International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 21 No. 4 Nov. 2017, pp. 622-629

http://www.ijias.issr-journals.org/

Mathématiques et systèmes formels dans le sillage du projet gödelien

A.-Roger LULA BABOLE

Département des Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa,
Faculté de Philosophie, RD Congo

ABSTRACT: Analysis shows the formals and mathematical basis on which the incompleteness theorem reposes qua limitation theorem which is a part of fundamental science. The duality of theoretical and metatheoretical levels in fundamental science allows to establish the mathematical been. In this point, the mathematical mind is penetrable if the critical cogitation lean on formals systems.

KEYWORDS: mathematic, formals systems, incompleteness, mathematical mind, mathematical verity, foundation crisis.

RESUME: L'étude montre les bases mathématiques et formelles sur lesquelles repose le théorème d'incomplétude en tant que théorème de limitation faisant partie de science des fondements. La dualité des niveaux - théoriques et métathéoriques - dans l'entreprise des fondements permet d'établir l'être mathématique. A ce point, la pensée mathématique n'est pénétrable que si la réflexion critique s'appuie sur les systèmes formels.

MOTS-CLEFS: mathématiques, systèmes formels, incomplétude, pensée mathématique, vérité mathématique, crise des fondements.

1 INTRODUCTION

La « crise des fondements » est ce « moment » critique où les développements de l'arithmétique, de la géométrie et de la théorie des ensembles amènent forcément les mathématiciens à se questionner sur la légitimité théorique des conceptions nouvelles. Et cela de manière rétroactive sur celle des précédentes dites, « classiques ». En effet, ''les problèmes et les idées touchant les fondements des mathématiques ont fortement contribué à l'essor de la logique, laquelle a été un outil essentiel de l'investigation des fondements'' [1]. En clair, les fondements des mathématiques sont une entreprise logique, mathématique et philosophique tout à la fois[1].

[1] Suivant cette opération, il sied de préciser que « La philosophie, à côté de la logique et des mathématiques, y a donc sa place ; sa tâche consiste en l'analyse critique des concepts et des usages de la pratique. Mais c'est une philosophie instruite, aurait dit BACHELARD, qui ne parle plus au nom d'une philosophie régnante, que ce soit le platonisme, l'idéalisme critique (BRUNSHVING) des vocables qui risquent de demeurer lettre morte s'ils ne sont pas rattachés à un travail interne des mathématiques. Dans ce sens, la démarche constructiviste, étant plus critique que les thèses proprement philosophiques, a joué un rôle plus décisif dans les fondements des mathématiques. Le constructivisme s'est toujours appuyé sur un contenu mathématique. Les refus des totalités infinies chez GAUSS, CAUCHY ou HILBERT vient de la perception du contenu constructif de la théorisation en mathématiques ». voir Y. GAUTHIER, « Fondements des mathématiques », Encyclopédie Philosophique Universelle. Les Notions Philosophiques, T1, Paris : PUF, 1990.

« Dans le cadre d'une théorie de la démonstration, l'entreprise de fondement des mathématiques a joué, à l'égard des mathématiques, le rôle de booster qui, comme le dit J. LADRIERE[2], doit prendre pour objet les mathématiques proprement dites. Et pour les constituer en objet, la métamathématique doit en faire ressortir une représentation adéquate sous la forme d'un système formel qui englobe logique et mathématique dans une seule grande théorie axiomatisée » [6]. L'étude formelle de la décidabilité a eu pour conséquence un certain nombre des résultats d'indécidabilité concernant la logique et les mathématiques.

Les limitations internes du formalisme hilbertien ne permettent plus de fonder objectivement les mathématiques soit en les réduisant à l'axiomatique des calculs propositionnels et fonctionnels, soit en maîtrisant métathéoriquement leur structure formelle. Il s'ensuit que la logique moderne perdrait, dans ce contexte, une part de son autorité en philosophie, conclut Denis VERNANT.

2 MATHÉMATIQUES ET SYSTÈMES FORMELS

Le recours au formalisme ou à la théorie des fondements permet à la philosophie de pouvoir avoir accès à la réflexion sur la pensée mathématique et logique. Il est vrai que ces domaines du savoir ne se ressemblent pas. C'est dans ce contexte de crise qu'est née la logique mathématique.

