

## Operador media potencia pesada lingüística y su aplicación en la toma de decisiones

### [ Linguistic weighted power means and its application for decision-making ]

*Salah Hasan Saleh Al-Subhi<sup>1</sup>, Gaafar Sadeq Saeed Mahdi<sup>1</sup>, Milton Villegas Alava<sup>2</sup>, Miton Pedro Yobanis Piñero Pérez<sup>1</sup>,  
and Maikel Leyva Vázquez<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Universidad de las Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba

<sup>2</sup>Universidad de Guayaquil, Facultad de Ciencias Administrativas, Guayaquil, Ecuador

<sup>3</sup>Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas Universidad de Guayaquil, Guayaquil, Guayas, Ecuador

---

Copyright © 2017 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**ABSTRACT:** A number of aggregation operators have been proposed. Traditional approaches do not perform aggregation of criteria with sufficient flexibility and adaptability to the specific contexts of organizations. In this paper we propose a decision making method using linguistic power means operators for hierarchical aggregation process of information. The proposal allows the inclusion of aspects such as the importance of the criteria and simultaneity. To demonstrate the applicability of the proposal, a case study is developed. The paper ends with further work recommendations for extending the method.

**KEYWORDS:** aggregation operators, decision-making, WP, Linguistic 2-tuples.

**RESUMEN:** Un grupo de operadores de agregación han sido propuestos en la literatura. En los modelos existente falta la suficiente flexibilidad y adaptabilidad a los contextos específicos de las organizaciones. En el presente trabajo se propone un método para la toma de decisiones que hace uso de los operadores de agregación de forma jerárquica utilizando el modelo de las 2-tuplas lingüísticas. La propuesta permite la inclusión de aspectos tales como la importancia de los criterios y la simultaneidad. Un estudio de caso muestra aplicabilidad de la propuesta. El artículo finaliza con propuestas de trabajos futuros que contribuyan a la aplicabilidad del método.

**PALABRAS-CLAVE:** Modelo de Puntuación Lógica de Preferencias, operadores de agregación, WPM, 2-tuplas lingüísticas.

## 1 INTRODUCCIÓN

El modelo computacional de las 2-tuplas lingüísticas ha sido aplicado con éxito en problemas de toma de decisión [1-3]. Debido a sus características y a su facilidad de uso, los autores de la presente investigación consideran este modelo adecuado para el manejo de información lingüística para la toma de decisiones. El objetivo de este trabajo es presentar un método para la toma de decisiones basado en el empleo de operadores de agregación en forma jerárquica para la fusión de la información. Con este propósito se emplea para la a agregación jerárquica el operador media de potencia pesada (del inglés, *weighted power mean*, WPM).

El artículo continúa de la siguiente forma. En la Sección 2 se presenta un estado del arte de enfoque lingüístico difuso y agregación de información. En la Sección 3 se propone el modelo de agregación basado en el empleo de la media de potencia pesada y en la Sección 4 un caso de estudio. El artículo finaliza con las conclusiones y trabajos futuros.

## 2 ENFOQUE LINGÜÍSTICO DIFUSO

La computación con palabras es una metodología que permite realizar un proceso de computación y razonamiento utilizando palabras pertenecientes al lenguaje natural en lugar de emplear números [4]. Estas facilidades para el uso del lenguaje permite crear y enriquecer modelos de toma de decisión en los cuales la información vaga e imprecisa [5] puede ser representada mediante variables lingüísticas.

Dentro de los modelos propuestos, la representación de 2-tuplas lingüísticas [6] permite realizar procesos de computación con palabras sin ocurrir pérdida de información, utilizando el concepto de traslación simbólica. Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $\beta \in [0, g]$  un valor en el intervalo de granularidad de  $S$ . La traslación simbólica de un término lingüístico,  $s_i$ , es un número valorado en el intervalo  $[-.5, .5)$  que expresa la diferencia de información entre una cantidad de información expresada por el valor  $\beta \in [0, g]$ , obtenido en una operación simbólica y el valor entero más próximo,  $i \in \{0, \dots, g\}$  que indica el índice de la etiqueta lingüística ( $s_i$ ) más cercana en  $S$  [7].

