

Approche stochastique de la congestion dans les réseaux 2G à 4G⁺

[Stochastic approach of congestion in 2G to 4G⁺ networks]

BADIBI OMAK A. Christopher and KALALA MUTOMBO Franck

Département de Mathématique, Faculté des Sciences, Université de Lubumbashi, BP 1825, Lubumbashi, RD Congo

Copyright © 2019 ISSR Journals. This is an open access article distributed under the **Creative Commons Attribution License**, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

ABSTRACT: This paper presents the stochastic approach to congestion that is unknown to some users or designers of telecommunication networks. Its purpose is to help designers predict network behavior, characterize load, determine number and size of components, these elements are important for those who want to optimize the network in terms of its architecture, so as to meet the required quality of service standards by taking the most economical route possible. This approach will be based on the modelizations of the arrival and the waiting calls on the network following some hypotheses. A key element of call reception to consider is the base transmission station (BTS) in the GSM network or the NODE B in the 3G to 4G⁺ networks.

KEYWORDS: Telecommunications Networks, Stochastic Processes, Markov Chains and Queuing Networks.

RESUME: Cet article présente l'approche stochastique de la congestion plutôt méconnus pour certains utilisateurs ou concepteurs des réseaux de télécommunications. Elle a pour but d'aider les concepteurs à prédire le comportement du réseau, caractériser la charge, déterminer le nombre et la taille des composantes nécessaires pour enfin prédire la performance du réseau sous des charges futures. Ces éléments sont importants pour ceux qui veulent optimiser le réseau au niveau de son architecture, de manière à satisfaire les standards de qualité de service requis en empruntant la voie la plus économique possible. Cette approche se base sur les modélisations de l'arrivée, de la mise en attente et du blocage des appels sur le réseau suivant certaines hypothèses. Un élément capital de réception d'appel à considérer est la station de transmission de base (BTS) dans le réseau GSM ou la NODE B dans les réseaux 3G à 4G⁺.

MOTS-CLEFS: Réseaux de télécommunications, Processus stochastiques, chaînes de Markov et Réseaux des Files d'attentes.

1 INTRODUCTION

La plupart des phénomènes de nature aléatoire peuvent être modélisés grâce aux mathématiques tels que les processus stochastiques via le files d'attentes qui permettent d'établir les modèles décrivant les fluctuations des cours boursiers, jeux de hasard, cheminement des paquets de données et les trafics dans un réseau de télécommunication [1][2][3][8][10][11][12][13]etc. Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation,...). L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques [1] [2] [14] [15] [16]. On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

La théorie des files d'attente s'attache à modéliser et à analyser de nombreuses situations en apparence très diverses, mais qui relèvent néanmoins toutes du schéma descriptif général suivant [17] [18] [19]:

« Des clients arrivent à intervalles aléatoires dans un système comportant plusieurs serveurs auxquels ils vont adresser une requête. La durée du service auprès de chaque serveur est elle-même aléatoire. Après avoir été servis (ce qui suppose un arrêt chez un ou plusieurs serveurs selon le cas), les clients quittent le système ».

2 MODELISATION DES APPELS

2.1 MODELISATIONS DES INSTANTS D'ARRIVES D'APPELS

Nous considérons des appels qui arrivent sur la BTS ou la NODE B [4] [5] [6] [7] [9] de manière aléatoire. Prenons ensuite un intervalle de temps t et divisons cet intervalle en n sous intervalles de durée :

$$\frac{t}{n}$$

Graphiquement notre cas se présente de la sorte :

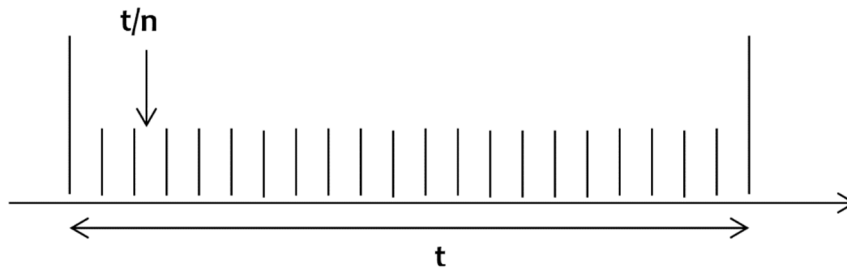


Figure 2.1

On choisit n suffisamment grand pour que les conditions (qui constituent les hypothèses de notre travail) soient respectées:

- Une seule arrivée d'appel peut survenir dans un intervalle t/n
- Les instants d'arrivée d'appels sont indépendants les uns des autres
- La probabilité qu'un appel arrive dans un sous intervalle est proportionnelle à la durée du sous intervalle.

On écrit alors :

$$p_1(1) = \frac{\lambda t}{n}$$

Dans cette expression $p_1(1)$ représente la probabilité d'arrivée d'un appel dans un sous intervalle et le terme λ représente le coefficient de proportionnalité entre la probabilité et la durée t/n du sous intervalle.

Conformément à l'hypothèse de départ qui consiste à considérer comme nulle la probabilité d'avoir plusieurs appels dans un sous intervalle s'écrit alors :

$$p_2(1) + p_3(1) + \dots + p_n(1) + \dots = \sum_{k=2}^{+\infty} p_k(1) = 0$$

La probabilité de n'avoir aucun appel durant un sous intervalle de temps t/n s'écrit donc :

$$p_0(1) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k(1)$$

En développant cette expression on obtient :

$$p_0(1) = 1 + p_1(1) - \sum_{k=2}^{+\infty} p_k(1)$$

En vertu de la propriété énoncée précédemment on obtient donc :

$$p_0(1) = 1 - p_1(1)$$

Ainsi donc la probabilité d'avoir k arrivées d'appels durant n intervalles de temps s'obtient en considérant le nombre de façon de choisir k intervalles parmi le n . Pour chacune de ces solutions on aura k intervalles avec une arrivée d'appel et $n-k$ intervalles avec aucune arrivée d'appel. Alors la probabilité de l'un de ces cas sera donc égale à $p_1(1) \cdot p_1(1)^{n-k}$. La probabilité globale s'obtient en faisant la somme de tous les différents cas possibles. Finalement on obtient :

$$p_k(n) = C_n^k p_1(1)^k p_0(1)^{n-k}$$

Lorsqu'on remplace les probabilités par leurs valeurs en fonction de λ, t et n on obtient donc :

$$p_k(n) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

La limite de la probabilité $p_k(n)$ lorsque n tend vers l'infini est égale à la probabilité d'avoir k arrivées d'appel durant un intervalle de temps t . On note p_k cette probabilité [1] [2] [13] :

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_k(n)$$

En reprenant alors les différents termes de l'expression de $p_k(n) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$ et quand on fait tendre n vers l'infini on aura :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda t)^k}{n^k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\lambda t + \frac{k}{n}\lambda t}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\lambda t}\right)$$

Ce qui donne :

$$p_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (2.1)$$

Cette expression est extrêmement importante, elle représente la probabilité d'observer k arrivées d'appels dans un intervalle de durée t . Ce qui correspond bien à la distribution de Poisson [26] [31]. Le paramètre λ est le taux moyen d'arrivée d'appels. Il s'agira donc d'un nombre moyen d'appels par secondes. On peut vérifier que ce paramètre représente bien le nombre moyen d'appels durant une durée t .

En effet, pour obtenir le nombre moyen, ayant la distribution de probabilité, il faut calculer l'espérance mathématique.