A côté de la logique et des mathématiques, la philosophie occupe une place de choix au sein de la théorie des fondements des mathématiques. Elle ne peut se passer du programme de recherche formaliste. En clair, les mathématiques doivent servir d'explication dans l'ensemble du savoir, de la physique aux sciences sociales et humaines. Une telle ambition philosophique accorde une place privilégiée à la question des fondements des mathématiques [2]. Au sein de la théorie des fondements des mathématiques, la tâche de la philosophie « consiste en l'analyse critique des concepts et des usages de la pratique. Mais c'est une philosophie instruite, aurait dit BACHELARD, qui ne parle plus au nom d'une philosophie régnante, que ce soit le platonisme, l'idéalisme critique (BRUNSCHEVICG), le logicisme, le nominalisme ou le formalisme, autant de vocables qui risquent de demeurer lettre morte s'ils ne sont rattachés à un travail d'analyse interne des mathématiques » [2].

Les mathématiques se caractérisent principalement par le fait qu'elles sont une science déductive. A partir d'axiomes ou de postulats (hypothèses de base qui sont proposées comme vraies), cette science se fixe pour but de déduire par des preuves logiques et formelles de nouvelles propositions mathématiques appelées théorèmes. Il s'ensuit que l'ensemble des axiomes et des théorèmes doit donc constituer un ensemble dit consistant. Cela signifie qu'il est un ensemble sans contradiction logique interne. Donc, on ne peut pas prouver un théorème faux ou un théorème en contradiction avec l'un des axiomes proposés ou avec un autre théorème.

La pensée mathématique ne peut se pénétrer que si la philosophie a recours aux systèmes formels. En conséquence, deux tendances philosophiques se sont dessinées pour se prononcer chacune sur la pensée (et/ou vérité) mathématique. Nous avons d'un côté, les platoniciens et, de l'autre côté, les empiristes. Ces philosophies représentent en effet deux grandes situations de pensée et de volonté de type philosophique, qui se conforme avec une dualité aussi vieille que les mathématiques.

Pour les platoniciens, l'être mathématique existe en soi, indépendamment des procédés par lesquels on peut l'atteindre. Il s'agit des indications d'existence. D'après leur perception des choses, le formalisme ou le système formel « n'est que la transposition, sur le plan du symbolisme, d'une réalité mathématique autonome » [2].

Evidemment, ici, la réalité mathématique est préexistante, le système formel s'attèle à la décrire sans parvenir à l'épuisement. L'attitude platonicienne est représentée par les vues de HILBERT et des axiomatistes qui estiment qu'il est possible de construire le formalisme suivant le prolongement d'une mathématique intuitive. Aussi faut-il que la réalité mathématique s'y manifeste afin de pouvoir envisager une description rigoureuse.

Remarquer que la philosophie des mathématiques est une réflexion purement philosophique sur la nature des objets ou des idéalités mathématiques. Le problème de la nature de l'être mathématique est en effet au centre de la philosophie des mathématiques. A dire vrai, ce problème central relève de la métaphysique.

[2] LADRIERE tente d'interpréter l'ensemble de faits de limitation des systèmes formels à travers une analyse de la démarche mathématique mettant d'un côté en évidence l'élément de construction qui en conditionne la réalité et qui se traduit dans le processus de la formalisation et de l'autre côté l'élément de la transgression qui lui est inhérent en la rendant ainsi intrinsèquement historique.

A contrario, l'attitude empiriste est représentée par les vues de BROUWER et des logicistes. Cette attitude s'oppose à celle des platoniciens. Elle estime que l'être mathématique est un produit d'une activité et n'a de réalité qu'à l'intérieur de la construction permettant de l'atteindre.

Pour les empiristes donc, le formalisme est « (…) une description provisoire des procédés de construction admis à un moment donné de l'histoire des sciences » [6]. Départageant les uns les autres, LADRIERE pense qu'il y a une dualité subsistante qui reste autonome. A cet effet, il affirme que « de part et d'autre, le système formel reste toujours extensible par ce qu'il n'arrive pas à épuiser la réalité mathématique, qu'il s'agisse du domaine transcendant des entités formelles ou des actes de la pensée mathématique » [6].

