International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 3 Oct. 2017, pp. 449-460

http://www.ijias.issr-journals.org/

Sur l'étude didactique du rapport au savoir des élèves et la problématique du niveau dudit rapport : Cas du théorème de Pythagore

Israël DISASHI KABADI

Chef de Travaux au Département de Mathématique et Informatique,
Université Pédagogique Nationale (U.P.N.), KINSHASA,
RD Congo

ABSTRACT: This article presents our analyses, in a didactical approach of the relationship to knowledge, from the didactic writings relating to situations of teaching-learning of the Pythagoras's theorem, which writings have allowed us, with manual and official programs school most used in the DRC at the level of 3[RD] and 4[th] years secondary, to define, in terms of *"3C relationships"* [Rap1(Relationship of Knowledge), Rap2(Relationship of comprehension) and Rap3(Relationship of contextualisation)] relations that an individual or institution can maintain with the Pythagoras's theorem, on the one hand; and put on feet, from the notes of *3C relationships* defined in this study, three levels to appreciate the evolution of the relationship to knowledge of students to the Pythagoras's theorem, including the level "low", "medium" and "high", on the other hand. This allows the operationalization of the relationship to knowledge on the didactical plan. The article also has some variables that we used to enjoy their possible influence on the relationship to knowledge in study, among students in the classes of Scientific Humanities of a school chosen to test the feasibility of the didactical study of *3C relationships*.

KEYWORDS: Didactics of mathematics, teaching science, didactical approach of the relationship to knowledge, *3C relationships*, anthropological approach, level scale, Pythagoras's theorem.

RESUME: Cet article présente nos analyses faites, dans une approche didactique du rapport au savoir, à partir des écrits didactiques relatifs aux situations d'enseignement/apprentissage du théorème de Pythagore, lesquels écrits nous ont permis , avec les programmes officiels et manuels scolaires les plus utilisés en RDC au niveau de 3[ème] et 4[ème] années secondaires, de définir en termes de « *rapports de 3C* » [Rap1(=rapport de **C**onnaissance), Rap2 (=rapport de **C**ompréhension) et Rap3 (=rapport de **C**ontextualisation)] les relations qu'un individu ou une institution peut entretenir avec le théorème de Pythagore, d'une part ; et de mettre sur pieds, à partir des notes de *rapports de 3C* définies dans cette étude, une échelle de trois niveaux pour apprécier l'évolution du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore, notamment le niveau « bas », celui « moyen » et celui « élevé », d'autre part. Ceci a facilité l'opérationnalisation du rapport au savoir sur le plan didactique. L'article présente également certaines variables auxquelles nous avons recouru pour apprécier leur éventuelle influence sur le rapport au savoir en étude, auprès des élèves dans les classes des humanités scientifiques d'une école choisie en vue de tester la faisabilité de l'étude didactique des *rapports de 3C*.

MOTS-CLEFS: Didactique des mathématiques, Didactique des sciences, Approche didactique du rapport au savoir, *Rapports de 3C*, Approche anthropologique, Echelle des niveaux, Théorème de Pythagore.

1 Contexte Du Questionnement

1.1 La question du théorème de Pythagore au sein des recherches en didactique des mathématiques

Le concept objet de connaissance pour notre recherche, à savoir « le théorème de Pythagore », a été l'objet de plusieurs recherches en mathématiques ; ces dernières visant son origine, sa démonstration et ses applications dans le cadre de l'enseignement, étant donné que chaque concept, chaque théorème n'a d'intérêt que dans son rapport précis et quantifié au « sens » qui éclaire la discipline dans son intégralité, comme l'a dit Philippe LOMBART[1] dans son article sur « Peut-on envisager une transposition didactique des mathématiques qui les rendent accessibles au plus grand nombre ? ».

Dans leur article sur ''Autour de l'enseignement de la géométrie au collège'', Yves Chevallard et Michel Jullien nous déclarent qu'aujourd'hui, on peut dire que la géométrie part du monde sensible pour se constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles, des sphères, des courbes, des surfaces et des volumes, etc. ; de la même façon que, plus largement, la physique part du monde sensible pour le constituer en monde physique. Cet article nous parle aussi du paradigme géométrique que l'élève va devoir apprendre à maîtriser, notamment, « manipuler avec pertinence les sur- et sous-figures », sachant que la conception d'une figure comme représentation d'objets de l'espace est un frein ou obstacle à ce libre jeu avec les figures perçues comme ensembles des points de l'espace qui font fécondité de la géométrie. Cette figure, à construire par le géomètre, doit être effectivement l'objet d'étude pour en faire dériver l'objet matériel.

Par ailleurs, l'enseignement de la géométrie devant tenir compte des trois aspects de la géométrie développés par GONSETH[2] (1946) notamment l'aspect intuitif, celui rationnel et celui expérimental, lesquels aspects représentent pour lui les trois aspects de la connaissance, le théorème de Pythagore n'en fait pas exception du fait qu'elle est basée sur l'étude des relations entre les mesures des côtés des triangles rectangles, une des figures géométriques.

En outre, nous prenons en compte les paradigmes géométriques définis par Alain KUZNIAK pour l'étude de la géométrie enseignée, à savoir les paradigmes GI (géométrie naturelle), GII (la géométrie axiomatique naturelle) et GIII (la géométrie axiomatique formaliste), lesquels paradigmes lui ont permis d'aborder le problème de la clarté du paradigme géométrique mis en jeu sous son double aspect : celui dépendant du cadre institutionnel (les cadres doivent savoir dans quel paradigme leurs compétences sont testées) et celui dépendant de la nature des problèmes posés (les acteurs doivent identifier que les problèmes posés sont (-ils) clairement dans le paradigme en question).

Le travail géométrique se déployant dans un espace particulier, KUZNIAK a défini cet espace comme un Espace de Travail Géométrique (ETG), lequel espace est sujet, de fois, de malentendus qui doivent être levés par une analyse épistémologique. C'est ainsi qu'il a pu introduire deux formes, ci-dessous, du *théorème de Pythagore*, lesquelles formes ont le mérite d'illustrer le jeu des paradigmes géométriques utile en vue d'une évaluation conséquente:

- *Forme abstraite classique* portant sur des nombres réels et sur des égalités :

  « Si le triangle ABC est rectangle en B alors $A\ ^2 + B\ ^2 = A\ ^2$ ».

