International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 18 No. 1 Oct. 2016, pp. 191-214

http://www.ijias.issr-journals.org/

RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

[RESOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS ON CONSTANT COEFFICIENTS]

Théodore Mapendo Wendo

Département de Mathématique-physique,
Institut Supérieur Pédagogique d'Idjwi (ISP-IDJWI),
Idjwi, Sud-Kivu, RD Congo

ABSTRACT: In mathematical analysis, methods were developed for solving differential equations as there is no general method for solving these equations. However, in Algebra, the simultaneous equations are those for which the roots all check equations, they form the system of equations. We note in the study of differential equations that the system of differential equations is not very developed yet many books to refer analysis but not explicitly. And these systems can be put in matrix form. This allows the resolution of these systems by using the matrices being given various operations on the matrix and determinant calculation. The ideal of this article is to make the public interested in mathematics, clear text with a more understandable language on solving linear ordinary differential equations systems with constant coefficients. Our research is limited to the case of linear differential equations with constant coefficients. We do not claim to theorize on solving ordinary linear differential equation systems with constant coefficients less and extend applications.

KEYWORDS: homogeneous equation, inhomogeneous equation, differential system, solving a normal system.

RESUME: En Analyse mathématique, des méthodes sont développées pour la résolution des équations différentielles car il n'existe pas de méthode générale de résolution pour toutes ces équations. Cependant, en Algèbre, les équations simultanées sont celles pour lesquelles les racines vérifient toutes les équations, elles forment le système d'équations. Nous remarquons pendant l'étude des équations différentielles que, le système d'équations différentielles n'est pas très développé pourtant beaucoup de livres d'Analyse en font référence mais de manière non explicite. Et ces systèmes peuvent se mettre sous forme matricielle. Ce qui permet la résolution de ces systèmes en se servant des matrices étant données diverses opérations sur le calcul matriciel et déterminant. L'idéal de cet article est de mettre à la disposition du public intéressé par les mathématiques, un texte clair avec un langage plus compréhensible sur la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants. Notre recherche se limite au cas de système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous n'avons pas de prétention à élaborer une théorie sur la résolution les systèmes d'équation différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants moins en étendre des applications.

MOTS-CLEFS: équation homogène, équation non homogène, système différentiel, résolution d'un système normal.

1 INTRODUCTION

1.1 NOTE LIMINAIRE

Le lecteur du présent article devra être familier aux notions élémentaires traitant des équations différentielles telles que leurs définitions et leurs résolutions. $3 + 4 = 7$ est une simple opération d'Arithmétique. $3 + y = 7$ est une équation, par la présence d'une inconnue qu'il faille déterminer pendant la résolution. L'inconnue peut intervenir dans l'équation à l'aide d'un opérateur (être mathématique de transformation). C'est ainsi que nous avons par exemple $3 + \sqrt[4]{y} = 7$, une équation irrationnelle ; $\log_2 3 + y = 7$, une équation logarithmique ; $e^{3+y} = 7$, une équation exponentielle ; $\tan^{-1}(3 + y) = 7$, une équation trigonométrique ; $\int(3 + y)dy = 7$, une équation intégrale ; $3 + y' = 7$ ou $3 + \frac{dy}{dx} = 7$ est une équation différentielle ; etc. Parmi les équations différentielles nous distinguons les équations différentielles ordinaires (qui sont des équations dans lesquelles nous avons une seule variable indépendante) et les équations aux dérivées partielles (dans lesquelles nous avons plus d'une variable indépendante). Des équations différentielles ordinaires, nous trouvons celles à coefficients constants et d'autres à coefficients variables. L'ensemble des équations à coefficients constants forme un système d'équations qu'on peut écrire sous forme d'une matrice et effectuer diverses opérations dans cet angle. Ceci est le socle de cette étude.

1.2 GENERALITES

DEFINITION 1

On appelle équation différentielle, toute équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Symboliquement on peut l'écrire comme suit:

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \text{ ou } f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

EXEMPLES :

1. $\frac{dy}{dx} = 2x.$
2. $y''^2 = (1 + y')^3.$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$
4. $\frac{d^2y}{x^2} = -a \sin x.$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

DEFINTION 2

On appelle ordre d'une équation différentielle ; l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Exemples : 1)$y' - 2xy^2 + 5 = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.

2) $y'' + ky - by - \sin x = 0.$ est une équation differentielle du second ordre.

DEFINTION 3

On appelle degré d'une équation différentielle ; l'exposant de la puissance la plus élevée.

Ex :1) $y'' - y'^7 + 5y^2 + 2x = 1.$ 1 est de degré 3

2) $(y'')^2 = (1 + y'^2)^3$ est du second degré.

DEFINITION 4 :

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n, toute équation différentielle de la forme : $\mathrm{p_0 y^n + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = Q}$ où $\mathrm{p_0, p_1, p_{n-1}, \dots, p_n}$ sont des fonctions de x ou des constantes avec $p_0 \neq 0$.

EXEMPLES:

1) $xy''' + 2xy'' - 5y' - xy = \sin x$.

2) $y'' - 3y' + 2\mathrm{y} = 0$

En particulier :

*si Q=0, alors l'équation différentielle linéaire est dite « **homogène » ;** tous les termes sont de degré en y et ses dérivées.

*si l'équation est de la forme

$\mathrm{p}_{0(ax+b)^n}\mathrm{y^n} + \mathrm{p}_{1\,(ax+b)^{(n-1)}}\mathrm{y^{(n-1)}} + \cdots + \mathrm{p_{n-1\,(ax+b)}y' + p_n y} = 0$, alors elle est dite de LEGENDRE.

DEFINITION 5

Une solution ou intégrale d'une équation différentielle est une relation entre les variables intervenant dans cette équation et d'après laquelle l'équation est satisfaite identiquement. Ainsi,

(1) $y = a \sin x$ est une solution de l'équation différentielle

(2) $\frac{d^2y}{dx^1}$+ y =0 car en différentiant (1), il vient

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}$ = - a sin x

Si maintenant, nous substituons (1) et (3) dans (2) nous obtenons

$-asinx + a \sin x = 0$, la relation qui montre que (2) est satisfaite. Ici, a est une constante arbitraire.

On peut montrer de la même façon que y = b cos x est une solution de (2) pour une valeur quelconque b.