Mais il précise d'ailleurs que si le système formel est observé pour lui-même, la dualité en question ne se restreint qu'à celle de deux degrés théoriques. Cela signifie que nous avons le degré intuitif correspondant à un stade non critique des théories mathématiques, et le degré formalisé correspondant à un stade critique [6]. La théorie de la démonstration nous convie à avoir une foi en l'intelligence mathématique qui ne connaît pas de barrières et peut explorer les lois de son propre fonctionnement.

Pour HILBERT, écrit LADRIERE, ''la pensée mathématique possède en effet le privilège de ne connaitre aucune borne à son pouvoir'' [6].

En fin de compte, il est à retenir que toute preuve s'appuie sur les évidences et le raisonnement. Et pourtant l'évidence s'accomplit en plénitude dans l'intuition.

La pensée mathématique s'est vue obligée de s'interroger sur ses intuitions premières, ce qui a ouvert la voie à la crise des fondements.[3]

La crise des fondements est une instance épistémologique qui examine critiquement les concepts de base et les méthodes de raisonnement s'imposant nécessairement. En clair, nous pensons qu'un tel examen doit conduire à une révision du système d'évidences accepté comme fil conducteur de la recherche et, par-là, des intuitions considérées comme premières. Il va sans dire que cette révision, aux yeux de HILBERT, ne doit d'ailleurs entamer en rien les acquis de la pensée mathématique [6]. On réduit nécessairement les vérités mathématiques abstraites au domaine de l'intuition sensible.

La relation existant entre la mathématique et le système formel est si étroite et si substantielle qu'on peut dégager les rapports entre mathématique et métamathématique ; distinction que HILBERT établit entre ces domaines, laquelle distinction donne toute sa signification à la théorie de l'objet- signe [6].

Pour WITTGENSTEIN, la distinction entre métamathématique et mathématique n'est que fictive. Il précise en outre que c'est une belle distinction conceptuelle.

Il convient de noter que les rapports entre la mathématique et la métamathématique sont des rapports de dualité et de continuité des perspectives. La métamathématique s'intéresse aux problèmes des fondements. Cela signifie qu'elle est chargée de fonder critiquement les théories mathématiques formelles. [6]

On se voit contraint de tout remettre en question et cela jusqu'aux évidences les plus élémentaires. Ce qui amène à créer un nouveau secteur d'études, à savoir les recherches sur les fondements des mathématiques. En effet, ces types de recherche pouvaient essentiellement s'appuyer sur deux techniques : *la méthode axiomatique et la logistique ou la logique formalisée*.

Pour LADRIERE, l'entreprise des fondements des mathématiques se réalise suivant deux points de vue. Cela veut dire qu'elle se déploie à un double niveau : « celui de la mathématique proprement dite et celui de la métamathématique ». La dualité des niveaux dans l'entreprise des fondements renvoie à la différence établie par HILBERT entre mathématique et théorie de la démonstration : « d'un côté, conquête des résultats nouveaux, d'un autre côté, intégration des théories classiques (arithmétique, algèbre, analyse) dans les formalismes appropriés et examen - critique – des propriétés de ces formalismes au moyen de méthodes finitistes ». Mais il est vérifié, au niveau métamathématique que HILBERT appelle l'objet-signe. Il dit aussi que la réduction nécessaire de l'abstrait au concret se trouve accomplie par l'intermédiaire de la théorie des preuves.

---

[3] *Le terme « crise » dans l'expression la « crise de fondements » n'est pas à entendre au sens où quelque péripétie dramatique aurait affecté dans une certaine mesure l'histoire des mathématiques et compromis alors la progression de la raison. Il faut donc préciser que pour HILBERT, il y a lieu de s'élever contre les mathématiciens que les difficultés rencontrées induisent à douter de la raison.*

LADRIERE souligne qu'au premier niveau, la pensée mathématique entreprend un déploiement des problèmes anciens et la création des théories mathématiques nouvelles, tandis qu'au deuxième niveau, elle entreprend une véritable prolifération des formalismes logico-mathématiques. Elle sert ici à assurer la sécurité de la mathématique en la protégeant de la teneur de certaines interdictions et des difficultés créées par des paradoxes.

Suivant cette perspective, on peut expliquer de quelle manière établir le caractère non contradictoire des théories mathématiques formelles et aboutir ainsi à une sorte de théorie de la démonstration, dont l'objet est de s'occuper des opérations à pouvoir effectuer sur les preuves elles-mêmes.