A partir del concepto anterior se desarrolla un nuevo modelo de representación de la información lingüística el cual hace uso de un par de valores (2-tuplas). Este modelo de representación define un conjunto de funciones que facilitan las operaciones sobre estas 2-tuplas.

Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $\beta \in [0, g]$  un valor que representa el resultado de una operación simbólica, entonces la 2-tupla lingüística que expresa la información equivalente a  $\beta$ , se obtiene usando la función:

$$\Delta: [0, g] \rightarrow S \times [-.5, .5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-.5, .5) \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $\text{round}$  es el operador usual de redondeo,  $s_i$ , es la etiqueta con índice más cercano a  $\beta$ , y  $\alpha$  es el valor de la traslación simbólica [7]. Cabe señalar que  $\Delta^{-1}: \langle S \rangle \rightarrow [0, g]$  es definida como  $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$ . De este modo, una 2-tupla lingüística  $\langle S \rangle$  queda identificada con su valor numérico en  $[0, g]$ .

### 2.1 MEDIA POTENCIA PESADA

La agregación de la información consiste en el proceso de combinar distintos datos brindando una única salida. Los operadores de agregación son un tipo de función matemática empleada para la fusión de información. Combinan  $n$  valores en un dominio  $D$  y devuelven un valor en ese mismo dominio [8].

Los operadores de agregación presentan múltiples aplicaciones en diversos áreas [9]. En la toma de decisiones su papel fundamental está en la evaluación y en la construcción de alternativas [8].

Cada una de las familias de operadores presenta características que les permiten modelar determinadas situaciones. La media ponderada (del inglés, *Weighted Averaging*, WA) posibilita asignar peso a las fuentes de información lo que permite su empleo para representar fiabilidad o importancia/preferencia. Por su parte la familia de operadores de Media Ponderada Ordenada (del inglés, *Ordered Weighted Averaging*, OWA) [10] posibilita la compensación o dar peso a los datos en dependencia de sus valores. Las integrales difusas [11] permiten modelar redundancia, complementariedad e interacciones entre criterios. Sin embargo estos operadores no son completamente adecuados para expresar las propiedades expresadas en el razonamiento humano [12].

El operador de agregación media de potencia pesada (WPM) permite expresar el grado de simultaneidad e Importancia relativa de las entradas (Pesos). Adicionalmente posibilita la construcción de modelos jerárquicos de agregación [13]. La  $r$ -ésima WPM es definida de la siguiente forma:

$$M_n^{[r]}(\underline{a}, \underline{w}) = (\sum_{i=1}^n a_i^r w_i)^{\frac{1}{r}} \quad (2)$$

Donde  $w_i \in [0, 1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $r$  puede ser seleccionada para lograr propiedades lógicas deseadas. Para la determinación de los pesos correspondientes a cada característica y sub-características es posible la utilización del Proceso de Jerarquía Analítica (del inglés, *Analytic Hierarchy Process*, AHP) [14].

La media WPM utiliza el modelo jerárquico de agregación denominado modelo de puntuación lógica de preferencias (del inglés, *Logic Scoring of Preference*, LSP) [13].

Una de las principales fortalezas del modelo LSP es que puede modelar diferentes relaciones lógicas entre atributos y sub-características de manera que reflejen las necesidades de los diferentes participantes en el proceso de evaluación. En la tabla 1 se muestran los principales operadores.