La relation : (4) y = c_1 sin x + $c_2 \cos x$ est encore solution plus générale de (2)

En effet, en donnant des valeurs particulières à c_1 et c_2 , on voit que la solution (4) comprend des solutions (1) et (4). Les constantes arbitraires c_1 et c_2 qui apparaissent dans ces solutions sont appelées constantes d'intégration. Une solution telle que (4) qui contient un nombre des constantes essentiellement arbitraires égale à l'ordre de l'équation est appelée « solution générale ou intégrale complète »

Les solutions que l'on obtient en donnant des valeurs particulières aux constantes sont appelées « solution particulières ou intégrales particulières ».

En pratique, on obtient une solution particulière à partir de la solution générale à l'aide de certaines conditions qu'on impose à cette solution générale.

1.3 INTEGRATION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

1.3.1 EQUATION DU 1ER DEGRE

DÉFINITIONS ET THÉORÈME :

- Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est toute équation de la forme $f(x, y, y') = 0$.

Lorsque cette équation est résolue eny', on peut la mettre sous la forme y'= $f(x, y)$. Dans ce cas, on a le théorème suivant sur l'existence et l'unicité de la solution.

Théorème : Existence de solution.

Si dans l'équation y'=$f(x,y)$, la fonction $f(x,y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans un certain domaine D du plan oxy et si (x_0,y_0) est un point de D, alors il existe une solution unique y=$\varphi(x)$ satisfaisant à la condition y=y_o lorsque x=x_0.

La condition selon laquelle « $y = y_0$» lorsque $x = x_0$ s'appelle condition initiale.

- On appelle solution générale d'une équation du premier ordre, une fonction y=$\varphi(x,c)$ dépendant d'une constante C et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Quelle que soit la constante C, elle vérifie l'équation différentielle.
- Quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ pour $x = x_0$, il existe C= C_0 tel que y=ϕ(x,c_0) vérifie la condition initiale donnée.

Lorsqu'on cherche la solution générale d'une équation différentielle ; on est souvent conduit à une relation implicite ϕ(x,y,c) = 0 que l'on appelle « intégrale générale de l'équation différentielle »

- On appelle solution particulière, toute fonction $y = \varphi\ (x,c_0)$ déduite de la solution générale en posant $c = c_0$. La relation $f(x,y,c_0)$ est dite alors intégrale particulière de l'équation.
- Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à chercher sa solution générale ou son intégrale générale.

Géométriquement, l'intégrale générale représente une famille des courbes planes dépendant d'un paramètre C. Ces courbes sont appelées courbes intégrales de l'équation différentielle donnée. Une intégrale particulière est représentée par une courbe de cette famille passant par un point du plan.

- On appelle « Isocline » de l'équation différentielle $F(x,y,y') = 0$, le lieu géometrique des points vérifiant la résolution $y' = c$; c une constante. A chaque valeur c correspond une isocline. Il est évident que pour la valeur c, l'isocline aura pour équation$f(x,y) = c$. Lorsqu'on a une fonction comportant une constante arbitraire ; cela se fera en éliminant ses constantes $(n+1)$ relations : la fonction elle-même et la $n^{ième}$ relation obtenue en dérivant par rapport à la variable indépendante.

Dans ce cas, la fonction est une intégrale (solution) de l'équation différentielle obtenue.

EXEMPLE :

Trouver l'équation différentielle de la famille des paraboles $y = x^2$. Formons un système $\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} c = \frac{y}{x^2} \\ y' = \frac{2yx}{x^2} \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} c = \frac{y}{x^2} \\ y' = \frac{2y}{x} \end{cases}$ ⇔ x y′-2y=0, x≠0.

- On appelle équation à variables séparées, toute équation de la forme $F(x)dx + G(y)dy = 0$ (1), son intégrale générale est $\int F(x) + \int G(x)dy = c$ (2), dans la quelle c est une constante arbitraire. Les équations qui ne sont pas données sous la forme simple (1) appelées équations à variables séparables peuvent souvent être ramenées à cette forme au moyen de la règle suivante pour séparer les variables :
    - Chasser les dénominateurs des fractions et, si l'équation comprend des dérivées, multiplier par la différentielle de la variable indépendante.
    - Réunir tous les termes contenant la même différentielle en un seul terme. Si alors, l'équation prend la forme $xydx + x'y'dy = 0$ où x, x′ sont des fonctions de x seulement et y, y′ des fractions de y seulement, elle peut être ramenée à la forme (1) en divisant par x'y.
    - Intégrer chaque partie séparément, comme dans (2).

EXEMPLES :

Intégré les équations suivantes :

1) $xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow \int xdx + ydy = c_1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Leftrightarrow x^2+y^2= 2c_1$

Posons $2c_1= c^2$ on a $x^2+y^2=c^2 (c \geq 0)$: équation d'une famille de cercles concentriques en (0,0) et de rayon c.

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = \Leftrightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln y = \ln x \Leftrightarrow lny = 2lnx + c$

$\Leftrightarrow lny = lnx^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad lny = lnx^2 + c$

$\Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x^2 + C} \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^c e^{\ln x^2} (e^C = k)$

$\Leftrightarrow y = kx^2$: équation d'une famille des courbes des paraboles.

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$

1ère opération : $(1 + x^2)xydy = (1 + y^2)dx$

2eme opération : $(1 + y^2)dx - x(1 + x^2)ydy = 0$

Pour réparer les variables, nous divisons par $x(1 + x^2)(1 + y^2)$. Ce qui donne : $\frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{ydy}{1+y^2} = 0$

3e opération : $\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{ydy}{1+y^2} = c$

$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = c$

$lnx - \frac{1}{2} ln (1 + x^2) - \frac{1}{2} ln (1 + y^2) = c$

$ln (1 + x^2) (1 + y^2) = 2lnx - 2c.$

Ce résultat peut s'écrire sous une forme plus simple si nous remplaçons $-2c$ par $log\ c$,

C'est-à-dire nous donnons simplement une nouvelle forme à la constante arbitraire.

