

L'incomplétude et la mécanique quantique relativiste

A.-Roger LULA BABOLE

Département des Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, RD Congo

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: The internal limitations of relativist quantic mechanic establish the incomplete character and undecidable of physics theories in the light of results of GÖDEL's theorem. From this mechanic, the research shows that a formal system which involves the natural integers cannot be in the same time complete and consistent. In addition, it proves that the coherence of a such system can be demonstrate "inside" of formal system.

KEYWORDS: incompleteness, special relativity, general relativity, relativist quantic mechanic, SCHRÖDINGER's equation, DIRAC's equation, continuous' equation.

RESUME: Les limitations internes de la mécanique quantique relativiste établissent le caractère incomplet et indécidable des théories physiques au regard des résultats du théorème de GÖDEL. Partant de cette mécanique, l'étude montre qu'un système formel qui comprend les entiers naturels ne peut pas à la fois être complet et consistant. De plus, elle prouve que la cohérence d'un tel système ne peut pas se démontrer « à l'intérieur » du système formel.

MOTS-CLEFS: L'incomplétude, la relativité spéciale, la relativité générale, la mécanique quantique relativiste, l'équation de SCHRÖDINGER, l'équation de DIRAC, l'équation continue.

1 INTRODUCTION

Le théorème d'incomplétude de GÖDEL rend bien compte de la coexistence théorique de la mécanique relativiste et de la mécanique quantique, qui sont des théories physiques diamétralement opposées. En logique, avons-nous dit, une théorie est incomplète, si elle comporte une formule telle qu'elle ne peut être ni démontrable ni réfutable, donc si elle comporte une formule indécidable. En physique les découvertes montrent que les théories scientifiques ne peuvent plus être considérées comme « vraies ».

A cette ruine de l'édifice intellectuel, les mathématiques font donc résistance jusqu'à la publication en 1931, par le logicien Kurt GÖDEL (1906-1978), de son théorème d'incomplétude : un système formel qui comprend les entiers ne peut à la fois être complet et consistant. En outre, sa consistance ne peut être démontrée « à l'intérieur » du système.

Le fameux théorème d'incomplétude de GÖDEL montre que même les mathématiques, domaine du savoir qui paraît le plus formalisable, ne peuvent être entièrement et/ou totalement réduites à un système. Donc, le projet hilbertien du formalisme s'effondre.

Au début du 20^{ème} siècle, on a vu se développer, de façon indépendante, la mécanique quantique et la mécanique relativiste, sans que l'on ait pris simultanément en considération les deux limitations de la mécanique classique découvertes par A. EINSTEIN et M. PLANCK.

2 LA RELATIVITE RESTREINTE ET LA MECANIQUE QUANTIQUE

Enoncée indépendamment et simultanément par EINSTEIN et POINCARÉ en 1905, la relativité restreinte remet en cause nos « certitudes » sur un espace et un temps absolus. Les propriétés d'un nouveau concept d'espace-temps apparaissent étranges et, au même moment, la tentative kantienne de fonder la science sur les catégories a priori de l'esprit (l'espace et le temps). Quant à la mécanique quantique, elle est en effet une vision du monde tel qu'il se révèle à l'échelle atomique, radicalement différente de celle à laquelle on est habitué dans le monde macroscopique. En clair, elle est une théorie physico-mathématique décrivant les propriétés de base du rayonnement et de la matière.

Autrement dit, dans la mécanique relativiste, il ne pouvait y avoir d'action instantanée à distance et toute interaction se propageait par un champ transportant de l'énergie-impulsion. De même, dans la mécanique quantique, le transfert d'énergie-impulsion ne pouvait se faire de façon continue, mais il fallait qu'il y ait lieu par quantités discrètes, par quanta.

Comme on le sait, la relativité pose le problème d'énergie qui forme un seul être : une seule variable dynamique avec le moment, la covariance. Elle constitue une prédisposition à pouvoir apparaître. En effet, cette variable dynamique se trouve de la même manière dans tous les référentiels quand ils se présentent dans les équations.

