme suit:

La théorie du prédicat vrai relatif au système formel de TARSKI n'est pas formalisable dans le système formel de TARSKI lui-même. Ce qui signifie en d'autres termes qu'aucune classe définissable des propositions du SFT (fermées ou non) appartenant à la classe Cl-Vr n'est complète.

En effet, si la théorie du prédicat vrai est formalisable dans SFT alors il existe dans SFT une expression prédicative Q ri telle que pour toute proposition A de SFT, a étant le ndg de A,

Ce qui revient à dire que

Q ri N_a↔A est prouvable dans SFT

Dans ces conditions, il est possible de montrer à la limite que la classe Cl-Vr des propositions vraies de SFT a les mêmes propriétés que la classe être une *classe définissable*, Cl-Df.

A étant en effet une proposition de SFT, il se dégage que l'équivalence indiquée ci-haut se décompose en deux implications, à savoir :

1) Qri $\longrightarrow$ A
2) A $\longrightarrow$ Qri

L'examen de cette équivalence nous amène à dire que si Aϵ Cl-Vr, alors Qri Na ϵCl-Vr aussi, car la classe Cl-Vr est fermée par rapport à l'application de la règle de conséquence.

Et si A ∉ Cl-Vr, alors Qri NaϵCl-Vr, car Qri Na ∉ Cl-Vr. Etant donné que Cl-Vrest une classe complète, donc Qri NaϵCl-Vr. De ce fait, suivant l'implication 2) AϵCl-Vr aussi. D'où contradiction.

Et on sait que Qri Na est la proposition de SFT représentant l'énoncé : la proposition A appartient à la classe Cl-Vr. Donc, elle correspond à A. D'où la classe Cl-Vr est définissable dans SFT. Du fait qu'elle est contenue en elle-même, elle se trouve bien vérifiée dans les propriétés de la classe C-Vr. Et la classe Cl-Df étant incomplète, il existe au moins une proposition indécidable dans Cl-Vr, ce qui n'est pas possible. Car, en vertu de l'hypothèse, Cl-Vr est une classe complète.

2.3 LANGAGE ET MÉTALANGAGE

Pour définir le concept de la vérité et de toute étude sur le problème sémantique en général, TARSKI estime qu'il faut écarter le langage sémantiquement clos, car il confond en son sein de termes sémantiques.

Il faudra procéder en la distinction de deux niveaux du langage[4]. Le premier niveau est le langage. Ce langage est le langage habituel. On définit la vérité à partir des propositions de ce langage.

Le deuxième langage est le métalangage, qui est celui qui décrit et parle du langage-objet. Les termes par lesquels doit se construire la définition de la vérité sont contenus dans ce langage [6]. En clair, nous soulignons que la nécessité de séparer le langage du métalangage surgit dans le paradoxe de RICHARD, simplifié ensuite par BERRY[5].

Le métalangage peut devenir un langage-objet pour un autre métalangage dans la mesure où, les propositions de ce métalangage deviennent l'objet d'études d'un autre métalangage. D'où, la nécessité de construire un nouveau métalangage.

A son tour, le nouveau métalangage peut aussi devenir un langage-objet pour un autre métalangage plus élevé. Ainsi, il est possible d'avoir une hiérarchie infinie des langages.

Pour TARSKI, le vocabulaire du métalangage est plus caractérisé par les conditions établies, sans lesquelles une définition de la vérité pourrait être considérée comme matériellement adéquate, c'est-à-dire l'équivalence (T) ainsi annoncée : « P » est vrai si P[6].

La définition de la « Vérité » et toutes les équivalences, qui y sont impliquées, sont formulées dans le métalangage. Ces deux expressions ''P'' sont des instances différentes. Cela signifie que le ''P'' est un terme du métalangage, tandis que P du langage-objet. Puisque c'est le terme du métalangage qui explique celui du langage-objet, force nous est d'affirmer que le langage-objet est inclus dans le métalangage.

D'ailleurs, ce point de vue est soutenu par TARSKI lorsqu'il affirme : « Le métalangage doit contenir le langage-objet entant que l'une de ses parties » [6]. Telle est donc la condition nécessaire pour établir la preuve de l'adéquation matérielle de la « vérité ». Si le métalangage doit pouvoir inclure en son sein le langage-objet, il sera donc nécessaire que le métalangage soit assez riche pour pouvoir permettre de construire un nom pour chaque proposition du langage-objet.

Retenons que le métalangage doit contenir aussi des termes ou des expressions logiques notamment des expressions du genre « si et seulement si, si…alors », etc. Son vocabulaire n'aura pas contenu des termes indéfinis sinon ceux dont la définition éclaire le sens. Cela signifie que « les termes sémantiques (relatifs au langage-objet) ne soient introduits dans le métalangage qu'au moyen de définition » [6].