Il s'ensuit dès lors que la métamathématique ou la théorie des preuves étudie « les propriétés d'un objet qui se présente sous une forme correcte, on n'a plus à tenir compte de la signification des symboles utilisés mais seulement de leur configuration et de la manière dont ils peuvent se distribuer, se combiner, s'échanger, se substituer les uns les autres» [6].

La métamathématique nous fait passer à un niveau supérieur d'analyse et constitue un véritable approfondissement de la démarche mathématique. Au même moment, elle nous introduit dans une couche plus basale. En clair, on se perd dans un déploiement de niveaux entre lesquels il n'y a pas d'hétérogénéité mais plutôt à une continuité de perspectives.

Pour LADRIERE, la théorie de la démonstration est née « pour sauver l'ensemble des mathématiques classiques (y compris la théorie du transfini) et de faire droit aux critiques constructivistes des intuitionnistes ». Il a fallu que HILBERT établisse une différence nette entre la théorie des fondements et la mathématique elle-même. Et LADRIERE renchérit que « à la mathématique classique, représentée dans les formalismes adéquats (qui doivent englober la logique utilisée pour la déduction du théorème), il (HILBERT) superpose une mathématique, ou théorie de la démonstration, chargé d'étudier la propriété de formalisme du premier niveau et en particulier d'établir leur non-contradiction ».

La préoccupation majeure de la théorie de la démonstration était d'établir le critère de preuve admise au plan métamathématique.

L'intuitionnisme et la théorie de la démonstration ont joué un rôle très important dans le formalisme au point d'affirmer sans conteste qu'il n'est pas possible au formalisme d'échapper à ces deux thèmes pour sa constitution. Et LADRIERE souligne à ce sujet que : ''On ne peut se passer d'un recours ultime à l'intuition'' [6]. Cela signifie donc que les mathématiques sont construites afin de compte sur les gestes concrets.

Au fond, le formalisme ne peut pas s'écarter de l'intuitionnisme ni du programme de la théorie de la démonstration.

3 PROJET GÖDELIEN

La science des fondements se pose deux catégories de questions :

Comment arriver à représenter les théories mathématiques au moyen des systèmes formels ? Quelles sont les méthodes qui peuvent servir d'étude des propriétés de ces formalismes ?

A cet effet, on s'aperçoit que la méthode de formalisation comporte des limitations internes. Cela veut dire qu'il y a des limitations au pouvoir de représenter un système formel, comme il y a aussi des limitations à la connaissance de pouvoir acquérir des propriétés d'un système formel. Du reste, ces limitations tiennent à la nature des systèmes formels.

Il est évident de souligner que des théorèmes faisant parti de la science des fondements établissent des faits de limitation.

Le théorème de GÖDEL (1931) est le plus célèbre des théorèmes de limitation[4] établissant la non-complétude syntaxique du système des *Principia Mathematica* de WHITEHEAD et RUSSELL (1910-1913) et des systèmes apparentés (GÖDEL, 1931). Ce théorème dit qu' « un système ∑ est syntaxiquement complet, si toute proposition appartenant à ∑ est, soit dérivable, soit réfutable en utilisant les moyens de démonstration de ∑ ».

Dans un système formel qui contient au moins l'arithmétique récursive et qui est consistant, le théorème d'incomplétude indique qu'il existe des propositions indécidables, autrement dit, des propositions qui ne sont ni dérivables ni réfutables.

[4] Les limitations internes des systèmes formels concernent soit des problèmes syntaxiques qui sont par exemple le problème de la complétude et le problème de la décision, soit des problèmes sémantiques qui sont par exemple la capacité d'un système à représenter par ses propres ressources des concepts métathéoriques qui lui sont relatifs, la capacité d'un système à représenter une théorie de façon adéquate.

Le théorème de GÖDEL revient à démontrer, d'une part, que dans tout système formalisé consistant construit autour de l'arithmétique, il peut exister des propositions indécidables et, d'autre part, que la non contradictoire ou consistance d'un tel système ne peut être prouvé 'à l'intérieur » de ce système, tant que cela ne fait pas recours aux définitions, axiomes et théorèmes du système.[5]

La preuve de ce théorème est établie telle qu'il soit possible de démontrer que la proposition ainsi construite est indécidable et suit donc le modèle du paradoxe du menteur. Elle affirme, d'elle-même, qu'elle est indémontrable dans le système considéré.