- *Forme concrète pratique* qui utilise des nombres approchés et, de façon courante, des figures approchées :

  « Si le triangle ABC est ''à peu près'' rectangle en B alors $A\ ^2 + B\ ^2 \cong A\ ^2$ ».

En effet, si l'image proposée dans un domaine de géométrie est considérée comme objet matériel dessiné, on peut recourir à la forme concrète pratique du théorème de Pythagore pour le résoudre, et on est, précise KUZNIAK, à un niveau avancé de la géométrie naturelle (GI). En se plaçant ainsi dans la géométrie I, il sera possible que l'on mesure et utilise les outils de construction comme instrument de mesure. Mais le théorème de Pythagore joue un rôle fondamental dans certains types de problèmes en évitant le recours à une mesure effective, ce qui permet un changement de cadre[3] en privilégiant l'approche numérique de la géométrie. Par ailleurs, en se plaçant dans la géométrie II, on considérera que les valeurs données sur une

[1] Lombard (2003) : www.irem.univ-lorraine.fr/Lomb/sens.pdf
[2] GONSETH, F. (1946).
[3] Dans le sens employé par Douady.

image proposée dans un problème ne sont pas des valeurs mesurées mais des valeurs exactes, et par voie de conséquence on va utiliser le théorème de Pythagore dans sa forme abstraite classique.

1.2 LA QUESTION DU RAPPORT AU SAVOIR AU SEIN DES RECHERCHES EN DIDACTIQUES DES SCIENCES

Le concept du rapport au savoir a été l'objet des plusieurs recherches visant entre autre sa définition, son utilité. Les travaux menés autour de ce concept de rapport au savoir se situent actuellement dans plusieurs champs de recherche notamment sociologique [Bourdieu, 1964], clinique [Beillerot, 1989], microsociologique [Charlot, 1997], macrosociologique [Hayder, 1977], anthropologique [Chevallard, 1992], didactique [Chartrain, 1998].

Nous considérons que *le rapport au savoir* est une relation qui peut exister entre d'un côté le savoir et de l'autre côté un individu ou une institution. Cependant, parmi ces champs de recherche sur le concept de rapport au savoir, nous avons constaté, du moins respectivement dans la triple approche théorique ci-après, ce qui suit :

- ✓ Dans l'approche sociologique : ces relations sont identifiables en termes d'attitudes que l'on retrouve dans l'échelle d'attitudes définie par le groupe de recherche ''Education, Didactiques et Psychologie'' [CHABCHOUB, A. 2001][4], l'entrée de ce rapport au savoir étant du côté du sujet psycho-social. Et on peut apprécier l'évolution de ce rapport au savoir.
- ✓ Dans l'approche anthropologique : ces relations sont identifiables en termes de compétences, car elles sont en principe commandées par un rapport à la connaissance qui met au premier plan la fonctionnalité des savoirs ou leur utilité publique et privée ; l'entrée de ce rapport au savoir étant prééminente du côté du sujet cognitif. Et on peut également apprécier l'évolution de ce rapport au savoir.
- ✓ Dans l'approche didactique : ces relations se démarquent des attitudes et des compétences, et donc restent à définir ; l'entrée de ce rapport au savoir étant du côté du savoir. Ainsi, l'évolution de ce rapport au savoir reste à définir.

2 CADRE THEORIQUE ADOPTE ET QUESTIONNEMENT

Il est vrai qu'il n'y a pas de savoir sans rapport au savoir. De surcroit, le rapport au savoir d'un individu se construit et évolue de sorte que l'échec scolaire [Charlot, 1984] d'un élève se comprend dans comment se constitue son rapport au savoir d'un côté, et comment s'articule les différents niveaux de ce rapport au savoir, de l'autre côté ; ce rapport au savoir pouvant ainsi être influencé lors des situations d'apprentissages.

Sur ce, et en considérant que le théorème de Pythagore, comme tout autre concept ou théorème, n'a d'intérêt que dans son rapport précis et quantifié[5] au « sens » qui éclaire la discipline dans son intégralité, nous avons adopté une approche théorique, notamment l'approche didactique du rapport au savoir, en nous intéressant à la problématique de l'opérationnalisation du rapport au savoir, plus précisément des relations des élèves au théorème de Pythagore, en vue de pouvoir déterminer une échelle des niveaux susceptible de faciliter l'étude de l'évolution dudit rapport au savoir. Ainsi, notre questionnement se présente de la manière suivante :

« Comment peut-on arriver à opérationnaliser le rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore et déterminer le niveau dudit rapport au savoir sur le plan didactique ? Quelles variables peuvent influencer ce rapport au savoir ? »

Nous avons fait nos investigations dans cette étude sur base de l'hypothèse ci-après :

«L'analyse des écrits didactiques relatifs aux réflexions sur les situations d'enseignement/apprentissage du théorème de Pythagore pourrait conduire à la détermination des relations audit théorème, et en faciliter ainsi la mise sur pied d'une échelle des niveaux utile pour l'étude éventuelle de l'évolution du rapport personnel des élèves. Le niveau des classes, l'élève lui-même et/ou les variables didactiques peuvent influencer ce rapport au savoir. »

Pour rendre notre étude plus intéressante, nous avons pris l'option de tester la faisabilité d'une étude didactique du rapport au savoir au théorème de Pythagore en prenant en compte le fait que l'on ne peut pas comprendre les apprentissages personnels des élèves si l'on ne cherche pas [Y. Chevallard, 1992] à comprendre les apprentissages institutionnels, et que

[4] *A.M. Lamine :« Pertinence et limites de la notion de rapport au savoir en didactiques des sciences ». L'échelle a pour attitudes : Attitude de rejet, attitude d'implication, attitude de déchirement, attitude nuancée et attitude utilitaire.*
[5] *LOMBARD, P. (2003), p. 4.*

semblablement, on ne peut pas comprendre les échecs d'apprentissages personnels sans prendre en compte le refus de connaitre de certaines institutions dont l'élève (ou la personne) en échec est le sujet. Ceci nous a poussé à prendre en compte l'approche anthropologique du rapport au savoir, afin d'interroger d'abord les institutions scolaires, par l'analyse des programmes officiels et des manuels scolaires en vue d'y découvrir les relations prises en compte, et ensuite, interroger les élèves au travers d'un questionnaire de recherche mettant en jeu les différentes relations au théorème de Pythagore, avec pour finalité l'appréciation de la superposition éventuelle des deux rapports (de l'institution et de l'élève) au savoir en jeu.