---

[4] *RUSSELL émet donc l'hypothèse d'une hiérarchie de langages $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ … à telle enseigne que chaque langage de la hiérarchie permette d'exprimer ce que son prédécesseur ne peut que montrer, cela signifie que $\mathcal{L}_n - 1$ ne peut que montrer. Remarquer que RUSSELL prend vraiment au sérieux l'idée d'un métalangage.*

[5] *Supposons que n soit le plus petit entier naturel tel que on ne puisse le définir en moins de 100 mots. Mais on précise que cet entier ne peut être défini en moins de 100 symboles élémentaires dans le langage de signature S, donc cette expression est une expression relevant du métalangage et non du langage de signature S ; dans ce cas, il n'y a plus de paradoxe.*

[6] *La relation logique entre proposition et son nom s'établit comme suit : Par « exemple la voiture est blanche » on peut remplacer cette proposition par P et son nom par la lettre «q ». TARSKI estime que les deux expressions doivent être équivalentes : p est vrai si et seulement si « q » et cette équivalence s'appelle Equivalence de la forme « T », A. TARSKI, Logique, Sémantique, Métamathématique, pp. 272-273.*

En clair, la définition explique le sens clair et univoque (dépourvu d'ambigüité). Pour qu'une définition de la « vérité » dans le métalangage soit satisfaite, elle doit donc être à la fois matériellement adéquate et formellement correcte, pour pouvoir se vêtir de la condition de richesse essentielle » [6].

Il en résulte que le métalangage doit être essentiellement plus riche que le langage-objet.

Donc il doit contenir des variables de type logique supérieur au type des variables du langage-objet.

Mais à supposer que la condition de richesse essentielle ne soit pas remplie, on peut habituellement montrer qu'une interprétation du métalangage dans le langage-objet est possible. Cela signifie qu'un terme donné du métalangage peut être mis en relation avec un terme bien défini du langage-objet, de telle manière que les propositions susceptibles d'assertion, dans un langage, se trouvent correspondre aux propositions susceptibles d'assertion dans l'autre. Tel est le point de vue de TARSKI [6].

Par la richesse essentielle, on comprend évidemment qu'il n'est pas possible de pouvoir interpréter le métalangage dans le langage-objet. Les noms et les expressions du langage-objet appartiennent au métalangage et non au langage-objet. Mais cela n'empêche pas que ces termes et ces expressions soient interprétés en termes du langage-objet.

Aussi TARSKI va-t-il préciser que la condition de richesse essentielle est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour pouvoir définir de manière satisfaisante la vérité dans le métalangage.

Il ajoute donc en disant que « Si le métalangage remplit la condition « de richesse essentielle », la définition de la « vérité » peut être définie en lui » [6].

Le développement d'une théorie de la vérité dans un métalangage qui ne remplirait pas la condition tenterait une définition de la « vérité » relevant du domaine sémantique et serait utopique sinon une entreprise vaine.

Dans un langage formalisé, les théorèmes sont les seules propositions qui peuvent s'affirmer. D'après TARSKI, « les seuls langages à structure spécifiée sont les langages formalisés de divers systèmes de la logique déductive, éventuellement enrichis par l'introduction de certains termes non logiques » [6]. Selon TARSKI, le métalangage peut démontrer tous les biconditionnels de la forme ''p'' est vrai si et seulement p'', dans lesquels on perçoit que p est borné à des énoncés du langage-objet. Etant donné que le prédicat de vérité pour L peut être traduit dans ML mais pas dans L.

En 1975, KRIPKE a élaboré une théorie formelle de la vérité utilisant une logique trivalente [4]. L'approche Kripkéenne montre que les énoncés paradoxaux ne sont ni vrais ni faux. Cela amène à une théorie de la vérité qui établit que le prédicat de vérité pour L peut être exprimé dans L même.

D'après KRIPKE, un langage est capable de contenir fondamentalement sans contradiction le prédicat de vérité dans ce langage, ce qui est donc impossible suivant l'approche tarskienne de la vérité.

Notons que la théorie kripkéenne de la vérité, différente de celle de TARSKI, permet à la « vérité » d'être l'union de toutes les étapes de la définition. En vertu de cela, pour KRIPKE, « ''la neige est blanche'' est vrai'' est bien défini, comme aussi « ''la neige est blanche » est vrai'' », et ainsi de suite, mais « cet énoncé est vrai » ou « cet énoncé n'est pas vrai » n'ont donc pas de conditions. Selon KRIPKE, ce sont des énoncés dénués de fondement (*ungrounded*) [4].