Notre solution devient alors :

$ln (1 + x^2) (1 + y^2) = 2lnx + logc$

$ln (1 + x^2)(1 + y^2) = lnx^2 + Logc$

$ln(1 + x^2)(1 + y^2) = lncx^2.$

$(1 + x^2)(1 + y^2) = cx^2.$

4) $a(x\frac{dy}{dx} + 2y) = xy\frac{dy}{dx}$

1ere opération : $axdy + 2aydx = xydy$

2ème opération : $2aydx + x (a - y)dy = 0$

Pour séparer les variables, nous divisons par xy, ce qui donne

$$\frac{2adx}{x} + \frac{(a-y)dy}{y} = 0$$

3e opération $2a \int \frac{dx}{x} + a \int \frac{dy}{y} - \int dy = c$

$2alnx + aln(y) - y = c$

$alnx^2 + aln(y) - y = c$

$lnx^2x^2 + lny = \frac{c}{a} + \frac{y}{a}$

$lnx^2y = \frac{c}{a} + \frac{y}{a}$

En passant des logarithmes aux exponentielles, ce résultat peut être écrit sous forme

$x^2y = e^{c/a+y/a} = e^{c/a}.e^{y/a}$, posons $e^{c/a}$= c, la solution est sous la forme

$x^2y = ce^{y/a}$

1.3.2 EQUATIONS HOMOGENES

L'équation différentielle $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ est dite « homogène » si les fonctions $P(x,y)\ et\ Q\ (x,y)$ sont homogènes de même degré.

Dans ce cas, on démontre aisément que les équations différentielles de cette nature peuvent être résolues en faisant la substitution qui transforme l'équation homogène en une équation dont les variables sont séparables.

- Une fonction $f(x,y)$ est dite homogène de degré n pour toutes ses variables si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$

EXEMPLES :

1. La fonction $f(x,y) = xy - x^2$ est homogène de degré 2
2. La fonction $f(x,y,z) = Ay^2 + 2Bxy + cx^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$ est homogène de degré 2.
3. $f(x,y) = x^2 + xy - 3x$ n'est pas une f (x) homogène de degré 2.
4. Résoudre l'équation $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\ \frac{dy}{dx}$

$y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$

Ici, $P(x,y) = y^2$ et $Q(x,y) = x^2 - xy$; ces deux expressions sont homogène et du second degré en x et y, d'où $dy/dx = y^2/(xy - x^2)$, posant alors $y = vx$, nous obtenons $\frac{vdx+xdv}{dx} = \frac{v^2x^2}{x^2(v-1)}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{vdx} + \mathrm{xdv} = \frac{v^2dx}{v-1}$$

$$\Leftrightarrow xdv = vdx\left(\frac{v}{v-1} - 1\right) \Leftrightarrow \mathrm{xdv} = \frac{vdx}{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-v)dv}{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} - \int dv = c$$

$$ln\,x + lnv - v = c$$

$$lnvx = c + v$$

$$Vx = e^{c+v}$$

$$= e^C.e^v$$

$$vx = ce^v\ (e^c = c)$$

mais $v = \frac{y}{x}$. Par suite, la solution est y= c$e^{y/x}$.

1.3.3 EQUATION LINEAIRE

Définition : une équation différentielle est dite linéaire si l'équation est du premier degré par rapport à la variable dépendante (généralement y) et ses dérivées ou différentielles.

L'équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme : $dy/(dx\ ) + Py = Q$(1) dans la quelle P, Q sont des fonctions de x seulement ou des constantes. De même, l'équation

$dy/(dx\ ) + Hx = J$(2) où H et J sont des fonctions de y ou des constantes, est une équation différentielle linéaire.

Pour intégrer (1), posons $y = uz$ (a) où z est une nouvelle variable et une fonction de x à déterminer. En différentient (a), il devient : $\frac{dy}{dx}$ = u $\frac{dz}{dx}$ +z $\frac{dy}{dx}$ (b).

En substituant (a) et (b) dans (1), nous obtenons.

$$u\,\frac{dy}{dx} + z\,\frac{dz}{dx} + Puz = Q \quad ou\, u\frac{dz}{dx} + (\frac{du}{dx} + Pu)z = Q(c)$$

Déterminons maintenant u en intégrant $du/(dx) + Pu = 0$ (d)

où l'on peut séparer les variables x et u, puis utilisant cette valeur de u dans la quelle x et z sont séparées.

Il est évident que les valeurs de x et z ainsi trouvées satisferont à (c) ; la solution de (1) sera donnée par (a)

EXEMPLES :

Résoudre les équations :

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{5/2}$ (1) P = $-\frac{2}{x+1}$ et Q = $(x+1)^{5/2}$ (2)

Posons $y = uz$; alors $dy/(dx) = u\,dz/(dx) + z\,du/(dx)$.

En substituant de l'équation (1), nous obtenons.

$u\frac{dz}{dx} + z\,\frac{dy}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{5/2}\, ou\, u\frac{dz}{dx} + (\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x})\, z = (x+1)^{5/2}$ (2)

Pour obtenir u, nous égalons à zéro le coefficient de z, ce qui donne :

$du/(dx) - 2u/(1+x) = 0$

En intégrant, on obtient $lnu = 2Ln\,(1+x) = Ln\,(1+x)^2$

$$u = (1+x)^2\ (3)$$

L'équation (2) devient maintenant, puisque le terme en z disparait, $u\frac{dz}{dx} = (x+1)^{5/2}$

En remplaçant u par sa valeur d'après (3), il devient $\frac{dz}{dx} = (x+1)^{5/2}$

D'où en intégrant $dz = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$$z = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + c \quad (4)$$

Substituant alors dans $y = uz$, les valeurs fournies par (4) et (3) pour z et u, on obtient la solution générale

$$y = \frac{2(x+1)^{7/2}}{3} + c(x+1)^2$$

2) Donnez l'expression de la solution générale de l'équation linéaire

$dy/(dx) + py = Q$ (1)

Tirons $lnu + \int pdx = \ln k$ où $\ln k$ est la constante d'intégration. De là, il vient

$u = ke^{-\int pdx}$.

Substituons u dans $du/(dx) + Pu = 0$ et séparons les variables, nous obtiendrons

$$dz = \frac{Q}{K}\, e^{\int Pdx}\, dx$$

Enfin, intégrant et substituant dans $y = uz$, on obtient le résultat

$$y = e^{-\int Pdx}\, (\int Q\, e^{\int Pdx}\, dx + c)$$

Il est à remarquer que la constante K disparait dans le résultat final.

1.3.4 EQUATION REDUCTIBLES A LA FORME LINEAIRE

1.3.4.1 EQUATION DE BERNOULLI

Définition : On appelle équation de BERNOULLI, toute équation de la forme

$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ (1) dans laquelle P, Q sont des fonctions de x seulement ou de constantes et $n \in N \setminus \{0,1\}$. L'équation (1) peut être ramenée à la forme linéaire au moyen de la substitution $z = y^{-n+1}$.

Toutefois, cette réduction n'est pas nécessaire si nous employons la méthode, pour trouver la solution que celle donnée pour l'équation linéaire.