L'intérêt majeur de ce travail réside en ce qu'il permet d'étudier la pertinence éventuelle du rapport au savoir, laquelle pertinence, une fois constatée, rendra justifiée une intervention didactique en vue de faire évoluer [R. Douady, 1996] ledit rapport au travers d'une ingénierie didactique appropriée.

3 METHODOLOGIE

Pour atteindre l'objectif de notre étude, nous avons choisi respectivement trois volées pour nos investigations de la manière suivante :

1. Détermination opérationnelle du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore.
2. Détermination opérationnelle d'une échelle des niveaux du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore.
3. Exemple d'étude didactique du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore.

Pour les deux premières volées, nous avons utilisé les méthodes documentaire et d'analyse afin de non seulement appréhender les différentes relations, mais, également, de les définir en vue de mettre au point une échelle des niveaux y relatifs. Tandis que pour le troisième volet, nous avons utilisé, en sus, les techniques d'échantillonnage et la statistique pour non seulement choisir un échantillon d'étude mais également tester éventuellement nos hypothèses de travail.

Notre exemple d'étude didactique du rapport au savoir est établi sur base d'un échantillon des 20 élèves choisis à raison de 5 élèves par niveau des classes (3è, 4è, 5è et 6è année secondaire) dans la section scientifique d'une école secondaire dans le cadre d'une étude prospective et sous les conditions de fonctionnement à deux gongs garantissant un meilleur encadrement des élèves.

4 PRESENTATION DES RESULTATS

4.1 DÉTERMINATION OPÉRATIONNELLE DU RAPPORT AU SAVOIR DES ÉLÈVES AU THÉORÈME DE PYTHAGORE

En analysant les écrits didactiques relatifs aux problèmes d'enseignement/apprentissage du théorème de Pythagore, nous sommes arrivés à l'identification de trois relations sur le plan didactique, ces relations étant perçues du côté de notre objet élémentaire du savoir, notamment le théorème de Pythagore, de la manière ci-dessous.

Retenant le fait que sur le plan didactique, il s'agit ici de la relation que peut entretenir un élève avec le théorème de Pythagore, le travail en amont nous a permis d'identifier ce que nous appelons en définitive « *rapports de 3C* » [**C**onnaissance, **C**ompréhension et **C**ontextualisation]. La relation d'un élève au théorème de Pythagore se manifeste sous les trois dimensions suivantes :

4.1.1 LA DIMENSION DU « RAPPORT DE CONNAISSANCE » :

En effet, un élève de 4ème année secondaire a nécessairement étudié en 3ème secondaire le théorème de Pythagore, car cet objet élémentaire de savoir y est introduit selon les textes officiels de l'EPSP, ainsi que les manuels scolaires utilisés à ce niveau d'études. Ceci nous a conduit à considérer qu'il existe au moins une relation de connaissance de cet objet auprès des élèves de 4ème année secondaire.

Ce rapport, que nous noterons par « Rap1 », sera évalué au travers des productions des élèves à notre questionnaire sur base de la capacité d'un élève à produire l'une des informations ci-après :

a. Cite ou donne : « Le théorème de Pythagore ».
b. Cite ou donne : « La relation (ou la propriété) de Pythagore » ;

4.1.2 La dimension du « rapport de Compréhension »

En effet, nous avons accepté l'idée qu'un élève [M. DEVELAY, 1995] est capable d'utiliser le théorème de Pythagore lorsqu'il a compris que ledit théorème n'est pas lié à un triangle rectangle avec seulement la connaissance de la valeur de deux côtés de l'angle droit pour la valeur de l'hypoténuse, mais que toute figure qui s'apparente à un triangle rectangle permet d'utiliser le théorème de Pythagore. Ceci nous a conduit à considérer qu'il existe au moins une relation de compréhension de cet objet auprès des élèves de 4ème année secondaire, laquelle relation se manifeste dans la reconnaissance par l'élève de toutes les formes équivalentes à la forme traditionnelle de la relation de Pythagore.

Ce rapport, que nous noterons par « Rap2 », sera évalué au travers des réponses des élèves à notre questionnaire sur base de la capacité d'un élève à utiliser le théorème de Pythagore pour toute figure qui s'apparente à un triangle rectangle, et cela en dehors du recours au jeu géométrique.

4.1.3 La dimension du « rapport de Contextualisation »

Les réflexions sur la circulation des savoirs ont permis à Eric DELAMOTTE [2002] de déclarer cette idée que nous avons également retenue, concernant la question de savoir ce que produit l'école, je cite : « Il ne s'agit plus de savoir ce que nous avons acquis, mais de savoir ce que sont nos aptitudes intellectuelles (savoir exploiter l'information, résoudre des problèmes, exercer son jugement critique, mettre en œuvre sa pensée créatrice) ». Ceci l'a conduit enfin à réaliser qu'un élève qui aura étudié le théorème de Pythagore ne le saura que lorsqu'il sera capable de le contextualiser. Ceci nous a conduit à considérer qu'il existe une relation de contextualisation de cet objet auprès des élèves de 4ème année secondaire.