Tabla 1. Valores de Funciones de Conjunción/Disyunción Generalizada

Tipo de polarización	Intensidad de la polarización	Símbolo	Valor de r
Disyunción	El más fuerte	D	$+\infty$
	Muy fuerte	D++	20.63
	Fuerte	D+	9.521
	Medio Fuerte	D+-	5.802
	Medio	DA	3.929
	Medio Débil	D-+	2.792
	Débil	D-	2.018
	Muy Débil	D--	1.449
Neutral		A	1
Conjunción	Muy Débil	C--	6.19
	Débil	C-	2.619
	Medio Débil	C-+	-0.148
	Medio	CA	-0.72
	Medio Fuerte	C+-	-1.655
	Fuerte	C+	-3.510
	Muy fuerte	C++	-9.06
	El más fuerte	C++	$-\infty$

El decisor puede utilizar dos parámetros en el proceso de agregación [13]:

- Grado de simultaneidad (andness).
- Importancia relativa de la entrada (pesos).

Un aspecto interesante de este operador es que permite agregar información teniendo en cuenta que se puede determinar qué elementos son obligatorio y cuales opcionales [15]. Todos los elementos abordados previamente a juicio del autor permiten reflejar de un modo más realista la toma de decisiones.

### 3 MÉTODO PROPUESTO

Entre las actividades incluidas en el método propuesto se encuentran: selección de los criterios y alternativas, obtención de la información, normalización de los valores, determinar vectores de pesos y agregación.

A continuación se presenta gráficamente (Figura 1) las actividades contenidas en el flujo de trabajo y se describe cada una de ellas:

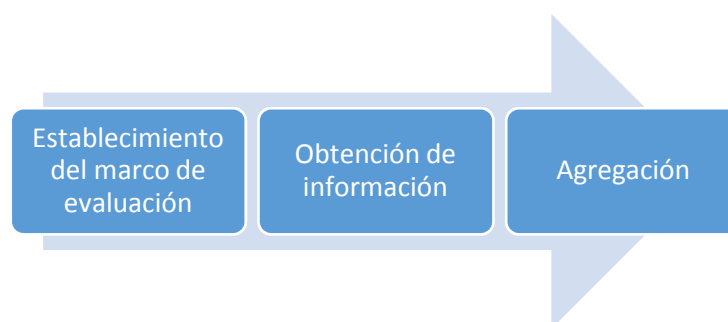


Fig. 1. Actividades del flujo de trabajo para la priorización para la toma de decisiones.

1. Establecimiento el marco de evaluación: Se seleccionan los criterios y las alternativas que serán evaluados. Siendo  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  con  $k \geq 2$  los criterios a ser evaluados, y  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_j\}$  con  $j \geq 2$  las alternativas.
2. Obtención de información: Se obtiene información sobre las preferencias de los decisores. Esta información representa la valoración de cada alternativa con respecto a los criterios. El vector de utilidad [16] es representado de la siguiente forma  $V_j = \{v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jn}\}$ , donde  $v_{jk}$  es la preferencia en relación al criterio  $c_k$  de la alternativa  $R_j$ . La valoración se da en el intervalo  $[0,1]$ , siendo 0 el peor valor y 1 el mejor.
3. Agregación: La función de agregación  $OAG: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  se obtiene mediante un proceso de agregación jerárquica. Se utiliza el modelo de puntuación lógica de preferencias (LSP) [13] debido a que esta se ajusta de un modo más realista al proceso de orientación vocacional. El empleo de los operadores de agregación de forma jerárquica dota de flexibilidad al método. La posibilidad de obtener directamente las preferencias del decisor y su expresión en los vectores de peso es otra de sus fortalezas. Para la agregación se define el operador media potencia pesada lingüística (LWPM por sus siglas en inglés):

Sea  $X = \{(s_1, \alpha_1), \dots, (s_n, \alpha_n)\}$ , un conjunto de 2-tuplas lingüísticas, La  $r$ -ésima WPM lingüística (LWPM) es definida de la siguiente forma.

$$M_n^{[r]}((s_1, \alpha_1), \dots, (s_n, \alpha_n)) = (\sum_{i=1}^n \beta_i^r w_i)^{\frac{1}{r}} \quad (2)$$

donde  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $r$  puede ser seleccionadas para lograr propiedades lógicas deseadas.[13].