La notion de vérité, d'après HINTIKKA, ne veut pas dire une correspondance directe à la réalité, mais elle signifie la consistance des schémas descriptifs dans lesquels les descriptions de mondes possibles se moulent. Elle se formalise suivant la règle impérative d'univocité, c'est-à-dire un seul et même symbole va représenter la même proposition [7]. Il est donc possible de comparer la proposition et la réalité. Cependant une telle comparaison est typologique et principielle. Dans ce sens, la non-contradiction est la règle fondamentale de la consistance. Ce qui revient à affirmer que dans aucune description de monde possible, on ne peut pas avoir la proposition p en même temps que sa proposition (non p). C'est là une position de principe qui ne concerne pas seulement un ensemble propositionnel descriptif mais qui touche à tout genre de description du monde.

En clair, il nous revient de dégager que les théories de la vérité de TARSKI et KRIPKE sont incontournables, voir même indispensables dans l'appréhension de toutes les autres théories formelles de la vérité. TARSKI définit le concept de « vérité » par un autre concept sémantique, à savoir celui de *satisfaction*. Pour lui, la satisfaction est une « relation existant entre n'importe quelle catégorie d'objets et certaines expressions dites » fonctions propositionnelles » [5].

Ces expressions sont du genre : « x est logicien », « x est disciple de y », etc. Notons que la fonction propositionnelle possède des variables *libres* et la proposition est définie comme « une fonction propositionnelle qui ne contient aucune variable libre » [5]. TARSKI définit la ''satisfaction'' en ayant recours à la récursivité. Et suivant cette procédure, on commence par indiquer les objets satisfaisant, les fonctions propositionnelles les plus simples et après celles les plus complexes. On devra établir par la suite les conditions dans lesquelles les objets concernés satisfont une fonction composée. En général, on définit la ''satisfaction'' par application à des propositions [5].

Deux cas de propositions sont à considérer : une proposition est satisfaite par tous les objets ou ne l'est par aucun. Ainsi, TARSKI définit la vérité comme suit : « une proposition est vraie, si elle est satisfaite par tous les objets et elle est fausse dans le cas contraire » [5].

Donc, la fonction propositionnelle f (x) caractérise une classe composée d'objet X qui satisfait F. De même, le prédicat (x,y) caractérise un ensemble de couples d'individus (x,y) satisfaisant R. La satisfaction concerne des objets, des couples d'objets ou de triples d'objets, etc. Partant de la satisfaction des formes propositionnelles élémentaires, de proche en proche, il serait possible de préciser la satisfaction des formes propositionnelles complexes. La vérité est définie récursivement sur base de la structure syntaxique des formules.

3 CONCLUSION

L'idée essentielle qui se dégage est qu'il existe des formules vraies qui sont non prouvables. On distingue ici nettement la prouvabilité de la vérité. Toute formule appartenant à un système formel n'est pas nécessairement déductible des axiomes de ce système. Retenons que le concept « vérité » ne renferme pas un seul concept, mais une pluralité de concepts différents et désignés par un seul et un même mot. Ainsi, chaque courant de pensée, chaque science particulière a sa conception de la « vérité ». Quoiqu'il en soit, il n'y a pas de théorie de vérité qui prime.

La vérité est définie dans les propositions du langage objet et les termes qui la définissent appartiennent au métalangage. Au fond, le métalangage n'existe pas en soi ; il est toujours déjà et nécessairement lié à une langue naturelle, c'est-à-dire un langage-objet.

REFERENCES

[1] Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.

[2] A. Tarski : La complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaires ,vol.2 , Paris : Armand Colin, 1974.

[3] K. GÖDEL, E. NAGEL, J.R. NEUMANN et J. –Y. GIRARD, *Le théorème de GÖDEl .Sources du savoir, Paris :Le Seuil,1989.*

[4] S.A. Kripke," Oultine of a Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72, pp. 690-716, 1975.

[5] A. Tarski : Logique, Sémantique, Métamathématique, Trad. Sous la direction de G. Granger ,Paris, Armand colin, vol2, 1974.

[6] A. Tarski, « La conception sémantique de la vérité », *logique, Sémantique, Métamathématique*, T.2, Paris : Armand-coli, pp265-305,1974.

[7] NGWEY Ng. Nd, « Le critère quinéen d'engagement ontologique. Un instrument méthodologique d'analyse de langages », *Problèmes de méthodes en philosophie et sciences humaines en Afrique,* (Collection Recherches Philosophiques Africaines, n°9). Actes de la 7ème Semaine Philosophique de Kinshasa, tenue du 24 au 30 avril 1983, Faculté de Théologie Catholique, Kinshasa, pp.131-145,1986.