Ce rapport, que nous allons noter par « Rap3 », sera évalué au travers des réponses des élèves à notre questionnaire sur base de la capacité de l'élève à exploiter l'information, à exercer son jugement critique et à mettre en œuvre sa pensée créatrice jusqu'à trouver une figure s'apparentant au triangle rectangle, contexte favorable à l'utilisation du théorème de Pythagore. En effet, ceci va se manifester lorsque l'élève manipulera avec maitrise le jeu géométrique en utilisant les informations implicites pertinentes qu'il aura découvertes dans le problème à résoudre.

En conclusion, nous avons retenu le fait qu'un élève entretient l'un de ces rapports lorsqu'il aura utilisé le théorème de Pythagore dans plus de 50% des questions relatives audit rapport.

4.2 Détermination opérationnelle d'une échelle des niveaux du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore

Pour faciliter la mise sur pied d'une échelle des niveaux du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore sur le plan didactique, nous avons arrêté les principes de cotations ci-après pour les élèves:

- La côte A : l'élève entretient exactement tous les *rapports de 3C*.
- La côte B : l'élève entretient exactement deux des *rapports de 3C*.
- La côte C : l'élève entretient exactement un des *rapports de 3C*.
- La côte D : l'élève n'entretient aucun des *rapports de 3C*.

Les côtes ci-dessus nous ont aidé à définir une échelle de trois niveaux du rapport au savoir d'un élève au théorème de Pythagore, notamment le niveau « bas », le niveau « moyen » et le niveau « élevé », de la manière suivante :

- Le niveau « bas » : l'élève a obtenu une des côtes C et/ou D.
- Le niveau « moyen » : l'élève a obtenu la côte B.
- Le niveau « élevé » : l'élève a obtenu la côte A.

L'évolution de ce rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore va ainsi de l'ignorance ou la maîtrise d'un des *rapports de 3C* à la maîtrise de tous les *rapports de 3C*.

4.3 Exemple d'étude didactique du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore : cas des élèves des humanités scientifiques

4.3.1 Sur le plan institutionnel

Pour aller à la découverte des *rapports des 3C* institutionnalisés, nous avons pu porter le choix sur l'analyse, d'une part, des programmes officiels de 3è et 4è années secondaires au travers des contenus prévus de paire avec leurs objectifs spécifiques et indications méthodologiques, et d'autre part, des manuels scolaires les plus utilisés, de 3è et 4è années, notamment « Maîtriser les maths 3è » et « Maîtriser les maths 4è » : au travers de l'introduction du concept de théorème de Pythagore, essentiellement sur son institutionnalisation, et des exercices proposés aux élèves. L'introduction du théorème de Pythagore a été perçue au travers des définitions, des exemples et des démonstrations ; tandis que les exercices ont été analysés sur quatre volées ci-dessous :

- Le **type d'exercices** proposés (obtenu à l'issue d'un essai de catégorisation au mieux des énoncés), avec l'identification des rapports au savoir en jeu sur le plan didactique, ainsi que les variables didactiques en présence avec le niveau d'autonomie requis aux élèves.
- Les **cadres** [R. DOUADY, 1986] présents dans chaque exercice.
- Prenant en compte le discours soutenu par A. KUZNIAK, à propos des **paradigmes géométriques**, nous avons identifié les différents paradigmes géométriques présents dans chaque exercice. Il s'agissait de voir si oui ou non les exercices présentent des ambiguïtés donnant aux élèves la possibilité de choisir entre au moins deux paradigmes géométriques.
- Les **complexités des expressions** en jeu dans chaque exercice, ainsi que le degré des difficultés à reconnaître que le théorème de Pythagore est un outil pour la résolution du problème posé, ceci étant apprécié au travers de la présence explicite ou non du triangle rectangle. A propos des complexités, nous nous sommes intéressés par exemple, aux lettres choisies pour désigner les inconnus, au nombre des termes utilisés, aux exposants des expressions utilisés.

A l'issue de nos analyses sur les manuels scolaires, nous avons remarqué que, sur le plan didactique, à travers l'introduction du théorème de Pythagore, d'une part, les auteurs ont exploité les trois *rapports de 3C* de manière à peu près égale, et qu'à travers les 164 exercices relatifs aux applications (directes ou indirectes) dudit théorème, d'autre part, 7 cas se rapportent au rapport de connaissance (**Rap1**), 95 cas au rapport de compréhension (**Rap2**) et 37 cas au rapport de contextualisation (**Rap3**). Sachant que les programmes officiels analysés reconnaissent les trois *rapports de 3C*, ceci nous permet de dire que si le discours officiel de l'enseignant a été le même que son discours ostensif en classe, l'élève aurait développé les trois *rapports de 3C* ou du moins deux d'entre eux. Du reste tout élève des humanités scientifiques passe par la 3ème année scientifique où l'on commence à appliquer explicitement le théorème de Pythagore.

Du point de vue variable didactique, les auteurs des manuels scolaires ont exploité différemment, dans leurs chapitres relatifs aux applications du théorème de Pythagore, les variables didactiques ci-après : le dessin, l'ensemble de référence, la multiplicité d'application du théorème de Pythagore, la situation du problème et la méthode proposée. Cependant, pour cet article, nous ne nous sommes pas intéressés à apprécier l'éventuelle influence de la dernière variable, notamment la méthode proposée.

Par ailleurs, le jeu géométrique des « sur- et sous-figures » ayant été exploité par les auteurs au travers des exercices (problèmes) relatifs aux calculs de la diagonale d'un carré, d'une part, et de la hauteur d'un triangle équilatéral, d'autre part, cela en conformité avec les dispositions arrêtées dans les programmes officiels en cette matière, nous pensons que la présence de ce jeu dans le discours ostensif de l'enseignant en classe permettrait aux élèves d'en avoir éventuellement la maîtrise. Cependant, l'aspect instrumental du théorème de Pythagore a été laissé à l'appréciation des élèves du moins au travers des manuels scolaires que nous avons analysés, car notre constat est tel que sur les 164 exercices y proposés, 149 auraient une vision intuitive, 10 une vision rationnelle et 2 une vision expérimentale, en tenant compte de leurs différentes catégories.