1.3.4.2 EQUATION DE RICCATI

Définition : on appelle équation de RICCATI, toute équation différentielle du type

$dy/(dx) = Ay^2 + By + c$ (1) où A et B et c sont des fonctions continues ou des constantes. Si l'on connait une intégrale particulière de l'équation (1) alors l'intégrale de l'équation (1) se ramène à celle de BERNOULLI.

Remarque : l'équation de RICCATI est un cas particulier de l'équation de BERNOULLI pour n=2.

En effet, supposons connue en avance une solution particulière.

$y = y_1 x$, posons $y = z + y_1$, alors $y' = z' + y'_1$ (2)

(2) dans (1) donne $z'+y'_1 = A(z+y_1)^2 + B(z+y_1) + c$ (3)

Mais y vérifie l'équation (1)

Donc $Ay_1^2 + By_1 + c = y'_1$ (4)

Par suite, (4) dans (3) donne $z = B'z^2$ qui est une éqaution de BERNOULLI donnant z, donc $y = z + y_1$.

EXEMPLE :

Résoudre $(1 + x3)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1+x^3}y^2 - \frac{x^2}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^3}$ ou $A = \frac{-zx}{1+x^3}$, $B = \frac{x^2}{1x^3}$ et $C = \frac{1}{1+x^3}$

Solution particulière $y_1 = a\,x + b$, $y'_1 = a$

On a: $(1 + x3)\,a + 2x(ax + b)^2 + x^2(ax + b) + 1 = 0$

$a = -1 \; et \; b = 0$

$y_1 = -x$

Posons en fin $y = z + y1 \Leftrightarrow y = z - x \Leftrightarrow z = +y$

$y' = z' - 1$

$(1 + x3)(z' - 1) + 2x\,(z - x)^2 + x^2(z - x) + 1 = 0$

$z' - \frac{3x^2z}{1+x^3}\,z = \frac{-2x}{1+x^3}\,z^2$

$\frac{dz}{dx} - \frac{3x^2}{1+x^3}z = -\frac{2x}{1+x^3}z^2$ (équation de Bernoulli)

1.3.4.3 EQUATION DE CLAIRAUT

Définition : On appelle équation de Clairaut ; toute équation de la forme

$y = xy' + p\,(y')$ (1) ou y $\frac{xdy}{dx}$ + p $\frac{dy}{dx}$ (1)

Nous obtenons la solution générale en posant $y' = c$ ou $\frac{dy}{dx} = c$.

(1) devient $y = cx + p\ (c)$

Dans ce cas, toute solution singulière de cette équation est « l'enveloppe L » de la famille des droites définie pour cette intégrale générale. Une enveloppe L d'une famille de courbe à un paramètre étant définie comme « une courbe qui est tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille considérée »

Exemple : trouver l'intégrale générale et singulière de :

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

La solution générale est $y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$

La solution singulière : $\begin{cases} \phi(x,y,c) = 0 \\ \phi(x,y,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{ac^3}{\sqrt{1+c^2)3}} \\ y = \frac{-a}{\sqrt{1+c^2)3}} \end{cases}$

En déterminant c, après avoir élevé chacune de ces équations à la puissance 2/3 et en ajoutant membre à membre, on obtient la solution singulière sous la forme $x^{2/3}+y^{2/3}= a^{2/3}$ (équation d'une astroïde)

1.3.4.4 EQUATION DE LAGRANGE

On appelle ainsi, toute équation de la forme

$y = x\varphi\ (y') + \psi(y')\ (1)$ où φ et ψ sont des fonctions quelques équation de LAGRANGE.

En posant P=y', on a y=φ(p) + ψ(p) $(1')$

En dérivante $(1')$ par rapport à x, on obtient

$$P = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

$$P - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}\ (1'').$$

Immédiatement, certaines solutions de cette équation sont déterminées pour toute valeur constante $p = p_0$ vérifiant la condition $p_0 - \varphi(p_0) = 0$

De (1) : tirons la solution générale $\frac{dx}{dp}$ - $\frac{\varphi(p)x}{p-\varphi(p)}$ = $\frac{\psi(p')}{p-p(p)}$

EXEMPLE

Trouve l'intégrale générale et singulière de l'équation.

$$y = x\,y'^{\,2} + y'^{\,2}$$

Posons $y' = p$, d'où $y = xp^2 + p^2$

En dérivant par rapport à x, on a :

$$P = p^2 + (2px + 2p)\frac{dp}{dx}$$

Solution singulière : $p - \varphi(p) = 0$

$$p - p^2 = 0$$

$$p = 0\ ou\ p = 1$$

$y' = 0\ ou\ y' = 1 \Leftrightarrow y = c_1\ ou\ y = x + c_1$

On les confirmera après avoir trouvé l'intégrale générale.

En outre $\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{1-p} = \frac{2}{1-p}$ est une équation linéaire en x par rapport à la variable p.

On en tire $x = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2}$

En éliminant p, il devient $y = \int dx + c\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$= x + 1 + c_2{}^2 + 2c\sqrt{1+x}$

$= (c + \sqrt{x+1})^2$

Ainsi, y =c_1 est une solution singulière tan disque $y = x + 1$ est une solution particulière pour c=0.

1.4 EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE SUPERIEUR A UN

On appelle équation différentielle d'ordre n, toute équation qui peut s'écrire sous la forme, $F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ (1) et qui se résout par rapport à la dérivée n ; c'est-à-dire

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ (1').

Résoudre ou intègre une équation différentielle d'ordre n ; c'est trouver la solution :

* générale, lorsque les conditions initiales ne sont pas données.

* particulière de l'équation satisfaisant aux conditions initiales si elles sont données.

1.4.1 EQUATION DIFFERENTIELLE DU TYPE : $y^{(n)} = f(x)$

C'est l'équation d'ordre n la plus simple.

$f(x)$ étant une fonction de x seulement ou une constante.

Procédé : pour intégrer ; on multiplie les deux membres par dx et l'intégration donne :

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{dy^n}{dx^n}\, dx$

$= \int f(x)\, dx + c_1$

Puis l'on répète $(n-1)$ une fois ce calcule et l'on obtient la solution générale qui compte

n constantes arbitraires.

EXEMPLES :

Résoudre

1) $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$

En intégrant une première fois, après avoir multiplié les deux membres par dx on a.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + c_1$

$xe^x - e^x + c_1$.