Le second théorème de GÖDEL, qui est au fond un corollaire du premier, dit clairement que « dans tout système ∑ qui répond aux exigences du premier théorème, la proposition affirmant que ∑ est consistant, n'est pas prouvable dans ∑ ».

Il est évident que pour prouver la non-contradiction d'un système, on doit avoir recours à des moyens de démonstration plus puissants que ceux du système. D'où, l'abandon du point de vue finitiste qu'avait adopté HILBERT pour les preuves de consistance[6].

Kurt GÖDEL a choisi la théorie des nombres des *Principia Mathematica*, « PM », pour effectuer la preuve de l'incomplétude. Comme on le sait pertinemment bien, la théorie formelle a été inventée au début du 20ème siècle par les mathématiciens anglais B. RUSSELL et WHITEHEAD. En effet, la théorie formelle était la théorie mathématique qui a fait servir de référence en termes de rigueur dans les théories mathématiques formelles.

Bien avant les travaux de GÖDEL et en particulier au XIXème siècle, pour la plupart des mathématiciens, toute proposition vraie devait pouvoir être démontrée à l'intérieur d'un système formel. Cela signifie donc qu'un système formel doit être *complet* et avoir tous les outils nécessaires avant de décider de la véracité de n'importe quelle proposition. Dans ce contexte, HILBERT (maître de GÖDEL) essaie vainement de démontrer entre 1900 et 1928 qu'on peut déduire à partir d'un système formel donné, une infinité de propositions, toutes vraies.

Cependant, en 1931, GÖDEL démontre que les recherches entreprises par HILBERT sont au fond irréalisable. En prenant l'exemple simple de l'arithmétique, GÖDEL montre qu'une théorie consistante, s'appliquant aux nombres entiers, peut s'avérer incomplète. Il parvient même à construire un théorème présentant les propriétés ci-après : si ce théorème est vrai, alors il est indémontrable ; s'il est faux, alors il est démontrable ; le système formel se révélait donc inconsistant ; ce qui est alors absurde, car sinon nous ne pourrions pas nous fier à aucun des théorèmes créés par le système formel. D'où, il y a lieu d'admettre que le théorème est vrai et indémontrable et le système consistant est incomplet et ne peut démontrer toutes les propositions vraies.

Les auteurs de PM croyaient avoir construit un système mathématique formellement parfait sur la base duquel on pouvait créer de manière mécanique, les théories mathématiques complètes et cohérentes.

En 1931, Kurt GÖDEL va s'appuyer sur l'axiomatique de PEANO pour ainsi s'attaquer à la preuve de la cohérence et de l'analyse, à l'aide de moyens finis. Son idée principale consiste à prouver la cohérence relative de l'analyse et de l'arithmétique, qui est une preuve plus aisée.

En clair, GÖDEL a détruit ; mais il aurait pu détruire l'édifice de PM avec le théorème de l'incomplétude portant son nom ; ce qu'il a fait c'est de montrer qu'il est possible d'introduire des autoréférences (Paradoxes de RICHARD et du menteur) dans les théorèmes de PM et donc d'indécidabilité.

La démarche gödelienne de la preuve de l'incomplétude s'effectue en des grandes étapes de la preuve de l'incomplétude et de l'incohérence de « *Principia Mathematica* ».

---

[5]Nous signalons que GÖDEL a publié ses travaux au moment où les littérateurs se mettaient à pied d'œuvre pour « assimiler » la relativité d'EINSTEIN et les relations d'incertitude HEISENBERG. En réalité, ces théories physiques ont facilement amené les ignorants à l'idée rassurante selon laquelle l'ignorance est inéluctable.

[6] GÖDEL fait savoir dans une note de 1963 que les théorèmes d'incomplétude peuvent recevoir la version fondamentalement générale qui s'exprime comme suit :

« Il peut être prouvé rigoureusement que dans tout système formel consistant qui contient une certaine dose de théorie finitaire des nombres, il existe des propositions arithmétiques indécidables et que, de plus, la consistance d'un tel système ne peut être prouvée dans le système ». GÖDEL, Collected works, I.p.195.