4.3.2 SUR LE PLAN PERSONNEL

Le questionnaire de recherche qui nous a permis d'apprécier la maîtrise des élèves pour ce qui concerne les *rapports de 3C* a connu une double analyse : une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori*. L'analyse *a priori* a eu le mérite d'être basée sur les aspects ci-après :

(1). Les *rapports de 3C* attendus des élèves par rapport au théorème de Pythagore.
(2). Les capacités nécessaires pour la manifestation de ces *rapports de 3C*.
(3). Les variables didactiques dans le cadre des compétences géométriques.
(4). Les réponses attendues des élèves.
(5). Les difficultés éventuelles des élèves.
(6). Les hypothèses sur le jeu des paradigmes géométriques.

Tandis que l'analyse *a posteriori* a pu être faite sur base des productions des élèves.

La maîtrise, des *rapports de 3C*, s'étant faite apercevoir par le recours au théorème de Pythagore dans la résolution des exercices par les élèves, nous avons remarqué que, sur les 22 questions, le nombre de fois que les élèves d'une classe donnée ont pu **u**tiliser le **t**héorème de **P**ythagore (**UTP**) soit avec une bonne réponse (+1), soit avec une mauvaise réponse (-1), ou **n**'ont pas pu **u**tiliser le **t**héorème de **P**ythagore (**NUTP**) soit avec une réponse donnée (0), soit sans aucune réponse (x) ; se présente de la manière ci-après :

Tableau 1. Tableau du recours au théorème de Pythagore par les élèves selon les niveaux des classes

TP / Niveau Classe	UTP		NUTP	
	(1+)[1]	(1-)[2]	(0)[3]	(x)[4]
3è Scient.	15	11	27	25
4è Scient.	19	15	19	27
5è Scient.	38	8	12	19
6è Scient.	23	8	10	37

Légende :

(1+) = Avec Bonne Réponse.
(1-) = Sans Bonne Réponse.
(0) = Avec Réponse.
(x) = Sans Réponse

Nous remarquons que les élèves de 5ème année et 4ème année scientifique ont été meilleurs que ceux de 6ème année et 3ème année scientifique par rapport à leur recours au théorème de Pythagore, tandis que les élèves de 5è et 6è ont été meilleurs que ceux de 3è et 4è quant au pourcentage relatif au recours au théorème de Pythagore avec bonne réponse dans chaque Classe.

5 VERIFICATIONS DES HYPOTHESES

5.1 CONCERNANT L'OPÉRATIONNALISATION DU RAPPORT AU SAVOIR SUR LE PLAN DIDACTIQUE

L'analyse des écrits didactiques, de paire avec quelques programmes officiels et manuels scolaires, nous a conduit à retenir trois rapports au théorème de Pythagore dans une approche didactique du rapport au savoir, notamment les relations que nous avons définies en termes de « *rapports de 3C* » [Rap1 (rapport de connaissance), Rap2 (rapport de compréhension) et Rap3 (rapport de contextualisation)].

Dès lors, nous nous sommes posé la question de savoir si le recours des élèves au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes, différerait d'un des *rapports de 3C* à l'autre, significativement ou non. Pour cela, nous avons recouru au test q de Cochran. En effet, pour N=20 (taille de notre échantillon), K=3 (nombre des *rapports de 3C*), on a, après calcul, q = 18,727. Or la table de Khi-Deux nous donne, au seuil de p = 0,01 avec dl = 2, χ^2_{t} = 9,21. Donc, on a q >χ^2_t . D'où l'hypothèse H_0 est rejetée. Ce qui atteste que le recours des élèves au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes différerait significativement avec 99 % de confiance.

Nous avons, en outre, obtenu les résultats ci-après, lesquels résultats regroupent les élèves du point de vue maîtrise des *rapports de 3C* par niveau de classe :

Tableau 2. Tableau de maitrise des rapports de 3C selon les niveaux des classes chez les élèves

Rapport de 3C / Niveau classe	Rap1	Rap2	Rap3	EFFECTIF
3è Sc.	1	3	1	5
4è Sc.	1	4	1	5
5è Sc.	2	5	3	5
6è Sc.	1	4	2	5
TOTAL	5	16	7	20

Il ressort de ce tableau que le rapport de compréhension (Rap2) serait mieux maîtrisé par les élèves à 80 % (soit 16/20) que les autres *rapports de 3C*, notamment le rapport de contextualisation (Rap3) à 35 % (soit 7/20) et le rapport de connaissance (Rap1) à 25 % (soit 5/20).

De ce qui précède, nous constatons que l'opérationnalisation des *rapports de 3C* du théorème de Pythagore est possible, et que donc notre hypothèse à ce niveau s'avère confirmée.

5.2 Concernant l'échelle des niveaux du rapport au savoir sur le plan didactique

Les données de notre recherche nous ont permis de réaliser par le tableau ci-dessous, le dénombrement d'élèves du point de vue note de r*apports de 3C* et par niveau de classes.

Tableau 3. Tableau des notes des rapports de 3C obtenues par niveau de classe chez les élèves

Notes *rapports 3C* / Niveau classe	A	B	C	D	TOTAL
3è Sc.	1	0	2	2	5
4è Sc.	1	0	3	1	5
5è Sc.	2	1	2	0	5
6è Sc.	1	1	2	1	5
TOTAL	5	2	9	4	20

Nous constatons que, pour notre échantillon, 25 % d'élèves ont la maîtrise de tous les *rapports de 3C*, tandis que 10 % d'élèves en ont maîtrisé deux, 45 % d'élèves en ont maîtrisé 1 et 20 % d'élèves n'en ont maîtrisé aucun. Ce qui reflète, du point de vue *rapports de 3C*, que :

- Il y a 5 élèves dont le rapport personnel est superposable au rapport institutionnel au théorème de Pythagore, et ont donc le niveau **élevé**.
- Il y a 2 élèves dont le rapport personnel est presque superposable au rapport institutionnel au théorème de Pythagore, et donc le niveau **moyen**.
- Il y a 13 élèves dont le rapport personnel est non superposable au rapport institutionnel au théorème de Pythagore, et ont donc le niveau **bas**.