• **Espérance mathématique**

On définit l'espérance [31], dans le cas d'une loi discrète i.e pour une variable ne prenant que des valeurs entières, comme c'est le cas ici pour le nombre d'appels arrivant durant un intervalle t , comme :

$$\mathbb{E}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k$$

En reprenant alors l'expression de p_k , on obtient :

$$\mathbb{E}(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$\mathbb{E}(k) = \lambda t \quad (2.2)$$

• **La variance**

s'exprime de la manière suivante :

$$Var(k) = \mathbb{E}(k^2) - (\mathbb{E}(k))^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + (\lambda t)^2$$

$$Va(k) = ((\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-1+1)(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}) e^{-\lambda t} - (\lambda t)^2 = (\lambda t) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-\lambda t}$$

$$Var(k) = \lambda t (\lambda t e^{\lambda t} e^{-\lambda t} + e^{\lambda t} e^{-\lambda t}) + (\lambda t)^2$$

$$Var(k) = \lambda t \quad (2.3)$$

• **Temps moyen entre appels**

Introduisons maintenant la variable aléatoire τ qui représente le temps séparant deux arrivées d'appels. Graphiquement il se présente de la sorte :

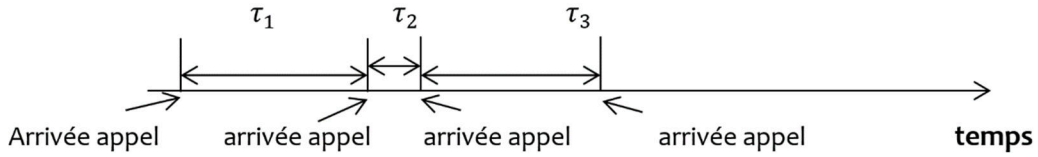


Figure 2.2: Arrivées d'appels

Soit $A(t)$ la probabilité que le temps τ soit inférieur ou égal à une valeur t :

$$A(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\tau > t)$$

Or $\mathbb{P}(\tau > t)$ représente la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée d'appels durant un temps t . Cette probabilité nous l'avons justement établie dans les pages précédentes :

$$\mathbb{P}(\tau > t) = p_0 = e^{-\lambda t}$$

On en déduit donc :

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Nous introduisons alors la densité de probabilité de la variable aléatoire τ . On rappelle que la densité s'obtient simplement en dérivant la probabilité par rapport à t . On obtient ainsi :

$$g(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

En général on rencontre plus souvent le calcul inverse, c'est à dire compte tenu d'une densité de probabilité $g(t)$, $A(t) = \int_0^t g(u)du$. On part de 0 car il s'agit d'une durée entre deux appels. On peut vérifier que l'intégrale donne alors :

$$A(t) = [-e^{-\lambda t}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

L'expression de la densité de probabilité permet de calculer la durée moyenne $\bar{\tau} = \mathbb{E}(\tau)$ entre deux arrivées d'appel.

$$\mathbb{E}(\tau) = \int_0^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

En intégrant par partie, et en tenant compte des bornes on obtient :

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.4)$$

On obtient donc que, pour un taux d'arrivée d'appels de λ appels par secondes, le temps moyen entre appel est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

• **Absence de mémoire du processus d'arrivée d'appels**

Nous remarquons que, pour une loi exponentielle négative [14] [15] [16]., le nombre d'appels qui ont pu arriver jusqu'à un temps t_0 n'a pas d'influence sur le nombre d'appels qui vont arriver après t_0 .

Supposons qu'aucun appel ne soit arrivé jusqu'à un temps t_0 et calculons la probabilité qu'un appel arrive durant une durée t après le temps t_0 . On doit donc calculer la probabilité d'avoir une durée entre deux appels inférieure à $t + t_0$ tout en étant supérieure à t_0 .

Cette probabilité s'écrit : $\mathbb{P}(\tau \leq t + t_0 | \tau > t_0)$. Alors en utilisant la formule de Bayes sur les probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathbb{P}(\tau \leq t + t_0 | \tau > t_0) = \frac{\mathbb{P}(t_0 < \tau \leq t + t_0)}{\mathbb{P}(\tau > t_0)} = \frac{\mathbb{P}(\tau \leq t + t_0) - \mathbb{P}(\tau \leq t_0)}{1 - \mathbb{P}(\tau \leq t_0)}$$

En reprenant les expressions des différentes probabilités on obtient donc :

$$\mathbb{P}(\tau \leq t + t_0 | \tau > t_0) = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 + e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 + e^{-\lambda t_0})} = 1 - e^{-\lambda t}$$

D'où finalement :

$$\mathbb{P}(\tau \leq t + t_0 | \tau > t_0) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.5)$$

On voit donc que la probabilité d'apparition d'un appel durant un temps t après une durée t_0 pendant laquelle aucun appel n'est arrivé est la même que la probabilité d'apparition d'un appel pendant une durée t , indépendamment de ce qu'on avait posés comme hypothèse au début de ce point. On a donc que la densité exponentielle négative est sans mémoire.

Le fait qu'il est sans mémoire montre en fait que nous sommes dans une chaîne de Markov [21][22][23][24] car les nombres d'appels qui sont arrivés pendant un temps précis n'aura pas d'influences sur les appels qui arriveront après ce temps comme nous l'avons souligné ci-haut.

2.2 MODELISATIONS DES DUREES D'APPELS

Pour modéliser les durées des appels on procède comme précédemment. On considère donc un intervalle de temps de durée t que l'on décompose en n sous intervalles de durée :

$$\frac{t}{n}$$

On choisit n de telle sorte que les hypothèses suivantes restent justifiées :

- La probabilité qu'un appel se termine durant un sous intervalle est proportionnelle à la durée du sous intervalle. On notera $\mu \frac{t}{n}$ cette probabilité, expression dans laquelle μ représente le coefficient de proportionnalité.
- La probabilité qu'un appel se termine durant un sous intervalle de temps est indépendante du sous intervalle considéré

Nous introduisons alors une variable aléatoire θ représentant la durée d'un appel, et la probabilité $H(t)$ qui est la durée qu'un appel soit inférieure ou égale à t . i.e

$$H(t) = \mathbb{P}(\theta \leq t).$$

La probabilité qu'un appel ayant débuté à $t = 0$ ne se termine pas avant t s'écrit alors :

$\mathbb{P}(\theta > t) = 1 - H(t)$; Cette probabilité est égale à la probabilité que l'appel ne se termine dans aucun des n sous intervalles de durée t/n

$$1 - H(t) = \left(1 - \frac{\mu t}{n}\right)^n$$

En faisant alors tendre n vers l'infini membre a membre, on obtient :

$$1 - H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu t}{n}\right)^n = e^{-\mu t}$$

$$1 - H(t) = e^{-\mu t}$$

$$H(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (2.6)$$

Ce qu'on vient d'obtenir est donc l'expression de la probabilité qu'un appel ait une durée inférieure ou égale à t ; On peut en déduire la densité de probabilité associée, qui est notée $h(t)$.

$$h(t) = \frac{dH}{dt} = \mu e^{-\mu t}$$

De la même manière que dans les paragraphes précédents, la durée moyenne $\mathbb{E}[\theta] = \theta$ d'appel est donc égale à :

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu}$$

En conclusion on a μ appels qui cessent par secondes et on a une durée moyenne d'appel égale à $1/\mu$

A ce niveau nous comprenons que l'arrivés des appels suit la loi de poisson de paramètre λ et que la durée des appels suit la loi exponentielle négatives de paramètre μ .

Ainsi donc ; Les probabilités d'apparition d'appels et de fin d'appels qui ont été développées dans nos deux paragraphes précédents permettent de modéliser le processus complet d'apparition et de fin d'appels.

2.3 MODELISATION DES PROCESSUS D'APPARITIONS ET DE FIN D'APPELS

A chaque instant un certain nombre d'appels vont apparaître et d'autres vont se terminer. On peut donc modéliser l'état où l'on se trouve à un instant donné comme une chaîne d'états. Chaque état représente le nombre de communications en cours. On conçoit donc bien que si, à un instant donné, il y a k communications on ne peut passer que dans deux états adjacents qui sont les états $k - 1$ et $k + 1$. La probabilité de passer d'un état i à un état j pendant un temps dt sera donc noté $p_{ij}(dt)$.