1. GÖDEL crée un modèle arithmétique de PM qui équivaut au PM ayant des symboles.

   A cet effet, il établit des relations biunivoques entre PM symboles et PM arithmétiques où l'on a des relations symboles entre symboles de base et nombre de GÖDEL, théorème ou axiome (suite de symboles et nombre de GÖDEL et preuve en suite de théorèmes et axiomes et nombre de GÖDEL).

   Le processus peut être itéré sur une suite de formules de l'arithmétique de PEANO, donnant ainsi le nombre de GÖDEL correspondant à la suite de formules. Le codage d'une suite de formules est essentiel. On voit que les preuves ne sont que des suites finies de formules dont chacune, soit, est un axiome, soit, découle des précédentes.

   Les raisons fondamentales, qui poussent GÖDEL à créer un modèle arithmétique équivalent, consistent à :

   - créer les autoréférences par l'introduction d'une formule du nombre de GÖDEL,
   - choisir un modèle spécifique pour développer les preuves.

2. GÖDEL traduit alors avec les symboles de PM que « la formule "Z" n'est prouvable qu'avec les règles de PM »

$$\neg(\exists_x)(Dem\ (x, z))$$

   Il n'existe pas un x preuve de z : donc Z n'est pas prouvable. $Dem\ (x, z)$ est la relation entre un théorème Z et sa preuve x

3. GÖDEL introduit dans la formule ci-dessus une autoréférence en y insérant le nombre de GÖDEL en lieu et place de Z :

$$\neg(\exists_x)(Dem\ (x, sssss \dots \dots\ sss0))$$

   Dès lors, on voit que le nombre de « s » est au nombre de GÖDEL « G » de la formule.

4. GÖDEL prouve que le paradoxe : « G » est prouvable si et seulement si, la négation de G est prouvable » c'est un théorème de PM

5. De ce paradoxe, GÖDEL déduit que : « la théorie formelle des nombres *Principia Mathematica* est incomplète ou incohérente »

   a. Si la formule « G » est prouvable alors PM est incohérent parce qu'un théorème et sa négation sont vrais.

   b. Si la formule « G » est indécidable ou pas prouvable, alors PM est incomplet.

   c. On ne peut pas assurer la complétude de *Principia Mathematica* en affirmant que les formules indécidables sont des axiomes, et pour cette raison, elles sont infiniment plus nombreuses que les propositions décidables et, selon le même rapport ; que les nombres rationnels vis-à-vis des nombres entiers.

   d. En tout état de causes, le théorème de GÖDEL concerne l'ensemble des théories mathématiques formelles.

Pour GÖDEL, « les systèmes (comme par exemple celui des *Principia Mathematica*) sont tellement larges que toutes les méthodes de démonstration utilisées aujourd'hui en mathématiques y sont formalisées, c'est-à-dire ramenées à quelques axiomes et règles d'inférence. On pourrait, par conséquent, supposer que ces axiomes et règles d'inférence suffisent pour décider de toute question mathématique qui pourrait s'exprimer formellement dans ces systèmes. Dans ce qui, suit nous montrerons que tel n'est pas le cas et qu'il existe au contraire, dans ces systèmes, des problèmes relativement simples concernant la théorie des entiers que l'on ne saurait trancher sur la base de ces axiomes » [3].

En prenant du recul vis-à-vis du théorème de GÖDEL, il y a lieu de circonscrire et d'indiquer que les conséquences du théorème d'incomplétude sont de divers ordres dans son appréhension.

« Suite au théorème de GÖDEL, remarque Douglas HOFSTADTER, on a pris conscience de la subtilité et de la profondeur de la pensée mathématique et de l'effondrement du brillant espoir de mécaniser les mathématiques. Qu'est–ce que la pensée mathématique ? Qu'est–ce qu'une vérité mathématique ? Voilà, d'après l'auteur, des questions fondamentales encore non résolues 70 ans après GÖDEL » [4] qui mériteraient à notre avis, qu'on s'y penche.

Et, G. CHAITIN, de renchérir, dans le cadre du paradigme de la complexité dans les mathématiques : "je ne pense pas que les implications du théorème de K. GÖDEL doivent nous faire désespérer. Ma conclusion est que nous ne pouvons avoir des certitudes sur rien. En conséquence, nous devons toujours tendre vers la raison, mais raisonner ne suppose plus uniquement déduire mécaniquement des conséquences à partir d'axiomes.