Il est donc établi l'existence d'une échelle opérationnelle des niveaux du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore, une échelle ayant trois niveaux à savoir : niveau **bas**, niveau **moyen** et niveau **élevé** en vue d'évaluer l'évolution dudit rapport. Ce qui nous permet de considérer que notre hypothèse à ce niveau s'avère confirmée.

5.3 Concernant les variables susceptibles d'influencer le rapport au savoir sur le plan didactique

5.3.1 Cas de niveau des classes

Pour nous permettre de vérifier l'hypothèse sur l'influence éventuelle du niveau des classes sur les *rapports de 3C*, nous avons considéré le tableau des contingences, lequel tableau donne l'effectif des élèves dans chaque groupe des notes de *rapports de 3C* [notamment le groupe des cotes A et B ainsi que le groupe des cotes C et D], et par niveau des classes.

La taille N de notre échantillon étant égale à 20 (N<30), nous avons utilisé, vu les valeurs des effectifs théoriques, le test logarithmique de SPITZ pour tester notre hypothèse. En effet, nous avons, après calcul, l = 2,42958375. Or la table de Khi-Deux nous donne, au seuil de p = 0,05 avec le degré de liberté dl = 3, la valeur χ_t^2 = 7,815. On a ainsi $l < \chi_t^2$. Donc l'hypothèse H_0 est confirmée. D'où, statistiquement, le niveau de classe n'influerait pas à 95 % de confiance sur les notes de *rapports de 3C*, et en conséquence sur les *rapports de 3C*. Ceci contredit notre hypothèse selon laquelle le niveau de classes influerait sur les *rapports de 3C*.

5.3.2 Cas de l'élève lui-même

Nous avons considéré les tableaux de contingences, lesquels tableaux donnent l'effectif des élèves dans chaque groupe des notes des *rapports de 3C*, et par l'élève (soit par son sexe soit par son âge), afin d'apprécier l'influence éventuelle de l'élève (soit de son sexe, soit de son âge) sur les *rapports de 3C* en se basant sur ces groupes des notes de *rapports de 3C* [A&B et C&D].

B.1. LE SEXE

La taille N de notre échantillon étant égale à 20 (N<30), nous avons également utilisé, vu les valeurs des effectifs théoriques, le test logarithmique de SPITZ pour tester notre hypothèse. En effet, nous avons, après calcul, l = 0,70349132. Or la table de Khi-Deux nous donne, au seuil de p = 0,05 avec le degré de liberté dl = 1, la valeur χ_t^2 = 3,841. On a ainsi l < χ_t^2 . Donc l'hypothèse H_0 est confirmée. D'où, statistiquement, le sexe de l'élève n'influerait pas à 95 % de confiance sur les notes de *rapports de 3C*, et en conséquence sur les *rapports de 3C*.

B.2. L'AGE

La taille N de notre échantillon étant égale à 20 (N<30), nous avons également utilisé, vu les valeurs des effectifs théoriques, le test logarithmique de SPITZ pour tester notre hypothèse. En effet, nous avons, après calcul, l = 0,28886608. Or la table de Khi-Deux nous donne, au seuil de p = 0,05 avec le degré de liberté dl = 1, la valeur χ_t^2 = 3,841. On a ainsi l < χ_t^2 . Donc l'hypothèse H_0 est confirmée. D'où, statistiquement, l'âge de l'élève n'influerait pas à 95 % de confiance sur les notes de *rapports de 3C*, et en conséquence sur les *rapports de 3C*.

De (b.1.) et (b.2.), nous constatons que statistiquement l'élève n'influerait pas, à 95 % de confiance, sur les *rapports de 3C*. Ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle l'élève lui-même influerait sur les *rapports des 3C*.

5.3.3 CAS DE VARIABLE DIDACTIQUE

C.1. LE DESSIN

Le tableau des contingences entre le dessin réaliste et le dessin non réaliste nous renseigne sur le nombre d'élèves ayant recouru ou non au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes y relatifs.

Comme l'échantillon est petit (N=20<30), nous avons calculé la valeur de chi-deux par :

$$\chi^2 = \frac{(|9-0|-1)^2}{9+0} = 7{,}11$$

Le degré de liberté étant égal à 1, la table nous indique que pour un niveau de confiance de 99% le chi-deux est de 6,635. Ainsi, notre résultat χ^2 =7,11 est supérieur à 6,635. D'où H_0 rejetée, et nous tirons la conclusion que le dessin influerait sur le rapport au savoir des élèves. Ce qui confirme notre hypothèse de départ.

C.2. LA SITUATION DU PROBLÈME

Le tableau des contingences entre la situation mathématique (**SM**) et la situation de vie (**SV**) nous renseigne sur le nombre d'élèves ayant recouru ou non au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes y relatifs.

Comme l'échantillon est petit (N=20<30), nous avons calculé la valeur de chi-deux par $\chi^2 = \frac{(|1-3|-1)^2}{1+3} = 0{,}25$. Le degré de liberté étant égal à 1, la table nous indique que, pour un niveau de confiance de 99,9%, le chi-deux est de 10,827. Donc, notre résultat, qui est χ^2 = 0,25, est inférieur à 10,827. D'où H_0 acceptée, et nous tirons la conclusion que la situation du problème n'influerait pas sur le rapport au savoir des élèves. Ce qui contredit notre hypothèse de départ.

C.3. LA MULTIPLICITÉ D'APPLICATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Le tableau des contingences entre l'application simple (**AS**) et l'application multiple (**AM**) du théorème de Pythagore nous renseigne sur le nombre d'élèves ayant recouru ou non au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes y relatifs.

Comme l'échantillon est petit (N=20<30), nous allons calculer la valeur de chi-deux par $\chi^2 = \frac{(|2-4|-1)^2}{2+4} \approx 0{,}167$. Le degré de liberté étant égal à 1, la table nous indique que, pour un niveau de confiance de 99%, le chi-deux est de 6,635. Donc, notre résultat, qui est χ^2 = 0,167, est inférieur à 6,635. D'où H_0 acceptée, et nous tirons la conclusion que la multiplicité d'application du théorème de Pythagore n'influerait pas sur le rapport au savoir des élèves. Ce qui contredit notre hypothèse de départ.