En intégrant pour la $2^{ième}$ fois, il devient :

$\frac{dy}{dx} = \int x e^x - \int e^x dx + \int c_1 dx + c_2$

$= xe^x - 2e^x + c_1x + c_2$

En integrant une $3^{ème}$ fois, il vient

$$y = \int xe^x\ dx - 2\int e^x dx + c_1\int xdx + \int c_2 dx + c_3$$

$$= xe^x - 3e^x + \frac{c_{1x^2}}{2} + c_2x + c_3$$

$$= y = xe^x - 3e^x + C_1\, x^2 + C_2 x + C_3.$$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$

Ici, $\frac{d^2y}{dx^2}$ = $-a^2y$ (l'équation du type $\frac{d^2y}{dx}$=y).

Multiplions les deux membres par, $y'dx$.

$$y'\,dy' = -a^2ydy$$

En intégrant, on a : $\frac{1}{2}y'^2 = -\frac{1}{2}a^2y^2+c$

$$y' = \sqrt{2c - a^2y^2}$$

En posant $2c = c_1$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{(c_1 - a^2y^2)}$

En prenant le signe + devant le radical, on sépare les variables.

$\frac{dy}{\sqrt{c_1 - a^2y^2}}$ = dx et on intègre, d'où $\frac{1}{a}$ arc sin $\frac{ay}{\sqrt{c_1}}$ = x+c_2 ou arc sin $\frac{ay}{\sqrt{c_1}}$ = ax + c_2

Ce qui est la même chose que $\frac{ay}{\sqrt{c_1}}$ = sin (ax+c_2)

$$= \sin ax \cos a\, c_2 + \cos ax \sin a\, c_2$$

Ou y = $\frac{\sqrt{c_1}}{a}$ cos a $c_2 \sin ax$ + $\frac{\sqrt{c_1}}{a}$ = sin a $c_2 \cos ax$

= $c_1 \sin ax$ + $c_2 \cos ax$ (réponse).

1.4.2 EQUATIONS DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU SECOND ORDRE A COEFFICIENT CONSTANT

DÉFINITION :

On appelle équation linéaire du second ordre, toute équation de la forme

$\frac{d2y}{dx}$ +P $\frac{dy}{dx}$ +q y = x (1) où p et q sont des constantes et x une fonction ou une constante.

Elle joue un rôle important en mathématique appliquée.

Intégrer une équation linéaire du second ordre revient à trouver :

- La solution générale de l'équation homogène

  $\frac{d2y}{dx^2}$ + P$\frac{dy}{dx}$ + q y = 0.

- La solution particulière quelconque y^* de l'équation (1)

Ainsi, la solution générale(1) est donnée par $y = y^* + y^-$

1.4.2.1 EQUATION HOMOGENE DU SECOND ORDRE

Ce sont des équations de la forme $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ (1) où p et q sont de constantes.

Elle est souvent appelée : équation sans second membre.

Cherchons s'il existe des solutions particulières le (1) de la forme

y = e^{rx} (a).

Dérivant (a), on obtient $\frac{dy}{dx}$ = rxe^{rx} , $\frac{d^2y}{dx^2}$ =r^2e^{rx} (b)

D'où en subsistant dans (1) les deux membres pare^{rx}, on a $r^2 + pr + q = 0$(c) (Equation caractéristique).

Les racines de cette équation du second degré fournissent les valeurs de r.

Premier cas : Si elle a deux racines distinctes, r_1 et r_2, elle fournit deux solutions particulières distinctes de (1) y = e^{r_1x}et $y = e^{r_2x}$ (d)

La solution générale de (1) est alors y = $c_1 e^{r_1 x}$ + $e^{r_2 x}$ (5)

Exemples : Résoudre

1. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - 2$\frac{dy}{dx}$ - 3y = 0

L'équation caractéristique est r^2 - 2r – 3 = 0

Ses racines sont égales à 3 et – 1.

La solution générale est y = $c_1 e^{3x}$ +c_2 e^{-x}

2. $y'' + y' -2y = 0$

L'équation caractéristique est r² + r-2 = 0

Ses racines sont égales a' – 1 et 2.

La solution générale est y = $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x.}$

Deuxième cas : cas des racines réelles égales : les racines de l'équation caractéristique (c) sont égales lorsque P² = 4 q on peut alors écrire (c) en remplaçant q par $\frac{P^2}{4}$.

$r^2 + P^2 + \frac{P^2}{4} = (r + \frac{P}{2})^2 = 0$

D'où $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$.

Dans ce cas, y = $c_1.e^{r_1 x}$ et y = $c_2 x e^{r_1 x}$ sont des solutions particulières distinctes et y = $c_1.e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}$ est la solution générale ou y = $e^{r_1 x}$ ($c_1 + c_2 x$)

Exemple :

Résoudre

1) $y'' - 4y' + 4 = 0$.

L'équation caractéristique est r²-4r+4 = 0 avec Δ = 0

Cette équation admet une racine double $r_1 = r_2 = 2$.

La solution générale est donc y = $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

= $e^{2x}(c_1 + c_2 x)$

2) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt}$ + s = 0. Déterminer la solution particulière telle que s= 4 et $\frac{dS}{dt}$ = -2 pour t = 0.

L'équation caractéristique est r²+2r+1 = 0

L'équation a donc une racine double égale -1.

La solution générale est s = $c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

= e^{-t} ($c_1 + c_2 t$).

Déterminons les constantes c_1 et c_2 de façon qu'on ait s= 4, $\frac{dS}{dt}$ = 2 pour t = 0

s= $e^{-t}(c_1+c_2t)$, ce qui donne par dérivation.

$\frac{ds}{dt} = e^{-t}(c_2 - 4 - c_2 t)$

Or d'après les conditions initiales données, on doit avoir $\frac{dS}{dt}$ = -2

pour t = 0. Ce qui entraine c_2 = 2.

La solution particulière demandée est donc s = e^{-t} (4+2t)

Troisième cas de racines imaginaire : si les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires, l'exposant de y = $c_1e^{r_1x}$ + $c_2e^{r_2x}$ sera imaginaire. On peut toutefois obtenir une solution générale en choisissant pour $c_1$et $c_2$des valeurs imaginaires.

Ainsi $y = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et y = $e^{\alpha x}$sin βx sont des solutions particulières réelles de l'équation.

Exemple :

Résoudre

1) $\frac{d^2}{dx^2}$ +K^2y = 0

La solution générale est y = A cos K x +B sin K x

2) $\frac{d^2x}{dt^2}$ + 16x = 0

L'équation caractéristique est $r^2 + 16 = 0$

K = ± 4i

La solution générale est y = C_1cos 4t + C_2 sin 4t.