Nous introduisons alors les probabilités de transition d'état suivantes :

- Etant dans l'état k, la probabilité $p_{k,k+1}(dt)$ pour passer à l'état $k + 1$ durant un intervalle de temps dt s'écrit $\lambda_k dt$.
- Etant dans l'état k, la probabilité $p_{k,k-1}(dt)$ pour passer à l'état $k - 1$ durant un intervalle de temps dt s'écrit $\mu_k dt$.
- Etant dans l'état k+1, la probabilité $p_{k+1,k}(dt)$ pour passer à l'état k durant un intervalle de temps dt s'écrit $\mu_{k+1} dt$
- Etant dans l'état $k - 1$, la probabilité, dt $p_{k-1,k}$ pour passer à l'état k durant un intervalle de temps dt s'écrit $\lambda_{k-1} dt$.

Graphiquement notre situation se présente de la manière suivante :

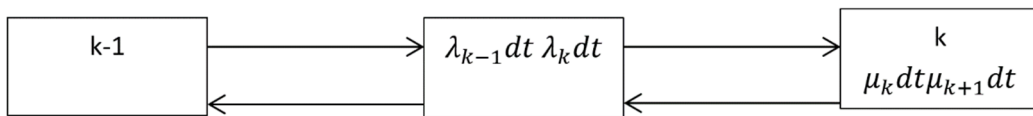


Figure 2.3 : Probabilités des transitions

Les grandeurs λ_k et μ_k sont des taux d'apparition et de fin d'appels du même type que ceux utilisés lors des paragraphes précédents. La seule différence tient au fait que ces taux ont en indice l'état où se trouve le système.

On peut alors introduire la probabilité d'état, c'est à dire la probabilité d'être dans un état k à un instant t. La variation de cette probabilité durant un intervalle de temps dt est alors égale à la probabilité de rejoindre cet état en venant d'un état k-1 ou d'un état k+1 moins la probabilité de "quitter" cet état pour aller vers un état k-1 ou vers un état k+1.

On a donc :

$$dp_k(dt) = \lambda_{k-1} dt \cdot p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} dt \cdot p_{k+1}(t) - (\lambda_k dt + \mu_k dt) p_k$$

Ce qui n'est autre que les équations Chapman-Kolmogorov [20] [25] [26]. En supposant le système stable, c'est à dire en supposant qu'il se stabilise sur des probabilités d'état fixes lorsque le temps tend vers l'infini, on peut écrire $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ lorsque t tend vers l'infini, on peut alors noter $p_k = p_k(t)$ d'où finalement :

$$\lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k = 0$$

Cette équation est vérifiée pour tout $k \geq 0$ avec les conditions $p_{-1} = 0; \lambda_{-1} = 0; \mu_0 = 0$.

La stabilité des probabilités signifie qu'il y a une probabilité égale de quitter l'état p_k que de le rejoindre. En écrivant le système d'équation précédent, on trouve :

$$\begin{aligned} \mu_1 p_1 &= \lambda_0 p_0 \\ \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 &= (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \\ \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 &= (\lambda_2 + \mu_2) p_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

En résolvant le système on trouve :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ p_2 &= \frac{1}{\mu_2} \left((\lambda_1 + \mu_1) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \lambda_0 p_0 \right) = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \end{aligned}$$

$$p_3 = \frac{1}{\mu_3} \left((\lambda_2 + \mu_2) \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 - \lambda_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \right) = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

....

On trouve alors assez facilement la forme générale :

$$p_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) p_0 \quad (2.7)$$

On sait que comme le système se trouve obligatoirement dans l'un des états on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient enfin :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad (2.8)$$

2.4 MODELISATION DU BLOCAGE

2.4.1 TRAFIC OFFERT

D'un point de vue pratique, on imagine bien que, lorsqu'un central téléphonique [28][29][30](commutateur local CL) regroupe les lignes d'un ensemble d'immeubles dans une ville, ce central ne possède pas autant de lignes allant vers le réseau que de lignes allant vers les différents particuliers qu'il dessert.

On peut donc légitimement se demander de combien de lignes on a besoin pour desservir tous ces abonnés. On peut intuitivement prévoir que ce nombre de lignes va étroitement dépendre du nombre d'abonné mais aussi du taux d'occupation de leurs lignes téléphonique. On peut donc définir pour chaque usager ce taux d'occupation de sa ligne téléphonique. En introduisant η pour représenter ce taux, on peut le définir de la manière suivante [18] [27] :

$$BHT = \eta = \frac{N_a D_a}{24.3600} \quad (3.1)$$

Dans cette expression N_a représente le nombre d'appels passés ou reçus par jour, D_a représente la durée moyenne d'un appel en secondes. Enfin 24×3600 représentent la durée d'une journée en secondes. On définit ainsi l'occupation de sa ligne par l'abonné.

L'unité retenue pour η est l'Erlang qui est noté E et η représente le trafic de l'utilisateur ainsi un trafic de 1 Erlang (1 E) correspond à une ligne de téléphone occupée 24 heures sur 24.

2.4.2 MODELISATION DU BLOCAGE

Nous posons comme hypothèse :

- Les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
- Le temps de service est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$,
- Il n'y a pas de serveurs montés en parallèle,
- Il n'y a pas de file d'attente.

On s'intéresse ici à un système disposant de N canaux de communications [20][25][26]. Si les N canaux sont occupés, les appels qui arrivent alors sont perdus (absence de tonalité par exemple). On parle alors de blocage du système. On va chercher à estimer cette probabilité de blocage en fonction du nombre de canaux disponibles et du trafic. Compte tenu de ce qui a été énoncé sur le caractère sans mémoire du processus d'arrivée d'appels, on peut considérer que la probabilité $\lambda_k dt$ et indépendante de l'état du système, d'où :

$$\lambda_k dt = \lambda dt, \text{ pour tout } k \leq N - 1$$

et pour la probabilité de fin d'appel on a par contre

$$\mu_k dt = \mu dt, \text{ pour tout } k < N,$$

Cette probabilité de transition traduit juste que si k appels sont en cours chacun a une probabilité μdt de se terminer, d'où la somme qui donne $k\mu dt$.

En toute rigueur il faudrait soustraire à cette probabilité les probabilités correspondantes à plusieurs appels qui se terminent dans l'intervalle dt car alors, on passe directement à un état plus éloigné.

En utilisant ces expressions de λ_k et de μ_k dans les équations donnant p_k et p_0 que nous avons déjà dans le paragraphe précédent, il vient :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

En introduisant alors la variable : $a = \frac{\lambda}{\mu}$ qui représente le nombre d'appels qui apparaissent sur le nombre d'appels qui se terminent pendant un intervalle de temps, ce qui représente en fait tout simplement le trafic, il vient :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \frac{a^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!}}$$

En ramenant alors dans l'expression de p_k , il vient que :

$$p_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{i=0}^N \frac{a^i}{i!}} \quad (3.2)$$

La probabilité de blocage d'un système disposant de N canaux et pour un trafic a s'écrit alors $E(a, N)$, elle est égale à la probabilité de se trouver dans l'état N, $E(a, N) = p_N$ elle s'obtient grâce à l'équation suivante :

$$p_N = \frac{\frac{a^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{a^i}{i!}} \quad (3.3)$$

L'expression (3.3) est très importante en télécommunication, elle porte le nom de la première formule d'ERLANG, où la formule d'ERLANG B [32], cette formule calcule la probabilité de blocage dans le réseau de téléphonie GSM et en réseau de télécommunication de n'importe quelle génération.