#### 4 ESTUDIO DE CASO

A continuación se presenta un estudio de caso con el propósito fundamental de mostrar la aplicabilidad de la propuesta. Para su desarrollo para la selección de proyectos a partir de los criterios, beneficios, factibilidad, y pertinencia.

Los atributos se valorarán en la siguiente escala lingüística (tabla 2).

Tabla 2. Escala lingüística.

No	Etiquetas	Funciones de pertenencia
$s_0$	Muy bajo (MB)	(0.0,0.0,0.25)
$s_1$	Bajo (B)	(0.0,0.25,0.50)
$s_2$	Medio (M)	(0.25,0.50,0.75)
$s_3$	Alto(A)	(0.50,0.75,1)
$s_4$	Muy alto (MA)	(0.75,1,1)

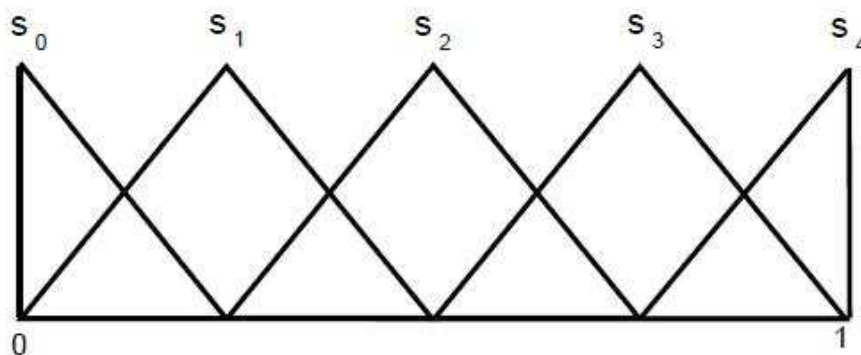


Fig. 2. Conjunto de etiquetas utilizadas

Posteriormente se realiza la valoración para cada requisito con respecto a los criterios seleccionados (Tabla 3).

Tabla 3. Valoración de requisitos

Proyecto	Beneficios	Costos	Pertinencia
P <sub>1</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>3</sub>
P <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>
P <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>
P <sub>4</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>3</sub>

A continuación se muestran la estructura de agregación jerárquica obtenida. Se emplearon operadores de agregación que reflejan simultaneidad tal como lo establece LSP [17, 18].

Tabla 4. Estructura de agregación

Entradas iniciales	Operador	ID del bloque	Operador	ID del Bloque
Costo	0,4	Balance Costo/Beneficio	0,7	Prioridad global
Factibilidad	0,6		C--	
Pertinencia			0,3	

Los resultados de la agregación de los criterios permiten ordenar los requisitos. En este caso el orden de prioridad es el siguiente  $p_4 > p_1 > p_2 > p_3$

Tabla 5. Resultados de la agregación.

Proyecto	AG
P <sub>1</sub>	(S <sub>3</sub> , -0.09)
P <sub>2</sub>	(S <sub>2</sub> , 0.34)
P <sub>3</sub>	(S <sub>2</sub> , 0.06)
P <sub>4</sub>	(S <sub>3</sub> , 0)

Entre las ventajas planteadas por los especialistas se encuentran la relativa facilidad de la técnica y la elevada flexibilidad que brinda el uso del modelo de agregación empleado. Los resultados muestran además la aplicabilidad que presentan los modelos de ayuda a la toma de decisión basados en la agregación de la información.