Raisonner est un exercice intellectuel qui implique de discuter et d'échanger avec les autres, d'utiliser des intuitions, de faire émerger un consensus [5]. Par ailleurs, il souligne que "le théorème d'incomplétude illustre les faiblesses de la démarche "top–down" des déductions axiomatiques. Il faut les compléter par des démarches "bottom–up'' basées sur des interactions entre les acteurs pluridisciplinaires pour faire émerger des innovations". A la suite du théorème de GÖDEL, G. CHAITIN envisage même le flou dans les mathématiques : un théorème pourrait être plus ou moins vrai.

Au fond, que dire au final du projet gödelien ?

En 1931, GÖDEL publie deux théorèmes d'une portée d'extrême importance. A proprement parler, il s'agit de *méta théorèmes*, puisqu'ils appartiennent à une métathéorie chargée d'étudier l'arithmétique en tant que théorie–objet. GÖDEL vient donc remettre en question la métamathématique hilbertienne.

1. Quel que soit l'ensemble d'axiomes conçus pour élaborer une théorie ayant au moins la complexité de l'arithmétique des nombres naturels, il existera toujours au moins un énoncé vrai qu'il sera impossible de prouver à partir de ces axiomes.
2. Il n'est pas possible de prouver à l'intérieur d'une théorie ayant au moins la complexité de l'arithmétique des énoncés naturels, la non-contradiction de cette théorie.

En d'autres termes,

- nous apprend que l'arithmétique est une théorie incomplète
- nous dit que pour établir la cohérence d'une théorie A, on doit concevoir dans ce cas une métathéorie B dont l'un des métathéorèmes va se rapporter à la cohérence de A.

Mais il reste à établir la cohérence de B sans laquelle on n'a pas l'assurance de la validité du résultat qui établirait la cohérence de A.

En plus, pour établir la cohérence de B, on devra recourir à une métathéorie C dans laquelle on va établir la cohérence de B et cela jusqu'à l'infini. On se trouve alors buté aux difficultés telles qu'on ne saurait pas quelle position prendre.

Faut–il absolument recourir à une série infinie de métathéories dont chacune permet d'établir la cohérence de celle qui la précède, mais dont la cohérence propre dépend de celle qui la suit ?

Ou bien peut-on penser quelque part à une métathéorie ultime, dont la cohérence irait de soi et sur laquelle pourrait se fonder la cohérence de toutes les autres théories et métathéories ?

Devant ce dilemme cormelien ou shakespearien, GÖDEL a eu l'idée de reprendre cet énoncé et d'y remplacer le mot fausse par le mot indémontrable. Il a ainsi obtenu l'énoncé :

« La présente phrase est indémontrable »

Pour ce faire, GÖDEL a eu recours à une technique appelée *arithmétisation de l'arithmétique* pour construire à l'intérieur de l'arithmétique, une proposition affirmant sa propre indémontrabilité.

Si dans une théorie on a une proposition qui s'énonce comme suit :

« Je suis indémontrable ».

Alors de deux choses l'une :

Ou bien cet énoncé est effectivement prouvable ou il ne l'est pas.

S'il n'est pas prouvable, on déduit que l'énoncé en question est vrai ; mais si c'est un énoncé vrai qu'il est impossible de prouver, la théorie est incomplète.

A contrario donc, si cet énoncé était prouvable, on conclurait qu'il est faux.

Donc il serait possible de prouver dans cette théorie un énoncé faux. En clair, la théorie serait incohérente.

L'incohérence ainsi décelée, indique Virginia WOOLF, constitue un défaut ultime pour une théorie qui se dit logique.

Donc, s'il faut s'en tenir à la cohérence de l'arithmétique, alors on doit absolument se résigner à admettre qu'elle est incomplète.

En arithmétique, il existe des énoncés vrais qu'il n'est pas possible de prouver à partir des axiomes de cette théorie.

Pour contourner les tribulations de l'incohérence, l'incomplétude s'obtient en remplaçant ainsi le mot faux dans le paradoxe d'EUBULIDE par le mot *indémontrable*, GÖDEL est parvenu à transformer un paradoxe en un énoncé subtil, mais fécond, puisqu'il est capable d'éclaircir les rapports adverses et complémentaires existant entre les concepts de cohérence et de complétude.