2.4.3 MODELISATION DE LA MISE EN ATTENTE

Ici nous considérons le système pour lequel les appels bloqués peuvent être mis en file d'attente avant d'être servis, on peut alors définir une probabilité d'être mis en attente. Avec ce système on a toujours les mêmes hypothèses c'est-à-dire :

$$\lambda_k \cdot dt = \lambda \cdot dt$$

Mais, pour la probabilité de fin d'appel on a par contre :

$$\mu_k \cdot dt = \begin{cases} k\mu dt, & \text{pour tout } 0 \leq k \leq N \\ N\mu dt, & \text{pour tout } k \geq N \end{cases}$$

En utilisant (4.1) on obtient pour k supérieur à N :

$$p_k = \left(\prod_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=N}^{k-1} \frac{\lambda}{N\mu} \right) p_0$$

$$p_k = \left(\frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a^{k-N}}{N^{k-N}} \right) p_0$$

D'où on obtient finalement :

$$\begin{cases} \frac{a^k}{k!} p_0; & \text{pour tout } 0 \leq k \leq N \\ \frac{a^k}{N!} N^{N-k} p_0; & \text{pour tout } k > N \end{cases}$$

En utilisant l'expression de (4.2) et en décomposant la sommation on obtient alors:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} + \sum_{k=N}^{\infty} \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=N}^{k-1} \frac{\lambda}{N\mu}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a^k}{N! N^{k-N}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^N}{N!} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a^{k-N}}{N^{k-N}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^N}{N!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{N}\right)^k}$$

Or on sait que dans la pratique $\frac{a}{N} < 1$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{N}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{a}{N}}$ car c'est une suite géométrique d'où l'expression précédente devient donc :

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^N}{N!} \frac{1}{1-\frac{a}{N}} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

La probabilité de mise en file d'attente se note C (N, a) et elle est égale à la sommation des p_k

D'où :

$$C(N, a) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a^k}{N!} N^{N-k} p_0 \quad (3.5)$$

L'expression (3.5) porte le nom de formule d'Erlang-**C** [32], elle nous permet de calculer la probabilité qu'un appel soit mis en attente après que tous les canaux soient occupés. Cet appel pourra être servi après la libération d'un canal.

2.4.4 SIMULATION DU BLOCAGE ET DE MISE EN ATTENTE

2.4.4.1 DETERMINATION DE PROBABILITES DE BLOCAGE ET DE MISE EN ATTENTE

2.4.4.1.1 LE LOGICIEL ERLANG CALCULATOR ET C-MODELLER

Les différentes probabilités de blocages, nous les déterminons à l'aide des logiciels Erlang calculator et C-modeller, ces deux logiciels nous aide à résoudre les problèmes liés à la performance du réseau, lorsque le réseau n'arrive plus à desservir les usagers, un test sur base de ces logiciels est recommandé. Les éléments suivants en sont la clé d'une bonne maîtrise de ce logiciel:

- BHT : le taux d'occupation du canal par heure celui-ci s'exprime en Erlang et peut varier de 0.01 à 180 et qu'on peut aussi estimer en pourcentage en faisant le rapport entre le BHT multiplié par 100 et puis divisé par 180. Dans notre cas les BHT sont connues.
- Temps moyenne d'attente : le temps estimé d'attente d'un appel pour accéder au canal ; dans notre cas il est aussi connu.
- Canaux : pour chaque site nous avons besoins de connaître le nombre maximum de canaux voix, mis à part les autres canaux tels que canaux réservés aux SMS, appels vidéo, aux différents téléchargements que l'abonné peut faire etc. et dans notre cas aussi le nombre de canaux est connu.
- La durée moyenne (Da) des appels par heure que reçoit un canal donné.

Ainsi donc à l'aide de Erlang-calculator nous pouvons trouvés la probabilité de blocage et de mise en attente. C-modeller nous aidera en fait à faire une simulation graphique.

2.4.4.1.2 SITE 1

Ce site se présente comme données :

Tableau 4.1

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf s(sec)
			Taux	%		
3	12	130	120	67	360	40

Ainsi donc en appliquant Erlang-calculator on obtient la probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué par référence de la formule (3.3) est $PB = 2.8\%$, Et la probabilité de mise en attente (3.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 8.9\%$

2.4.4.1.3 SITE 2

Ce site présente comme données :

Tableau 4.2

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf s(sec)
			Taux	%		
3	14	144	135	75	390	45

Ainsi donc la probabilité que lorsqu'un usager appel, est que son appel soit bloqué (3.3) est $PB = 3.1\%$, Et la probabilité de mise en attente (3.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 12\%$.

2.4.4.1.4 SITE 3

Ce site a comme données :

Tableau 4.3

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf s(sec)
			Taux	%		
3	12	132	125	68	270	35

Ainsi donc la probabilité de blocage (3.3) est $PB = 3.8\%$, Et la probabilité de mise en attente (3.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 17.2\%$.

2.4.4.1.5 SITE 4

Ce site présente comme données :

Tableau 4.4

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf (sec)
			Taux	%		
3	12	126	115	64	240	30

La probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué (3.3) est $PB = 2.5\%$, Et la probabilité de mise en attente (3.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 5.7\%$.

2.4.4.1.6 SITE 5

Ce site a comme données :

Tableau 4.5

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf (sec)
			Taux	%		
3	12	123	113	63	200	30

Ainsi donc la probabilité que lorsqu'un usager appel, set que son appel soit bloqué (3.3) est $PB = 2.8\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 5.8\%$.

2.4.4.1.7 SITE 6

Ce site comme données :

Tableau 4.6

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf (sec)
			Taux	%		
3	12	117	105	58	220	30

La probabilité de blocage (4.3) d'un appel pour ce site est $PB = 2.1\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 3.4\%$.

2.4.4.1.8 SITE 7

Ce site présente comme données :

Tableau 4.7

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf (sec)
			Taux	%		
3	12	127	122	68	210	35

Ainsi donc la probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué (4.3) est $PB = 4.6\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 23.9\%$.

2.4.4.1.9 SITE 8

Ce site Présente comme données :

Tableau 4.8

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf (sec)
			Taux	%		
3	12	138	134	74.4	240	40

Ainsi donc la probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué (4.3) est $PB = 4.9\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 32.8\%$.

2.4.4.1.10 SITE 9

Ce site a comme données :

Tableau 4.9

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf(sec)
			Taux	%		
3	12	112	120	67	360	40

La probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué (4.3) est $PB = 3.5\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 10.8\%$.

2.4.4.1.11 SITE 10

Ce site a comme données :

Tableau 4.10

SECTEURS	TRX	CANAUX	BHT		Da (sec)	Tf(sec)
			Taux	%		
3	12	135	120	67	360	40

Ainsi donc la probabilité que lorsqu'un usager appel, son appel soit bloqué (4.3) est $PB = 5.3\%$, Et la probabilité de mise en attente (4.5) d'un appel dans ce site est : $PA = 38\%$.