- 1) L'énergie et le moment sont unis à un seul être, le carré de cette grandeur physique réunifiée s'est avéré être un invariant et égale à m^2c^4 .
- 2) Cette situation lue autrement produit une équation, c'est l'équation de l'énergie en fonction du moment. En effet, c'est la situation analogue de ce qui arrive en mécanique classique où l'énergie est exprimée en fonction du moment, c'est-à-dire $E=p^2/m^2$; ici, l'énergie est au premier degré. En effet, cette équation quantifiée est celle qui a donné l'équation de SCHRÖDINGER ne prenant pas en compte la théorie de la relativité.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

Dans cette équation, l'espace et le temps n'interviennent pas de la même façon. Cela signifie donc que le terme du temps est linéaire, alors que celui de l'espace est quadratique. Mais, dans l'équation relativiste, on voit que l'énergie est au 2^{ème} degré. Si l'on tend à la quantifier, on obtient une équation ayant la prétention de doter des énergies négatives à des particules libres, c'est-à-dire des énergies cinétiques de façon classique qui sont négatives, autrement dit des énergies n'ayant pas de sens.

Notons que les énergies négatives sont gênantes, car elles ne garantissent pas la stabilité des états quantiques. Donc, elles n'ont pas l'état fondamental.

Il fallait en effet qu'une équation relativiste décrive le spin, phénomène purement quantique. Cela veut dire que ce phénomène n'a pas d'analogue classique.

Le problème de localisation a préoccupé les physiciens. On voyait très mal qu'une pièce de monnaie disparaisse en France et qu'il fallait la chercher sur Jupiter à l'instant qui suit, processus physique qui devrait être local conformément à l'équation de continuité stipulant que les phénomènes physiques se propagent de proche en proche.

$$\frac{\partial}{\partial x}(c\psi + E_1\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(c\psi + E_2\psi) + \frac{\partial}{\partial z}(c\psi + E_3\psi) - \frac{\partial}{\partial t}(\psi + E_4\psi) = 0$$

D'où, la théorie quantique du champ.

A la suite de la découverte du spin, DIRAC recherche une équation qui puisse le prendre en compte. Devant les antagonismes épistémologiques et en vue de trouver les pistes de solution, DIRAC prend donc le spin $S_x; S_y; S_z$ dans une équation relativiste en postulant un spineur à 4 degrés de liberté : 2 degrés spin up et 2 degrés spin down. Ici, les termes du temps et de l'espace sont linéaires ; ils sont une sorte de racine carrée de la première et cela grâce aux nouveaux concepts. Alors que l'équation de SCHRÖDINGER agit sur un vecteur d'état à une seule composante : un scalaire, celui de DIRAC agit sur un vecteur à quatre composantes (spinor) et contient des matrices ou tableaux de nombres de quatre lignes et quatre colonnes ayant la propriété de ne pas forcément commuter. Donc, on écrit quatre équations de type SCHRÖDINGER qui ont chacune des termes différents mais qui sont étroitement liées.

Comment DIRAC s'y prend-il ?

1. Il voulait tout simplement éliminer les états négatifs, essentiellement provoqués par les dérivées secondes par rapport au temps, et ce en partant de l'opérateur d'énergie dans l'équation Klein GORDON, en extrayant la racine carrée de l'équation de Klein GORDON,

$$-\frac{\hbar^2 \partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta \psi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\vec{r}, t)$$

Il a intercalé les coefficients des inconnus, non autrement identifiés dans son équation linéaire de telle sorte que, lorsqu'il prenait le carré de son équation linéaire, il retrouve l'équation de Klein GORDON. Son génie lui expliqua très vite que ces coefficients étaient des matrices, car il produisait deux équations linéaires, donc les états quantiques correspondants avaient 4 degrés de liberté. Il eut le mérite de voir que ces matrices étaient liées aux matrices de PAULI déjà connues à l'époque qui décrivaient de manière quelconque et surtout peu empirique le spin.