3) $y'' + 2y' + 5y = 0$, Δ = - 16 > 0

K_1 = - 1+2i et K_2 = -1-2i sont des racines de l'équation caractéristique.

La solution générale est alors y = (C_1cos 2x + C_2 sin 2x) $e^{-x.}$

1.4.2.2 EQUATION NON HOMOGENE DU SECOND ORDRE

Ce sont des équations de la forme $\frac{d^2y}{dx}$ + P$\frac{dy}{dx}$ +qy = $f(x)$ ou p et q sont des constantes et $f(x)$une fonction de la variable indépendante x ou une constante.

Trois opérations successives sont alors nécessaires, à savoir :

- Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre, soit $y = u$.
- Déterminer par certains procédés une solution particulière de $y = v$ de l'équation (1).
- La solution générale de (1) est alors y = u + v (2).

Cette valeur de y donnée par (2) contient deux constantes arbitraires; si on la substitue dans (1) on croit que cette équation est satisfaite.

Cas général : il peut se faire que $y = x$ soit une solution particulière de (1) ; si ce n'est pas le cas, nous donnons ci-dessous, selon la forme de $f(x)$, la forme à prendre pour v.

1°) $f(x)$= a+bx, prendre y = v = A+Bx

2°) $f(x)$ = ae^{bx}, prendre y = v = Ae^{bx}

3°) $f(x) = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$, prendre $y = A_1 \cos bx + A_2 \sin bx$

Cas particulier : si y = x est une solution particulière de (1), on prendra pour v la forme donnée ci-dessus multipliée par x, variable indépendante. La méthode consiste à substituer la valeur y = v, donnée ci ci-dessus dans (1) et déterminer les constantes A, B, A_1, B_2 de façon que (1) soit satisfaite.

Exemples :

Résoudre

1) $\frac{d^2y}{dx^2}$ - 2 $\frac{dy}{dx}$ - 3y = 2x·

$\frac{d^2y}{dx^2}$ - 2$\frac{dy}{dx}$ - 3 = 0 (1).

- Equation caractéristique $r^2 - 2r - 3 = 0$ et ses racines sont 3 et -1.

La solution générale est y = v= C_1e^{3x} + C_2 e^{-x} (2)

- Puisque y = $f(x)$ = 2x (3) n'est pas une solution particulière de (1) nous prenons une solution particulière de (1) de la forme y = A+Bx (4)

En substituant (4) dans (°) et réduisant, il vient

-2B-3A - 3BX = 2x

– 3B = 2 et 2B+ 3A= 0

On tire de là A= $\frac{4}{9}$ et B = $\frac{-2}{3}$

Portons ces valeurs dans (4)

Y= v = $\frac{4}{9}$ - $\frac{2}{3}$x (5)

- (2) et (5) permettent d'écrire la solution générale Y=v+ u = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + $\frac{4}{9}$ - $\frac{2}{3}$ x.

2. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - 2$\frac{dy}{dx}$ - 3y = $2e^{-x}$ (a)

- Fonction complémentaire est de l'exemple (1) ou y= C_1e^{3x} +$c_2e^{-x'}$.
- Ici, $f(x)$ = $2e^{-x}$ est une solution particulier de l'équation homogène (1) de l'exercice (1) car on l'obtient à partir de la solution (2) en faisant C_1=0 et C_2 = 2. On prendra donc pour solution particulière de (a)

y^*= Axe^{-x} (c)

D'où par dérivation $\frac{dy}{dt}$ = Ae^{-x} (1-x) et

$\frac{d^2y}{dx^2}$ = Ae^{-x}(x-2) (2)

Substituons (2) dans (a), on obtient :

Ae^{-x}(x-2) – $2Ae^{-x}$(1-x)-$3Axe^{-x}$= $2e^{-x}$,

Soit $4Ae^{-x}$= 2^{e-x} ⇔ A= $\frac{1}{2}$

A dans (c) donne y = -$\frac{1}{2}$ xe^{-x}

- La solution générale de (a) est donc y = C_1e^{3x} + C_2e^{x}- $\frac{1}{2}$ xe^{-x}

4) déterminer la solution particulière de $\frac{d^2s}{dt^2}$ + 4S = 2cos 2t (°°) telle que s= 0 et $\frac{dS}{dt}$ = 2 pour t = 0.

- La fonction complémentaire obtenue en résolvant l'équation

$\frac{d^2S}{dt^2}$ + 4s = 0 est s= C_1cos 2t+C_2sin 2t(a)

- On voit que s= 2cos 2t est une solution particulière de l'équation homogène obtenue en remplaçant par C_1=2 et C_2= 0 dans la solution complémentaire.

D'où S = t (A_1cos 2t + A_2sin 2t).

Par dérivation, on en déduit.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}_1 \cos 2\mathrm{t} + \mathrm{A}_1 \sin 2\mathrm{t}(\mathrm{A}_1 \sin 2\mathrm{t} - \mathrm{A}_2 \cos 2\mathrm{t})(1) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}} = -4\mathrm{A}_1 \sin 2\mathrm{t} + 4\mathrm{A}_1 \cos 2\mathrm{t} - 4\mathrm{t}(\mathrm{A}_1 \cos 2\mathrm{t} + \mathrm{A}_2 \sin 2\mathrm{t})(2) \end{cases}$$

En portant ces valeurs (1) et (2) dans (◦◦), on obtient après simplification

- $4A_1$ sin 2t +$4A_2$cos2t = 2cos2t.

Par identification, A_1 = 0, A_2= $\frac{1}{2}$; portant ces valeurs dans (a)

On en déduit s= $\frac{1}{2}$ t sin 2t (b)

- D'après (a) et (b) la solution générale de (◦◦) est s = C_1cos 2t+C_2sin 2t + $\frac{1}{2}$ t sin 2x (b$'$)

Il faut maintenant déterminer C_1 et C_2 de façon que s= 0 et $\frac{dS}{dxt}$ = 2 pour t=0 (C$'$).

Par dérivation de (b$'$), on obtient

$\frac{dS}{dt}$ = -2C_1sin 2t+2C_2cos 2t+ $\frac{1}{2}$sin 2t +t cos 2t (d)

En tenant compte de(d), des conditions données par (C$'$) et (b$'$) on obtient C_1 = 0, 2C_2=2 d'où C_1=0 et C_2=1.

Portant ces valeurs dans (b$'$) on a la solution particulière demandée

S = sin 2t + $\frac{1}{2}$ t sin 2t.