2.4.4.2 ANALYSE DU BLOCAGE ET DU MISE EN ATTENTE

Le tableau global de probabilités se présente comme suit :

2.4.4.2.1 TABLEAU GLOBAL DES PB(%) ET DES PA(%)

Tableau 4.11

N°	SITES	BHT		CANAUX	Tf(sec)	PB(%)	PA(%)
		BHT(Taux)	BHT(%)				
1	1	120	67	136	25	2,8	3,4
2	2	135	75	151	30	3,1	3,4
3	3	125	69,4	141	20	3,8	3,3
4	4	115	64	130	15	2,5	4,5
5	5	113	63	128	15	2,8	3,6
6	6	105	58	120	15	2,1	3,7
7	7	122	68	138	20	4,6	2,3
8	8	134	74,4	150	25	4,9	2,2
9	9	112	62	127	25	3,5	3,9
10	10	132	73,3	148	25	5,3	3,8

Les courbes représentatives se présentent de la sorte :

2.4.4.2.2 COURBE DE SITES EN FONCTION DE BHT (TAUX) & (%)

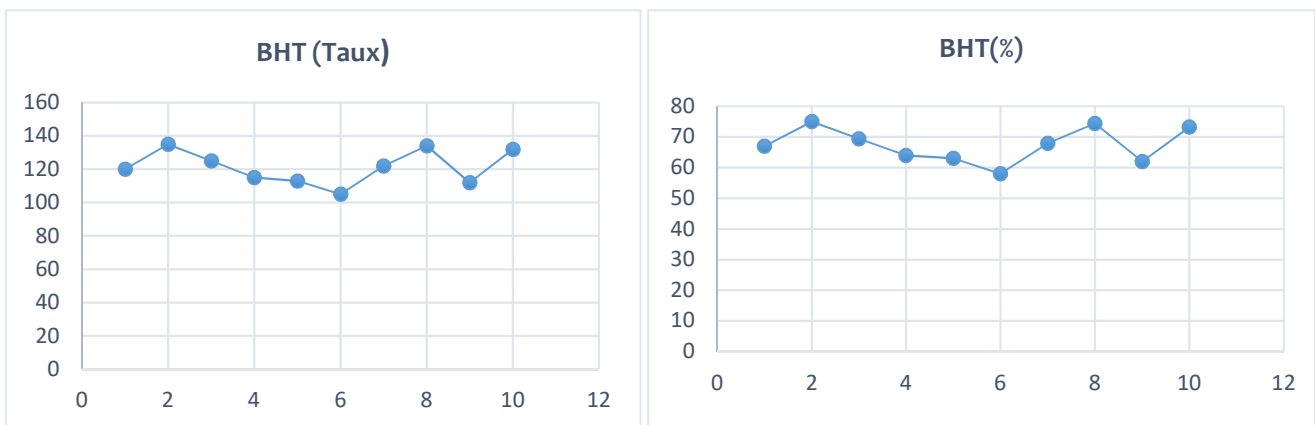


Figure 4.5

2.4.4.2.3 COURBE DE SITES EN FONCTION DE PB (%) & COURBE DE SITES EN FONCTION DE PA (%)

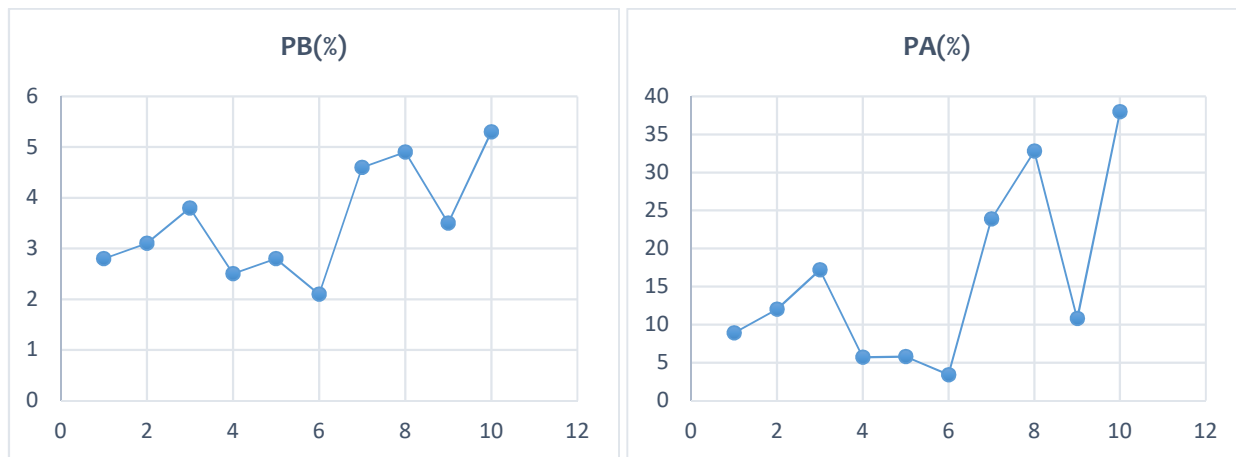


Figure 4.6

2.4.4.2.4 COURBE DE SITES EN FONCTION DE PB(%) ET PA (%)

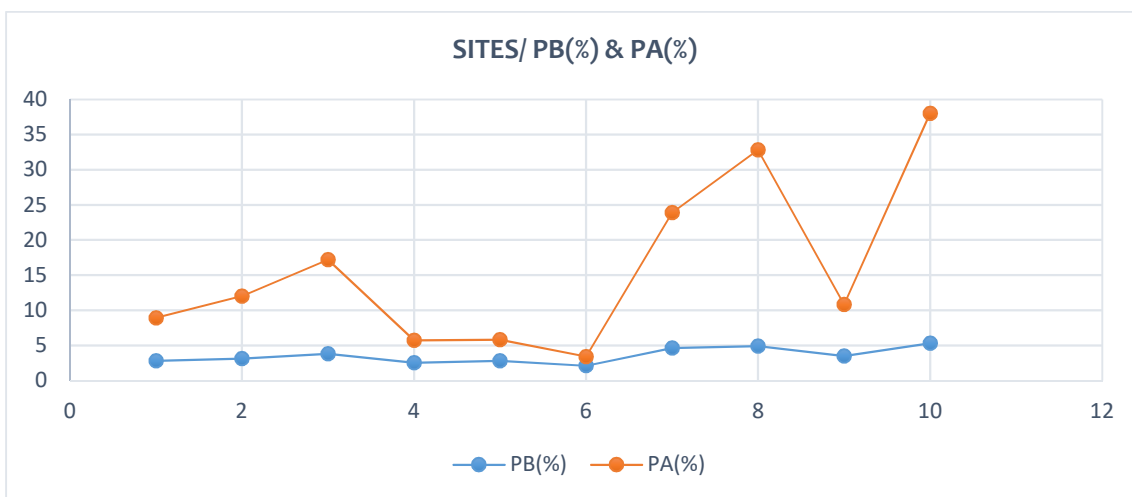


Figure 4.7

2.4.4.2.5 COURBE GENERALE DE SITES EN FONCTION DE TOUS LES PARAMETRES

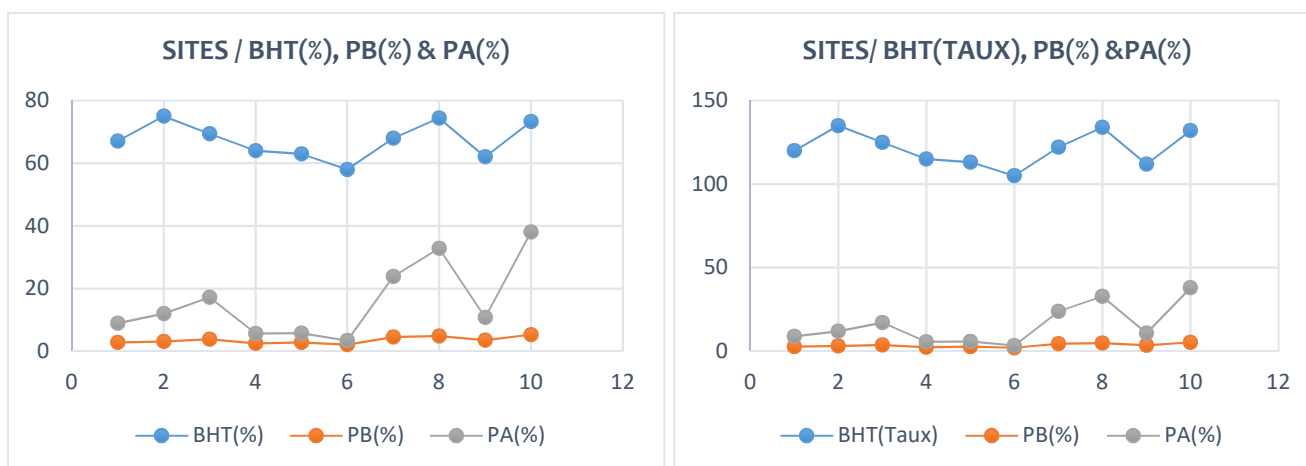


Figure 4.9

2.4.4.2.6 INTERPRETATION DES RESULTATS

- Le site 2 est un site full trafic, ou un site qui reçoit beaucoup d'appels par heures, c'est à 75% que la BTS/NODEB est sollicitée, ceci est dû surtout à sa position géographique, car il se trouve dans un milieu mouvementé, sur la même avenue que le Stade de football ; aussi cette partie de la ville reçoit beaucoup des visiteurs, pour la détente pendant le weekend, il est suivi du site 8 qui est sollicité à 74.4% (voir tableau 4.11) par heures. Le site le moins sollicité avec un pourcentage de 58 % le site 6 (tab 4.11).
- Après avoir calculés les probabilités de blocages, nous constatons que le site 10 présente un pourcentage élevé de blocage soit 5.3 % i.e, pour tous les appels que cette BTS/NODE B reçoit par heure en moyenne 5.3 % de ces appels sont perdus. Suivi de celui du site 7 qui a un pourcentage de blocage de 4.6%, site 8 4.1%, site 3 3.8 % et le site 4 2.5 (ceci est dû à une présence d'une fréquence élevée de Handover i.e la mobilité élevée des appels); enfin et le site qui a un pourcentage de blocage le plus faible est le site 6. Confère figure 4.7.