Mais plus que cela, on est tenté de penser qu'on se trouve irrémédiablement condamné à accepter une insondable zone floue cachée au plus profond des sources des connaissances.

GÖDEL a aperçu que les défauts du projet de HILBERT sont d'ordre épistémologique, plutôt que techniques. HILBERT ne pouvait pas mener à bien son projet pour deux raisons. La première, déclare GÖDEL, tient à des exigences constructives, qui lui eurent interdit un usage non constructif de la hiérarchie ramifiée, inventée justement à des fins constructives. La deuxième, dit-il, tient à une présupposition générale du point de vue formaliste, la coextension des concepts de démontrabilité et de vérité. Partant des résultats d'incomplétude, il y a lieu donc au contraire de pouvoir les distinguer.

La première chose importante à considérer est que le théorème de GÖDEL est mathématique. Il n'énonce *a priori* aucune vérité valable en dehors de ce cadre. Sur ce, il est à remarquer que les éléments d'une globalité ne suffisent pas à la décrire, qu'il faut en sortir et prendre du recul pour l'observer. En d'autres termes, réduire une globalité, une totalité à un objet pour pouvoir l'étudier, nécessite de se placer dans un cadre plus large.

''Un tout ne peut se compléter lui-même''. Autrement dit, la limite est toujours extérieure à ce qu'elle limite, la limite est contenue dans ce qu'elle limite (un ensemble fermé ou une suite stationnaire).

Est-ce que l'on peut dire que la pensée de celui qui pense actuellement l'ensemble de différentes choses de tout genre, peut appartenir à l'ensemble total qu'il pense ?

La seconde partie du programme de HILBERT touchant les fondements exigeait qu'il fût montré par les raisonnements métamathématiques finitistes qu'un système formel, qui formalise les mathématiques classiques, est consistant. Puisque les mathématiques formalisées dans $\mathbb{N}$… ne sont pas toutes entières finitistes, on espérait que si on excluait des méthodes formalisées dans $\mathbb{N}$ la partie non finitiste, la partie restante suffirait pour démontrer la consistance. Or le second théorème de GÖDEL montre qu'avec toutes les méthodes formalisées dans $\mathbb{N}$, la partie non finitiste, la partie restante suffirait pour prouver la consistance. Cela signifie qu'on est en présence d'une métalangue isomorphe à $\mathbb{N}$ lui-même. Donc on n'arrive même pas à prouver la consistance de $\mathbb{N}$, si $\mathbb{N}$ est consistant [7].

4 CONCLUSION

Les recherches sur la théorie des fondements ont rendu nécessaires la construction des mathématiques et cela après la découverte de problèmes dans la théorie des ensembles créant ainsi des paradoxes qui ont compromis la cohérence même des mathématiques et l'exposant au principe d'explosion.

La question des limitations internes des systèmes formels de notre approche cherche à savoir si les problèmes traités, mais non résolus aujourd'hui, peuvent être résolus un jour. En effet, cette préoccupation nous conduit naturellement à une ouverture sur l'optimisme. De surcroit, elle nous pousse à une prise de conscience de l'effort de l'humanité qui déploie les stratagèmes pour résoudre ses problèmes.

REFERENCES

[1] J. Ladrière, ''Le rôle du théorème de GÖDEL dans la théorie de la démonstration'' *Revue Philosophique de Louvain*, pp . 469 – 492,1949.

[2] Y. Gauthier, *Logique et fondements des mathématiques* : Paris : Diderot, 1997.

[3] K. GÖDEL, E. Nagel, J.R. Newmann et J.-Y. Girard : *Le théorème de GÖDEL*. Sources du savoir, Paris : Le Seuil, 1989.

[4] D. Hofstadter, GÖDEL, Escher, Bach : *Les brins d'une guirlande éternelle*, Paris : Dunod, 2000.

[5] Gregory Chaitin, *La complexité : vertiges et promesses de Réda Benkitane*. Interview de Gregory CHAITIN, 2013. [Online] Available http://www.archipress.org/?page_id=57 (août 2013).

[6] J. Ladrière : *Les limitations internes des formalismes. Etude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des Mathématiques*, Nawelaerts/Gauthier-Villards, Paris/Louvain, 1957.

[7] S.C. KLEENE, *Logique mathématique*, Paris, Armand-Colin, 1971, 413 p.