1.4.2.3 EQUATIONS HOMOGENES D'ORDRE N (N> 2)

Ce sont des équations différentielles linéaires de la forme

$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+p_n=0$ où les coefficients P_1, P_2,…,P_n sont des constantes, obtenues de la façon suivante :

- La substitution de e^{rx} à y dans le premier membre donne : (r^n + P_1r^{n-1} + P_2r^{-n-2} + … + P_n) $e^{rx.}$

Cette expression s'annulé pour toutes les valeurs de r qui satisfont r^n + P_1r^{n-1} + …. P_n= 0 (1)

Et par la suite, pour chacune de valeurs de r, e^{rx} est une solution particulière de l'équation (1) est appelée équation caractéristique de (I).

Règle de résolution :

- Ecrire l'équation caractéristique correspondant : r^n +P_1r^{n-1} +... +P_n = 0
- Résoudre complètement l'équation caractéristique
- D'après les racines de l'équation caractéristique, écrire comme il suit les solutions particulières correspondantes de l'équation différentielle homogène.

a) Chaque racine réelle distincte r_1 donne une solution particulière e^{r_1x}

b) Chaque paire distincte de racines imaginaires $a\ \pm bi$ donne deux solutions particulières $e^{ax}cosbx$, $e^{ax}sin\ bx$.

c) Une racine multiple se présentant S fois donne S solutions particulière obtenues en multipliant les solutions particulières (a) ou (b) par 1, x, x²,….x^{s-1}

Multiplier chacune des n solutions indépendantes par une constante arbitraire et ajouter les résultats. On obtient ainsi la solution.

Exemples :

$\frac{d^3y}{dx^3}$ -3 $\frac{d^2y}{dx^2}$ + 4y = 0

Solution ; suivons la règle ci-dessus.

- r^3 – 3r²+4=0, est l'équation caractéristique.
- (r+1)(r-2)² = 0 ⇔ r = -1 ou r = 2 sont les racines de l'équation caractéristique.
- La racine -1 donne une solution e^{-x}
- la racine double 2 donne les solutions e^{2x}, xe^{2x}
- la solution générale est y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + $C_3xe^{2x.}$

  = C_1e^{-x} + (C_2+C3x)e^{2x}

2) $\frac{d^4y}{dx^4}$ - 4 $\frac{d^3y}{dx^3}$ +10 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 12 $\frac{dy}{dx}$ 5y = 0

- l'équation caractéristique est $r^4 - 4r^3+10r^2-12r+5=0$
- en résolvant cette équation, on trouve que les racines sont 1,1,1±2i.
- la racine double 1 donne les deux solutions r^x, xe^x

Les deux racines imaginaires 1± 2i donnent les solutions

$e^x\cos 2x$, $e^x\sin 2x$ (a = 1, b = 2)

- la solution générale est $y = C_1+ C_2xe^x + C_3e^x\cos 2x+C4e^x\sin 2x$

$= C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)e^x$

1.4.2.4 EQUTIONS NON HOMOGENES D'ORDRE N

Ce sont des équations différentielles linéaires de la forme

$\frac{d^ny}{dx^r} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^ny}{dx^{n-2}} + \ldots + P_ny = f(x)$ (1) où $p_1,p_2,\ldots,P_n$ sont des constantes et f(x) une fonction de x ou une constante peut être résolue par une méthode analogue à celle qui a été employée pour l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre.

Règle de résolution

- Différencier successivement l'équation donnée et obtenir soit directement, soit par élimination, une équation différentielle d'un ordre supérieur de l'équation (1)
- résoudre cette nouvelle équation d'après la règle $y = u + v$ dans laquelle la partie u est la fonction complémentaire de l'équation (1) trouvée dans la première opération * et v est la somme des termes additionnels trouvés.
- pour trouver les valeurs de constantes d'intégration dans la solution particulière v, substituer y = v et ses dérivées dans l'équation donnée(1).Dans l'identité qui en résulte, égaler les coefficients des termes semblables, résoudre par rapport aux constantes d'intégration, substituer leurs valeurs dans $y = u + v$, ce qui donne la solution complète de (1)

Exemples : $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ (1)

Pour déterminer la fonction complémentaire u, nous résolvons l'équation

$y'' - 3y' + 2y = 0^{(a)}$ ce qui donne $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$ (2)

Dérivons (1) $y''' - 4y'' + 2y' = xe^x+e^x$(3)

Soustrayons (1) de (3) : $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x$(4)

Dérivons (4) $y'v - 4y''' + 5y'' - 2y' = e^x$(5)

Soustrayons (5) dans (4) $y''' - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$ Equation homogène

- L'équation caractéristique est $r^4-5r^3+9r^2-7r+2 = 0$ (6)

Comme l'équation caractéristique de (a) est $r^2-3r+2=0$,on peut mettre r^2-3r+2 en facteur dans (6), on trouve que (6) peut être sous la forme $(r^2-3r+2)(r-1)^2 = 0$

Cette équation a pour nom racine 1,1,1 et 2 d'où la solution générale de (6) est

$Y= C_1e^{2x}+e^x(C_2+C_3x+C_4x^2)$ (7)

- En composant (2) et (7) on voit que $y = v\ e^x(C_3x+C_4x^2)$(8) solution particulière.

Pour un choix convenable des constante C_3 et C_4.

Pour dérivation de (8), il vient

$$\begin{cases} y' = e^{x}[C3 + (C3 + 2C4)x + C4x^{2}] \\ y'' = e^{x}[2(C3 + C4) + (C3 + 4C4)x + C4x^{2}] \end{cases} \quad (9)$$

Par substitution dans (1) de (9) et (8) et division de deux membres par e^x on obtient :

$2C_4$-C_3-$2C_4x$ x

D'où par identification, - $2C_4$=1 et $2C_4$-C_3= 0 ; on en déduit C_3= -1 et C_4= $\frac{-1}{2}$

On obtient la solution particulière en substituant dans (8) les valeurs ainsi déterminées

$y= e^x(-x-\frac{1}{2}x^2)$

La solution générale est alors $y= C_1e^{2x} + C_2e^x - e^{+x}(x+\frac{1}{2}x^2)$

$= C_1e^{2x}+C_2e^x-e^x(x+\frac{1}{2}x^2)$

2 UN MOT SUR LES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

DEFINITIONS :

On appelle système d'équation différentielle ordinaire, un ensemble de n équations :

$$\begin{cases} f_1\left(x_{1,}\, y_{1,} y'_1 y''_{1,\dots,} y_2, y'_2, y''_2, \dots y_n, y'_n\right) = 0 \\ \dots \\ f_n\left(x_1 y_1, y'_1, y''_1, \dots, y_2, y'_2, \dots, y_n, y'_n\right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

contenant une variable indépendante x, n fonction de x inconnues y_1,…y_n.