- En ce qui concerne les probabilités de mise en attente nous remarquons que le site 10 a une probabilité de mise en attente élevée soit 38 % ; il est suivi du site 8 qui a une probabilité de 32.8%. Le site qui a une faible probabilité de mise en attente parmi les dix cités ci-haut est le site 6 avec une probabilité de 3.5 % confère tableau 4.11, ou figure 4.9. Le fait que le site 6 aie un faible pourcentage de blocage d'appels et un faible pourcentage de mise en attente, implique que le site est performant car le blocage peut ou ne pas se produire compte tenu du nombre d'appel qui arrive dans la file. Lorsqu'il se produira, un grand nombre d'appels seront mise en attente.

Tous les sites ont cas même un pourcentage de blocage et de mise en attente qui n'est pas négligeable, car si dans un site aujourd'hui par heure on perd 2.1 % quelle sera alors le pourcentage de blocage à la fin de la journée, c'est vrai ça sera un pourcentage non insignifiant. Donc c'est un nombre important d'appel qu'on perdra à la fin de la journée. Et de même pour la mise en attente c'est ne pas tout le monde qui peut accepter d'attendre pendant un temps donné pour avoir accès au réseau.

Le pourcentage de blocage d'appel acceptable dans une entreprise de télécommunication de la place varie entre 0.75% à 2.3%. Proposons donc une solution pour augmenter la performance du réseau dans les différents sites considérés.

2.4.4.3 AMELIORATION DE LA PERFORMANCE

Notre solution consiste à réduire la probabilité de blocage à un seul seuil pour tous les sites, et le temps d'attente alors nous verrons combien des canaux voix pouvons-nous ajouter pour atteindre ce seuil de blocage. Ajouter les canaux voix c'est la solution la moins coûteuse qui puisse exister.

Supposons que nous avons comme probabilité de blocage de 1.5 % et le temps d'attente est réduite de 15 secondes; trouvons à l'aide d'Erlang Calculator pour une telle probabilité de blocage, les nombres des canaux et les nouvelles probabilités de mise en attente toute en utilisant le même taux de trafic. On obtient après calculs les résultats ci-dessous :

2.4.4.3.1 TABLEAU AVEC UNE Pb(%) FIXEE

Tableau 4.12

N°	SITES	BHT		CANAUX	Tf (sec)	PB(%)	PA(%)
		BHT(Taux)	BHT(%)				
1	1	120	67	136	25	1,5	3,4
2	2	135	75	151	30	1,5	3,4
3	3	125	69,4	141	20	1,5	3,3
4	4	115	64	130	15	1,5	4,5
5	5	113	63	128	15	1,5	3,6
6	6	105	58	120	15	1,5	3,7
7	7	122	68	138	20	1,5	2,3
8	8	134	74,4	150	25	1,5	2,2
9	9	112	62	127	25	1,5	3,9
10	10	132	73,3	148	25	1,5	3,8