C.4. L'ENSEMBLE DE RÉFÉRENCE DU PROBLÈME

Le tableau croisé entre les élèves (en ligne) et les ensembles de références (en colonne) nous permet de faire l'étude globale du facteur « *recours au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes* » en fonction du rang (= l'ensemble de référence considéré), en utilisant le test q de Cochran comme suit :

$$q = \frac{(K-1)[K\sum_{j=1}^{K} G_j{}^2 - (\sum_{j=1}^{K} G_j)^2]}{K\sum_{i=1}^{N} L_i - \sum_{i=1}^{N} L_i{}^2}$$

Où :

K = nombre des ensembles de références.
N = effectif des élèves.
G_j= nombre de « recours au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes » (i.e. « 1 ») dans la j^{ème} colonne.
L_i = nombre de « recours au théorème de Pythagore dans la résolution des problèmes » (i.e. « 1 ») dans la i^{ème} ligne.

En effet, K=3 et N=20. Ce qui nous permet de calculer la valeur de q ci-après :

$$q = \frac{2.[3.(2\quad) - (2\quad)^2]}{3.(2\quad) - 4} = \frac{2.[7\quad - 5\quad]}{7\quad - 7} = \frac{2(1\quad)}{2} = 10{,}5.$$

Le degré de liberté étant égal à dl = k -1 = 2, la table de (χ^2) chi-deux, nous indique que pour un niveau de confiance de 99%, le chi-deux est de 9,21. Ainsi, notre résultat q = 10,5 est supérieur à 9,21. D'où H_0 rejetée, et nous tirons la conclusion que l'ensemble de référence influerait sur le rapport au savoir des élèves. Ce qui confirme notre hypothèse de départ.

6 CONCLUSION

Le concept du rapport au savoir est d'une grande actualité dans les recherches non seulement en sciences de l'éducation, mais également en sciences mathématiques et didactique, car il n'y a pas de savoir sans rapport au savoir. Le rapport au savoir peut, en outre, être pertinent et ainsi conduire à une intervention didactique par le biais d'une ingénierie didactique en vue de son évolution, de son amélioration auprès des élèves.

Notre étude sur le rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore dans une approche didactique nous a permis d'arriver aux considérations ci-après :

1. L'opérationnalisation du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore est possible avec les r*apports de 3C* que nous avons identifiés, notamment : Rap1 (**rapport de connaissance**), Rap2 (**rapport de compréhension**) et Rap3 (**rapport de contextualisation**) ; étant donné que le recours des élèves au théorème de Pythagore lors de la résolution des problèmes s'est avéré significativement différent d'un des *rapports de 3C* à l'autre.
2. La détermination du niveau du rapport au savoir des élèves est possible sur base d'une échelle des niveaux, notamment cette échelle opérationnelle de trois niveaux que nous avons définie de la manière suivante: niveau « bas » (pour l'ignorance ou le développement d'un des *rapports de 3C* chez l'élève), niveau « moyen » (pour le développement d'exactement deux des *rapports de 3C* chez l'élève) et niveau « élevé » (pour le développement de tous les *rapports de 3C* chez l'élève). Par exemple, notre étude faite, dans une approche didactique, sur le rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore, dans les humanités scientifiques d'une école, nous a conduits au résultat ci-après : le niveau du rapport au savoir est majoritairement bas (13/20 soit 65 %).
3. La détermination des variables susceptibles d'influencer le rapport au savoir est possible avec l'usage des tests statistiques. D'où, le dessin et l'ensemble de référence de l'enseignement influeraient sur les *rapports de 3C* avec un niveau de confiance de 99 %, contrairement à la situation du problème et à la multiplicité d'application du théorème de Pythagore. Ces résultats peuvent être sujets de vérification sur un grand échantillon.

En réfléchissant sur les éventuelles causes de ce niveau bas du rapport au savoir des élèves au théorème de Pythagore dans le cas de notre exemple, nous avons pris pour hypothèse l'idée de Tonnelle (1979) selon laquelle c'est le discours ostensif plutôt que le discours officiel de l'enseignement qui détermine les décisions prises par les élèves. Nous admettons dans ce cas que le discours ostensif des enseignants serait différent du discours officiel, ceci pouvant être aussi probablement dû au niveau bas du rapport personnel de l'enseignant au théorème de Pythagore. Et ainsi, il s'avérerait justifier une intervention didactique à deux niveaux : d'une part auprès des enseignants et d'autre part auprès des élèves afin de faire évoluer le rapport personnel des uns et des autres au théorème en jeu.

Comme perspectives d'avenir, cette étude permet de continuer des recherches basées sur :

- Une étude didactique du rapport au savoir en se basant sur les *rapports de 3C*, notamment le rapport de connaissance, celui de compréhension et celui de contextualisation.
- Une contribution du rapport au savoir au processus d'ingénierie didactique en vue d'une intervention didactique appropriée devant faire évoluer le niveau dudit rapport.

Enfin, notre recommandation s'adresse en particulier aux enseignants et concerne la prise en charge de l'organisation des situations d'apprentissage tenant compte des *rapports de 3C* de manière à peu près équitable en vue de promouvoir auprès des élèves un meilleur niveau du rapport au savoir.

REFERENCES

[1] ASTOLFI, J.P. et DEVELAY, M. (1989) : " *La didactique des sciences* ", Que sais-je ? Paris, France : PUF.

[2] BADETTY L. et Cie (2001): " *Maitriser les Maths 4* ", Kinshasa, RDC : Editions Loyola.

[3] BEILLEROT, J. (1989): " *Savoir et rapport au savoir* ", Paris, France : Ed. Universitaires.

[4] BKOUCHE, R., CHARLOT, B. et ROUCHE, N. (1991) : " Le rapport au savoir ", in *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Paris, France : Colin, 253 p. (p. 215-240). (11/1992.1044)

[5] BKOUCHE, R. (2006) : " La géométrie entre mathématiques et sciences physiques. ", in Kourkoulos, M., Troulis, G., et Tzanakis, C. (dir) *Proceedings of 4th International colloquium on the Didactics of mathematics,* volume II, Université de Crète.