## 5 CONCLUSIONES

En el presente artículo se presentó un método para la ayuda a la toma de decisiones basado en el empleo de operadores de agregación para la fusión de la información. Para la a agregación jerárquica se utilizó el operador WPM adaptado a las 2-tuplas lingüísticas (LWPM). Entre las actividades incluidas en el método se encuentran: selección de los criterios, obtención de la información sobre las preferencias de los decisores y finalmente la agregación de los valores normalizados de las preferencias.

Entre las principales ventajas del método se encuentra la posibilidad de modelar la importancia de los criterios y la compensación manteniendo la interpretabilidad de los modelos. Como trabajos futuros se perfila el trabajo con un enfoque multiexperto. La construcción de una herramienta informática que soporte el modelo constituye otra área de trabajo futura.

## REFERENCIAS

- [1] Tejeda-Lorente, Á., et al., *A quality based recommender system to disseminate information in a university digital library*. Information Sciences, 2014. **261**: p. 52-69.
- [2] Cordón, L.G.P., *Modelos de recomendación con falta de información. Aplicaciones al sector turístico*. 2008, Universidad de Jaén.
- [3] Pérez-Teruel, K., M. Leyva-Vázquez, and V. Estrada-Sentí, *Mental models consensus process using fuzzy cognitive maps and computing with words*. Ingeniería y Universidad, 2015. **19**(1): p. 173-188.

- [4] Leyva-Vázquez, M., et al. *The Extended Hierarchical Linguistic Model in Fuzzy Cognitive Maps*. in *Technologies and Innovation: Second International Conference, CITI 2016, Guayaquil, Ecuador, November 23-25, 2016, Proceedings 2*. 2016. Springer.
- [5] Herrera, F., et al., *Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects*. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2009. **8**(4): p. 337-364.
- [6] Dutta, B., D. Guha, and R. Mesiar, *A model based on linguistic 2-tuples for dealing with heterogeneous relationship among attributes in multi-expert decision making*. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 2015. **23**(5): p. 1817-1831.
- [7] Herrera, F. and L. Martínez, *A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words*. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 2000. **8**(6): p. 746-752.
- [8] Torra, V. and Y. Narukawa, *Modeling decisions: information fusion and aggregation operators*. 2007: Springer.
- [9] Beliakov, G., A. Pradera, and T. Calvo, *Aggregation functions: a guide for practitioners*. 2007: Springer.
- [10] Yager, R.R., *On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking*. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, 1988. **18**(1): p. 183-190.
- [11] Arenas-Díaz, G., *Medidas difusas e integrales difusas*. Universitas Scientiarum, 2013. **18**(1): p. 7-32.
- [12] Dujmović, J.J., *Continuous preference logic for system evaluation*. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, 2007. **15**(6): p. 1082-1099.
- [13] Dujmović, J.J. and H. Nagashima, *LSP method and its use for evaluation of Java IDEs*. International Journal of Approximate Reasoning, 2006. **41**(1): p. 3-22.
- [14] Saaty, T.L., *What is the analytic hierarchy process?*, in *Mathematical models for decision support*. 1988, Springer. p. 109-121.
- [15] Nogués, J.B., *SEMANTIC RECOMMENDER SYSTEMS. PROVISION OF PERSONALISED INFORMATION ABOUT TOURIST ACTIVITIES*, in *Department of Computer Science and Mathematics*. 2015, Universitat Rovira i Virgili.
- [16] Espinilla, M., et al., *A 360-degree performance appraisal model dealing with heterogeneous information and dependent criteria*. Information Sciences, 2012.
- [17] Gyorgy, T., G. Suciú, and T.L. Militaru. *CLASSIFICATION OF ON-LINE STUDENTS USING AN EXPERT SYSTEM OVER OPEN SOURCE, DISTRIBUTED CLOUD COMPUTING SYSTEM*. in *The International Scientific Conference eLearning and Software for Education*. 2014. " Carol I" National Defence University.
- [18] Tapia-Rosero, A., et al., *Fusion of preferences from different perspectives in a decision-making context*. Information Fusion.