2.4.4.3.2 COURBE REPRESENTATIVE DE SITES EN FONCTION PA (%) ET PB (%) FIXEE

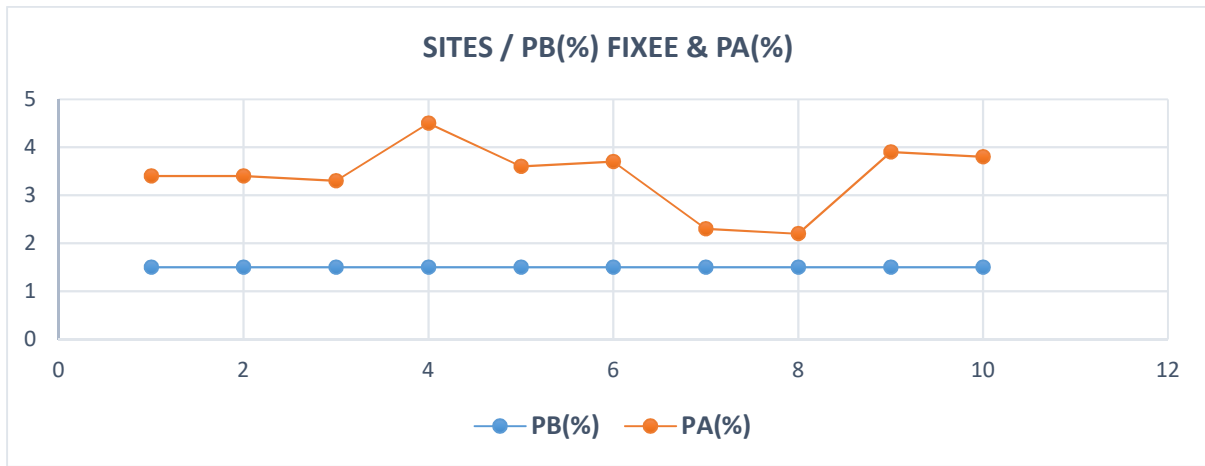


Figure 4.10

2.4.4.3.3 COURBE GENERALE DE SITES AVEC PROBABILITE DE BLOCAGE FIXE

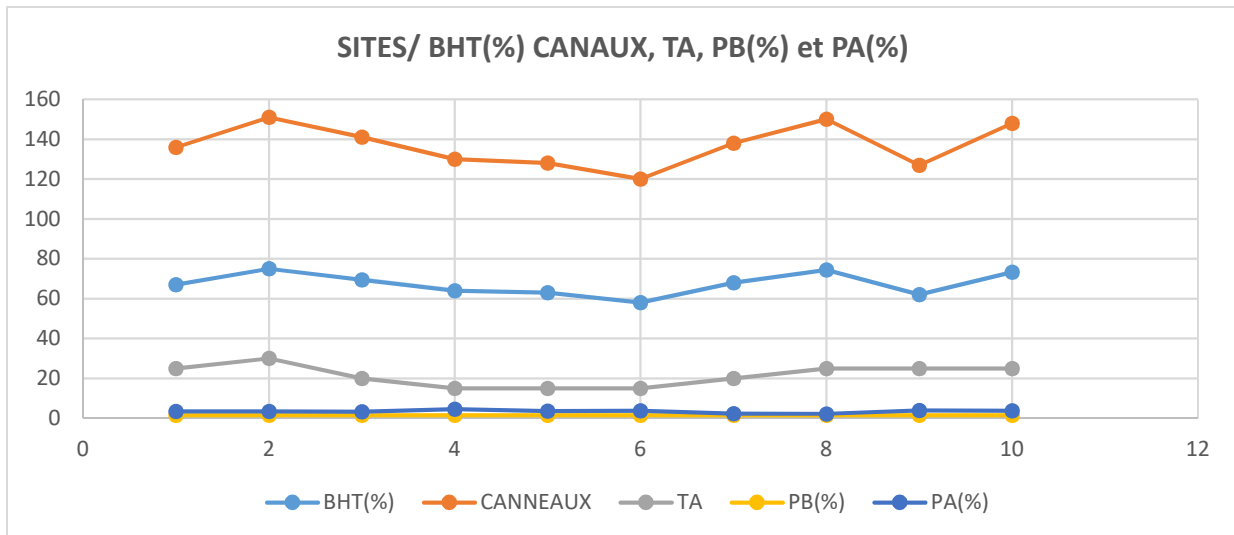


Figure 4.11

2.4.4.3.4 CALCULS ET INTERPRETATION

Après calcul nous obtenons les résultats suivants :

TABLEAU GENERAL APRES AJOUT DES CANAUX

Tableau 4.13

N°	SITES	BHT		Canaux in	Canaux Ajoutés	Canaux Finaux	Tf. In (sec)	Tf. Fin (sec)	PB(%)	PA(%)
		TAUX	%							
1	1	120	67	130	6	136	40	25	1,5	3,4
2	2	135	75	144	7	151	45	30	1,5	3,4
3	3	125	69,4	132	9	141	35	20	1,5	3,3
4	4	115	64	126	4	130	30	15	1,5	4,5
5	5	113	63	123	5	128	30	15	1,5	3,6
6	6	105	58	117	3	120	30	15	1,5	3,7
7	7	122	68	127	11	138	20	20	1,5	2,3
8	8	134	74,4	138	10	150	40	25	1,5	2,2
9	9	112	62	120	7	127	40	25	1,5	3,9
10	10	132	73,3	135	13	148	40	25	1,5	3,8

Nous aurons les courbes représentatives suivantes :

COURBE REPRESENTATIVE DE SITES EN FONCTION DE CANAUX & SITES EN FONCTION DE PB(%) FIXE, PA(%)

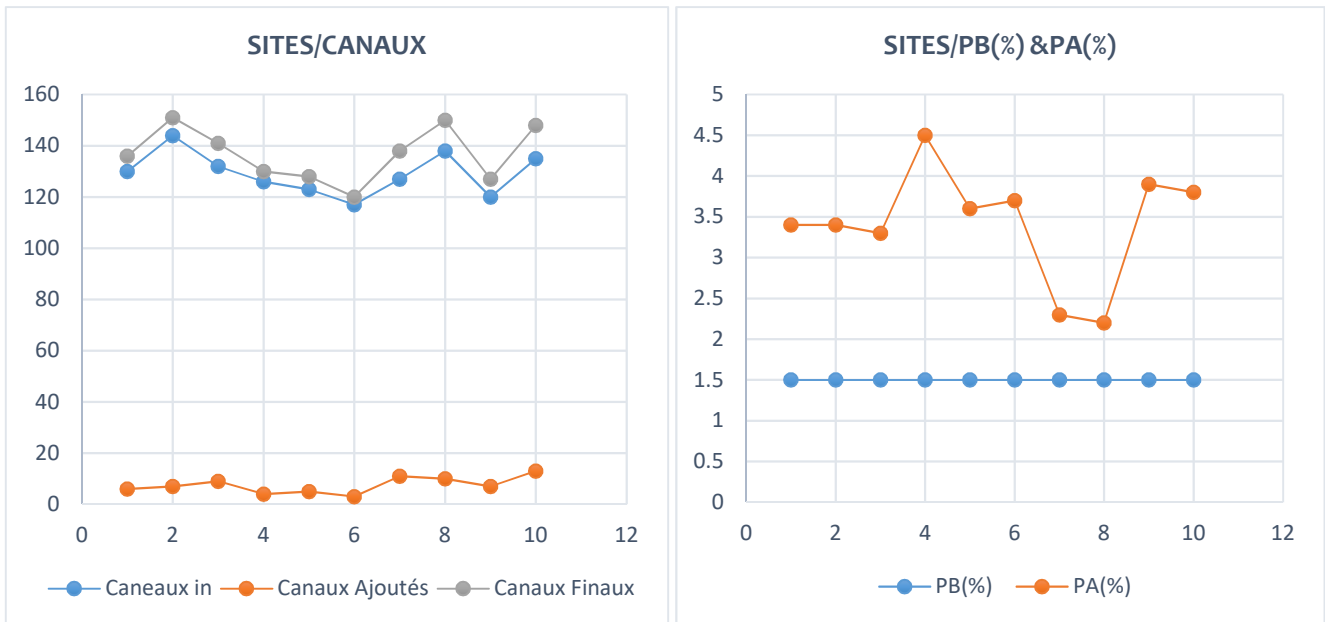


Figure 4.12

COURBE REPRESENTATIVE DE SITES EN FONCTION DE TOUS LES PARAMETRES

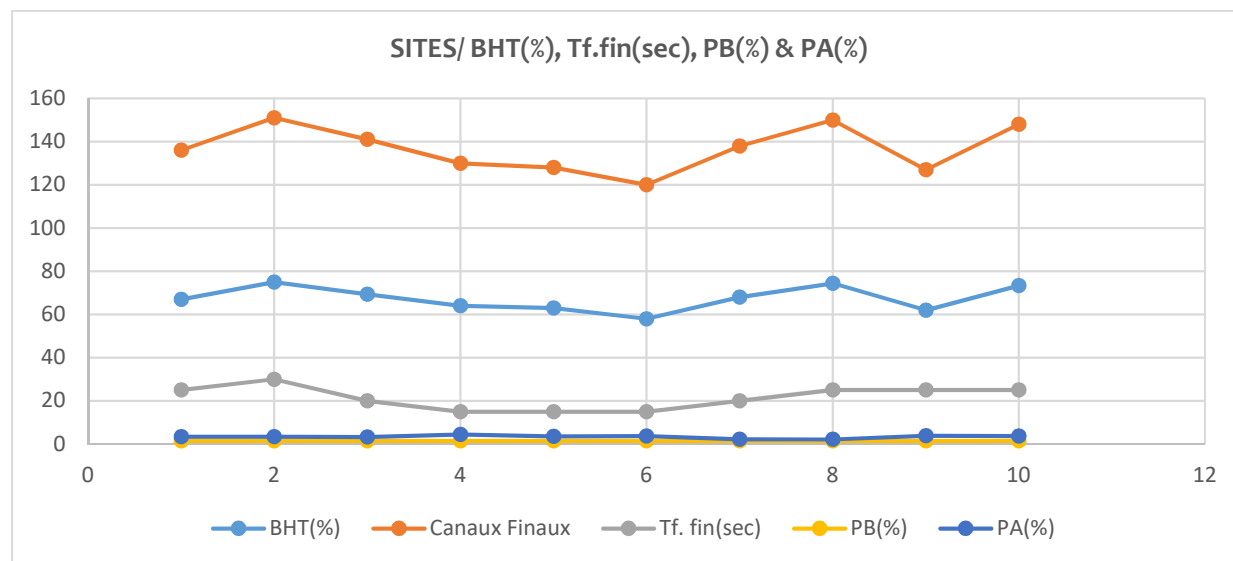


Figure 4.13

INTERPRETATION

La probabilité de blocage étant fixe (Voir tableau 4.13, Figure 4.12 ou Figure 4.13) et le temps d'attente (Tf (sec)) étant réduite de 15 secondes pour chaque sites, nous aurons après calculs que :