2. Les transformations de LORENTZ s'avèrent contenir des quantités identifiables au spin :

$$x \rightarrow x' = \frac{x - \frac{v}{c} ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; ct \rightarrow ct' = \frac{ct - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3. Cherchant des solutions à son équation, DIRAC trouve celles décrivant correctement les électrons et leurs spins, et d'autres solutions se comportant de manière surprenante. Il s'agit de certaines particules ayant des énergies négatives et une charge opposée à celle de l'électron, c'est - à - dire l'antiparticule de l'électron, autrefois appelée anti-électron et plus tard rebaptisée positron. Pour ce qui regarde les énergies négatives, malheureusement même si le spin était expliqué, les équations de DIRAC n'ont pas pu éliminer les énergies négatives. Au contraire, DIRAC les a accréditées en postulant les antiparticules.

4. Néanmoins, on se rend compte que ces insatisfactions persistent. Pour ce faire, il fallait en effet revoir l'équation de la continuité. On assiste à l'apparition de paire d'électrons. C'est pour dire que l'insatisfaction provoque la création de paire d'électrons à partir d'une disparition d'un rayon, près du champ coulombien d'un noyau (atome) lourd. Le constat est que le nombre de corpuscules changeait, ce qui n'était pas le cas en mécanique quantique ou en mécanique classique. D'où, la loi de LAVOISIER sur la quantité de matière tombée.

Il en résulte qu'il fallait changer la conception de la notion même de la particule, c'est-à-dire abandonner cette notion. Cela signifie donc que le corpuscule accompagné d'une onde est une notion caduque. Les exigences de la localisation de phénomènes physiques suggèrent la notion du champ comme base de la formalisation de phénomènes physiques. Abandonner la notion de corpuscule signifie abandonner la notion de fonction d'onde.

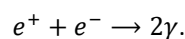
En effet, au lieu de quantifier par l'onde, on quantifie plutôt par le champ, c'est-à-dire la fonction qui se présente dans l'équation de Klein GORDON tout comme la fonction de l'équation de DIRAC. Donc, c'est le champ, au sens du champ d'oscillateurs harmoniques, qui emplit le corps noir lors de la quête de la solution aux divergences du rayonnement de corps noirs.

L'espace est donc hanté par un champ dont le mouvement est décrit par l'équation de Klein GORDON (champ scalaire) ou par l'équation de DIRAC (champ spinoriel) ou encore par les équations de MAXWELL (champ vectoriel).

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{div} \vec{B} = 0$$

Les perturbations (emballéments de ces champs) se propagent comme des ondes. Ce sont des paquets d'ondes qu'on appelle particules désormais. Le phénomène dû à l'annihilation matière-antimatière entraînant qu'un électron (e^-) s'annihile avec son antiparticule, le positron (e^+), donne des photons (X) suivant la réaction :



De ce fait, il convient de souligner que l'équation de DIRAC reste valable pour les électrons mais aussi pour toute autre particule de spin $1/2$.

De même, l'électron et le positron, il s'avère que toute particule a une antiparticule ayant la même masse mais de charge et spin opposés. En clair, l'ensemble de toutes les particules forme l'antimatière.

3 RELATIVITE GENERALE ET LA MECANIQUE QUANTIQUE

En relativité générale, il n'y a pas une métrique uniforme. D'où, la primauté accordée à la géométrie. La nécessité s'impose de requantifier les grandeurs géométriques. Il s'agit de la courbure de l'espace dont la quantification va probablement donner la constante cosmologique et dont les développements font l'objet actuel en gravitation quantique. Donc, on tend vers une perspective de l'unification de la gravitation avec les 3 autres forces.

La question du lien entre les deux mécaniques se pose. Car la relativité générale n'a pas le monopole de l'espace et du temps. De même, la mécanique quantique n'a pas le monopole de la quantification. En d'autres termes, il n'y a pas que la gravitation ou l'espace-temps qui peut être quantifié mais aussi, à travers une interaction réciproque, tout phénomène qui est en composition inhomogène avec un autre. De même, il n'y a pas que la mécanique quantique que l'on peut rendre indépendante d'un cadre extérieur, mais, de façon analogue, tout phénomène « échangeable » avec l'espace et le temps [1].

A titre de rappel, la mécanique quantique relativiste a bien rendu compte du spin des particules et l'existence des antiparticules. Mais, il est à souligner qu'elle n'est pas en mesure de décrire que les phénomènes où le nombre des particules ne varie pas.