[6] BOURDIEU, Passeron (1964) : " *Les Héritiers* ", Paris, France : Ed. Minuit.

[7] CAILLOT, M. (2000) : " Rapport (s) au (x) savoir (s) et apprentissages de sciences ", Communications faite au Colloque *'rapport aux savoirs et didactiques des Sciences', Sfax*, les 7, 8 et 9 avril.

[8] CHANTAL, L., (2003) : " *Emergence et développement de l'esprit critique dans une classe d'élèves de 4è et 3è* ", Pierrefitte sur Seine , France : *Collège* PABLO NERUDA.

[9] CHARLOT, B. (1999) : " *Le rapport au savoir en milieu populaire* ", Paris, France : Ed. Anthropos.

[10] CHARLOT, B. (1997) : " *Du rapport au savoir, éléments pour une théorie* ", Paris, France : Ed. Anthropos.

[11] CHARLOT, B. (1984) : " L'échec scolaire en mathématiques et le rapport social au savoir ", *Bulletin de l'APMEP*, Num. 342, p. 117-124, Paris, France.

[12] CHARTRAIN, J.L. (1998): " *Différentiation scolaire et conceptions des élèves entre origine sociale et réussite sociale, la logique du sujet apprenant sur le savoir : cas du volcanisme au CM* ", Mémoire du DEA, Paris, France : Université René Descartes.

[13] CHEVALLARD, Y. (1992): " Concepts fondamentaux de la didactique, perspectives apportés par une approche anthropologique ", *RDM*, Vol. 12, N°1, p. 73-112.

[14] CHEVALLARD, Y. et JULIEN, M. (1991): " La géométrie et son enseignement comme problème, la notion de construction géométrique comme problème ", *Petit X N° 27*, France (Juin).

[15] DELAMOTTE, E. (2002) : " Que produit l'école ? Réflexions sur la circulation des savoirs et leurs appropriations ", France : Université Charles de Gaulle, Lille 3, *UMR CNRS CERSATES* 8529.

[16] DEVELAY, M. (1995a) : " *Savoirs scolaires et didactiques des sciences* ", Paris, France : ESF.

[17] DEVELAY, M. (1995b) : " A propos des savoirs scolaires ", *VEI Enjeux*, N° 123, décembre.

[18] DISASHI KABADI, I. (2012) : " *Le rapport au savoir des élèves congolais de 4ème année secondaire au théorème de Pythagore* », Mémoire de DEA présenté et soutenu publiquement à la chaire UNESCO en sciences de l'éducation, BRAZA-VILLE, République du Congo : Université Marien Ngouabi.

[19] DOUADY, R. : " Rapport Enseignement Apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de Cadres ". Edition revue et augmentée, *Cahier de didactique des mathématiques*, IREM Université Paris VII, N° 3.

[20] DOUADY, R. (1996) : " Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir en mathématiques Collège seconde", in IREM, *L'enseignement des mathématiques : des repères entre savoirs, programmes et pratiques,* Pont-à-Mousson, Topiques éd. , p. 241-256 (11/1999.1340).

[21] GONSETH, F. (1946): « La géométrie et le problème de l'espace. Volume II. Les trois aspects de la géométrie ». Editions du Griffon,

[22] HAYDER (1977): " Rapport au savoir et culture ", In *International Journal of Sciences Education*, n°2.

[23] KAYEMBE & Cie (1996) : " *Maitriser les Maths 3* ", éditions Loyola Kinshasa, RDC.

[24] KELLER, O. (2001) : " *Préhistoire de la géométrie : le problème des sources* ", Réunion, Août. www.irem.univ-reunion.fr/pdf/Keller_prehistoire_geometrie.pdf.

[25] KUZNIAK, A. (2004) : " *Paradigmes et espaces de travail géométrique*, *Note pour habilitation à diriger des recherches* ", Paris, France : IREM de Paris 7.

[26] LAMINE, B.A.M. (2000) : " Pertinence et limites de la notion de rapport au savoir en didactiques des sciences ", In A. Chabchoub (éd.) *Rapports aux savoirs et apprentissage des sciences, Actes du 5ème colloque d'épistémologie des science*s, Sfax, pp. 187-194.

[27] LOMBARD, P. (2003) : « Peut-on envisager une transposition didactique des mathématiques qui les rende accessibles au plus grand nombre ? » (IREM de LORRAINE). LORRAINE). www.irem.univ-lorraine.fr/Lomb/sens.pdf.

[28] MAGEN, A. (2001): " Ombres et lumières sur les erreurs en Algèbre et en Géométrie au Collège (et ailleurs) .Le projecteur rhétorique", *Repères*, IREM des Antilles et de la GUYANE, N° 45, Octobre.

[29] MOSCONI N., BEILLEROT, J. et BLANCHARD-LAVILLE, C. (2000) (dir) : "*Formes et formations du rapport au savoir* ", Paris, France : L'Harmattan, (11/2000-1458).

[30] PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2004) : " Eclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution des problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe.", *Annales de didactique et des sciences cognitives*, volume 9, p. 67-82, IREM de Strasbourg, France.

[31] PLUVINAGE, F. (2004): " Sur les méthodes et les résultats de la didactique des mathématiques ". *Annales de didactique et des sciences cognitives*, vol. 9, p. 7 - 43, IREM de Strasbourg, France.

[32] TONNELLE, J. (1979) : « Le monde clos de la factorisation au premier cycle. », Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université d'Aix-Marseille II, France : Université de Bordeaux I.

[33] VANTURINI-Lemme, P. et Albe-ENFA, V. (2002): " Interprétation des similitudes et des différences dans la maîtrise d'étudiants en éléctro-magnétisme à partir de leur (s) rapport (s) au (x) savoir (s) ", *Aster*, *35*, pp. 165-188, Université P. Sabatier, Toulouse, France.