- Le nombre des canaux augmentera tels que pour le site 1, on doit ajouter 6 canaux et alors on aura comme probabilité d'attente 3.4% de même que pour le site 2 qu'il faut ajouter 7 canaux. Pour le site 3 il faudrait ajouter 9 canaux et donc la probabilité d'attente passera de 17.2 % à 3.3 %.
- Pour le site 4 il faudrait ajouter 4 canaux avec une probabilité d'attente de 4.5%. au site 5 on y ajoutera 5 canaux ; au site 6, 3 canaux, au site 7, 11 canaux, au site 8, 10 canaux, au site 9, 7 canaux, et enfin au site 10 on ajoutera 13 canaux.
- Le site qui désormais aura une probabilité d'attente élevé et le site 4 soit 4.5% (cela ne posera pas des problèmes compte tenu du handover que site présente souvent ce site) suivi du site 9 soit 3.9 %, et enfin le site qui présente un pourcentage faible de probabilité de mise en attente est le site 8 soit 2.2 %.
- Le site où ajoutera un plus grand nombre de canaux et le site 10 soit 13 et la probabilité d'attente passera de 38 % à 3.8 %, il est suivi du site 7 soit 11 canaux et ensuite le site 8 soit 11 canaux, et le site où on ajoutera un petit nombre de canaux c'est le site 6 soit 3 et la probabilité de mise en attente sera de 3.7%.

En tenant compte de cette suggestion nous observons que la probabilité de mise en attente sera réduite, le nombre de canaux augmenteront, dans l'objectif d'asservir un nombre élevé d'abonnés qui sollicitent le service dans le réseau de télécommunication, ceci est l'une de façon, mais la meilleur pour augmenter la performance de la qualité du réseau.

3 CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Comme annoncé à l'introduction, notre article a présenté l'approche stochastique de la congestion (blocage) dans les réseaux 2G à 4G⁺ avec application et de faire l'analyse de cette congestion, mais pour le faire nous nous sommes intéressées à la BTS/NODE B.

Nous avons modélisé l'arrivée d'appels à la BTS/NODE B., celle-ci suit la loi de poisson avec un taux déterminé tandis que la durée d'appels suit la loi exponentielle négative ; la modélisation du processus de blocage (congestion) nous amène à la formule d'erlang B et la mise en attente nous a conduit à la formule d'erlang C.

Nous avons terminé par la détermination de probabilité de blocage et de mise en attente pour les 10 sites de la ville à l'aide d'erlang calculator et le C-modeler. Enfin vue les résultats nous avons fait une proposition pour améliorer la qualité et la performance et ces résultats ont été pris en compte pour permettre aux usagers de bien utiliser ce réseau. Mais le blocage

(Congestion) ou l'approche stochastique ne se fait pas seulement au niveau de la BTS/NODE B, même au niveau de la MSC/CNC, voilà ce qui pourra faire l'objet de notre prochain article.

REFERENCES

- [1] NASER SAHEB, description d'un processus de poisson, bordeaux. Octobre 2004
- [2] M Roussignol et Daniel FLIPO : file d'attente et fiabilité, UST de Lille 2009
- [3] F BIENVENUE DUHEILLE, processus stochastiques, clude bernard Lyon 2010Xerina
- [4] Aziz& FERON Nicolas Les réseaux GSM, 3G, UMTS, 4G, GPRS et la télé sur mobile ; liège 2011.
- [5] C.DEMOULIN, Marc VAN D. principes de base du fonctionnement du réseau GSM ; institut Montefiore de Liège. 2004
- [6] B. Walke. Mobile Radio Networks: networking, protocols and traffic performance. John Wiley & Sons, 2002.
- [7] J. Tisal. Le réseau GSM. L'évolution GPRS : une étape vers UMTS. Dunod, troisième édition, 1999
- [8] Ruegg, A. (1989). Processus stochastiques, Volume 6 of Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur [Mathematical Methods for the Engineer]. Lausanne : Presses Polytechniques Romandes. Avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité. [With applications to queueing and reliability].
- [9] J. Clément, P. Flajolet, and B. Vallée, Dynamical sources in information theory: A general analysis of trie structures, *Algorithmica*, 29 (2001), p. 307369.
- [10] P. Duchon, N. Hanusse, N. Saheb, and A. Zemmari, Broadcast in the rendezvous model, in STACS, V. Diekert and M. Habib, eds., vol. 2996 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2004, pp. 559–570.
- [11] P. Duchon, N. Hanusse, N. Saheb, and A. Zemmari, Broadcast in the rendezvous model, *Inf. Comput.*, 204 (2006), pp. 697–712.
- [12] M. Dietzfelbinger, The probability of a rendezvous is minimal in complete graphs, in ISAAC, P. Bose and P. Morin, eds., vol. 2518 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2002, pp. 55–66.
- [13] M. Dietzfelbinger and H. Tamaki, On the probability of rendezvous in graphs, *Random Struct. Algorithms*, 26 (2005), pp. 266–288.
- [14] Bouleau, N. Processus stochastiques et applications. Hermann, Paris 1988.
- [15] Comets, F. and Meyre, T. Calcul stochastique et modèles de diffusions. Dunod. 2006
- [16] Le Gall, J.-F. Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique 2012.
- [17] S. FDIDA, G. PUJOLLE – Modèles de systèmes et de réseaux, tome I – Performance, Eyrolles, Paris, avril 1989.
- [18] H. KOBAYASHI, A.C. KONHEIM – Queueing models for computer communications system analysis, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 25, pp. 2-29, 1977.
- [19] G. PUJOLLE, S. FDIDA – Modèles de systèmes et de réseaux, tome II – Files d'attente, Eyrolles, Paris, avril 1989.
- [20] Belarbi. F and Bouchentouf. A. A. Condition de stabilité d'un réseau de files d'attente à deux stations et N classes de clients. *General Mathematics*, Vol 18 :85-108, 2010.
- [21] Benouaret. Z. Stabilité forte dans les modèles de risque. Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Bejaia, 2012.
- [22] Baynat, B. Théorie des files d'attente-des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit. Paris, Hermès Science Publications, 2000.
- [23] Burke. P. J. The output of a queueing system. *Operations Research*, Vol. 4 :699-704, 1956.
- [24] Chabriac. C. Processus stochastiques et modélisation. Université de Toulouse le Mirail, Master 2, Année 2012-2013.
- [25] GUEDJALI Mounira. SANA Wissem. Les Réseaux de Files d'Attente à Forme Produit. Mémoire de Master, Université A. MIRA de Béjaia.
- [26] Willing. A. A short introduction to queueing theory. Technical University Berlin, Télécommunication Networks Group, 1999.
- [27] Dominique SERET, Ahmed MEHAOUA et Neilze DORTA. RESEAUX et TELECOMMUNICATIONS. Cours L3 Université René descartes-Paris 5 2005-2006.
- [28] G. Baudouin et al., Radiocommunications numériques : Principes, modélisation et simulation, Dunod, Paris, 2002.
- [29] S. Haykin and M. Moher, *Modern Wireless Communications*, Pearson Prentice Hall, NJ, 2003
- [30] T. S. Rappaport, *Wireless Communications, Principles and Practice*, Second Edition, Prentice Hall PTR, NJ 2002.
- [31] Prontère. A. Insensibilité et Bornes Stochastiques dans les réseaux de files d'attente. Phd Thesis, Ecole Polytechnique, Novembre 2003.
- [32] Nitto Personé V. De. S. Balsamo and R. Onvural. Analysis of queueing networks with blocking. Kluwer Academic Publishers, 2001.