Pour CHEIKH ANTA DIOP, le théorème de GÖDEL affirme en effet que si un nombre d'axiomes, qui fonde une théorie, est riche de manière à permettre de construire l'arithmétique, il est toujours possible de formuler une proposition non décidable dans cette théorie. Cela veut dire qu'on peut toujours formuler une proposition qui n'est ni vraie ni fausse. L'équivoque ne serait levée que si l'on appliquait une axiomatique différente à la première théorie. Il en résulte que celle-là pourra être associée à une nouvelle proposition qui est non décidable, et cela indéfiniment.

En clair, pour le savant sénégalais, le théorème d'incomplétude de GÖDEL ruine donc les chances du projet hilbertien de construire, à partir d'un nombre fini d'axiomes, une mathématique universelle dans laquelle on aperçoit que toute proposition serait ou vraie ou fausse et qui se passe de la notion de l'infini. Ainsi, on se demande s'il n'est pas possible de prouver la cohérence intrinsèque de la théorie des ensembles. A cela, on ne sait pas si la théorie des ensembles contiendrait une tautologie qui n'est pas encore décelée.

Epistémologiquement parlant, il est question du statut des mathématiques. Aussi, les mathématiques ont – elles une réalité objective qui reflète la structure du réel et même de l'être (divin s'entend). Selon CANTOR, lorsqu'il a découvert les nombres transfinis et a fondé la théorie des ensembles, ou bien les mathématiques reflèteraient simplement l'esprit du mathématicien les créant.

De ce point de vue épistémologique, il se dégage que le premier cas nous montre que le nombre serait l'hypostase de l'être, et, cela plonge dans le plein néo-platonisme. Le second cas ne nous fait pas sortir du cadre néo-positiviste : le caractère arbitraire et la variété des théories axiomatiques ainsi que leur incomplétude interne s'expliqueraient. En effet, celles-ci ne renvoient donc pas à un modèle extrinsèque indépendant, qui impose les contraintes d'ordre méthodologiques inhérentes à l'étude d'une réalité objective.

Toutefois, il y a lieu de souligner que les entiers naturels ne sont pas logiquement déductibles et peuvent être considérés, d'après GÖDEL, comme existant d'eux-mêmes, des étants-là.

Il en résulte que la mécanique quantique et le théorème d'incomplétude de GÖDEL marquent un nouveau champ épistémologique où mathématique et théorie quantique concourent aux fins d'imposer des limitations infranchissables à la connaissance scientifique.

4 CONCLUSION

Au-delà d'un problème mathématique, les théorèmes d'incomplétude posent un problème scientifique beaucoup plus général. Ils montrent en effet qu'une théorie scientifique peut expliquer l'ensemble des phénomènes observés et que deux théories radicalement opposées, peuvent coexister et s'appliquer aux mêmes phénomènes naturels. A ce sujet, la coexistence de la mécanique relativiste et de la mécanique quantique en illustre l'exemple le plus frappant.

Il résulte que la mécanique quantique relativiste et les théorèmes d'incomplétude de GÖDEL marquent un nouveau champ épistémologique où mathématique et théorie quantique relativiste concourent aux fins d'imposer des limitations infranchissables à la connaissance scientifique.

REFERENCES

- [1] GUY Bernard : Relier la mécanique quantique et la relativité générale ? Réflexions et propositions, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2013.
- [2] GÖDEL Kurt, "Some Basic Theorems on The Foundations of Mathematics and Their Implications" (1951), Printed in Collected Works/Kurt GÖDEL V. III; edited by Solomon FEFERMAN, Clarendon Press; New York; Oxford University Press, pp.304-323, 1995.
- [3] J. Ladrière : Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.
- [4] W.N. REINHARDT, "Epistemic Theories and The Interpretation of Gödel's Incompleteness Theorems", Journal of Philosophical Logics, 15, pp. 427-471, 1986.
- [5] G. SCHURZ, "Mc call and Raatikainen on Mechanism and incompleteness [S. Mc CALL, On "Seeing" the Truth of the Gödel Sentence; P. RAATIKANIEN, Mc Call's Gödelian Argument is Invalid...], Facta Philos, n°1 (4), pp. 171-174, 2002.