Il y a donc autant d'équations dans le système qu'il y a des fonctions inconnues. Si les n fonctions : $yn = \varphi 1x, \dots, yn = \varphi nx$ satisfont identiquement le système (1), elles constituent une solution de ce système.

Théorème. En augmentant le nombre de fonction inconnue, on peut ramener tout système d'équations différentielles (1) à un système d'équations différentielles du premier ordre.

Preuve : pour éclairer nos idées : considérons le système :

$$\begin{cases} f_1(x, y, y', y'', z, z', z'') = 0 \\ f_2(x, y, y', y'', z, z', z'') = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Posons y_1= y, y_2= y', $y_3 = z$, $y_4 = z$; $y_5 = z''$ et considérons le système:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_3 = y_4 \\ y'_4 = y_5 \\ f(x, y_{1,} y_2, y'_2, y_3, y_4) = 0 \\ f(x, y_1, y_2, y'_2, y_3, y_4, y_5, y'_5) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

formé de cinq équations du premier ordre par rapport aux cinq fonctions inconnues y_1, y_2, y_3, y_4 et y_5.

Il est claire que toute solution du système(2) fournit une solution du système (3) et réciproquement.

Le système(2) peut donc être remplacé par le système(3).

Plus généralement, si le système(1) contient la fonction y_1,…y_n et leurs dérivées, jusqu'aux ordres p.q, …, r respectivement, on formera un système différentielle de (p+q+ …+r) équations différentielles du premier ordre en prenant comme fonction inconnues : $y_1, y'_1, \dots y_n^{(n-1)}, y_2, y'_2, \dots, y_n^{(q-1)}, y_n, \dots, y_n^{(r-1)}$

3 METHODE DE RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Résoudre ou intégrer un système d'équation différentielle, c'est en chercher la solution la plus générale correspondante à ce dernier. Nous avons vu précédemment qu'on pouvait ramener tout système d'équation différentielle à un système différentiel du premier ordre :

Soit :

$$\begin{cases} F1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \\ F2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \quad (13) \\ \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \\ Fn(x, y_1, y_2, \ldots, y_n y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système, en suite, pour ramener ce système (13) à la forme normale, il faut résoudre ce système par rapport aux dérivées $y'_1, \ldots, y'_n$.

Deux cas peuvent se présenter :

1) Les équations (13) peuvent être résolues par rapport à $y'_1, \ldots, y'_n$ dans ce cas, le système normal obtenu comportera le même nombre n d'équations que le système (13). Toute solution du système normal étant solution du système (13) et réciproquement, la solution générale du système (13) et par conséquent celle du système différentiel initial.

Cette solution du système général dépendra de n constantes arbitraires, n étant le nombre d'équations du système (13)

2) Si nous cherchons à obtenir y'_1 par exemple, il peut se faire que, en éliminant les (n-1) dérivées restantes $y'_2, \ldots, y'_n$ entre les équations (13) dans le but de résoudre l'équation obtenue par rapport à y'_1, la dérivée y'_1 elle-même disparaisse dans l'élimination.

L'équation obtenue aura alors la forme :

$\emptyset(x, y_1, y_2, .., y_n) =$ (14) indépendantes des dérivées.

Cette équation (14) peut remplacer l'une quelconque des équations (13) par exemple la dernière.

De (14), nous pouvons tirer y_n en fonction de $y_1, y_2, .., y_{n-1}$ et porter la valeur trouvée dans les (n-1) premières équations de (13) ; le système (13) sera alors remplacé par le système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi_1(x, y_1, y_2, .., y_n) = 0} \\ \phi_2(x, y_1, y_2, .., y_{n-1}, y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (15) \\ \phi(n-1)(x, y_1, y_2, .., y_{n-1}, y'_1, \ldots, y'_n, y'_1, \ldots, y'_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

En répétant le raisonnement précédent sur les (n-1) dernières équations du système (15) et ainsi de suite nous pouvons arriver à un système :

$$\begin{cases} \phi 1(x, y_1, y_2, .., y_n) = 0 \\ \phi 2(x, y_1, y_2, .., y_{n-1}, y'_1, \ldots, y'_{n-1}) = 0 \\ \quad . \\ \quad . \qquad (16) \\ \quad . \\ \phi p(x, y_1, y_2, .., y_{n-p+1}) = 0 \\ \quad . \\ y'_n\text{-}p = \phi n\text{-}p(x, y_1, y_2, .., y_{n-p-1}) \end{cases}$$

Toute solution du système (16) étant solution du système (13) et réciproquement la solution générale du système (16) sera aussi la solution générale du système (13) et par conséquent le système différentiel initial.

Remarquons que, dans ce cas, le nombre de constantes arbitraire contenues dans la solution générale sera (n-p) qui est l'ordre du système normal, restant dans (16).

Ce nombre de la constante ne sera plus donc égal au nombre d'équation du système (13).

4 RESOLUTION DU SYSTEME NORMAL

Nous avons vu que la connaissance de p intégrales premières d'un système normal d'ordre n, ramène la résolution de ce système à la résolution d'un système normal d'ordre $(n-p)$ mais si $n=p$, alors le système est résolu.

Pour résoudre un système normal d'ordre $(n-p)$ restant, nous appliquons la méthode par dérivation et élimination combinée ; dans cette méthode par dérivation des équations du système normal et élimination de toutes les fonctions inconnues sauf vue, on cherche à ramener la résolution du système à celle d'une ou plusieurs équations différentielles ordinaires à une seule fonction inconnue. Un exemple simple nous fera comprendre le mécanisme de cette méthode.

Exemples :

Résoudre le système normal :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - 2y - z \quad (1) \\ \frac{dz}{dx} = -4y + z + e^{-x} \quad (2) \end{cases}$$

Dérivons l'équation (1) par rapport à x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} \qquad (3)$$

De (2) et (3), $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - 2\frac{dy}{dx} - (-4y + z + e^{-x})$

$$= -2\frac{dy}{dx} + 4y - z - e^{-x} + 1 \quad (4)$$

Tirons z dans (1) et portons sa valeur dans (4) :

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx} - 6y = -x + 1 - e^{-x} \qquad (5)$$

L'équation (5) étant une équation différentielle du 2ème ordre à coefficient, constant, nous pouvons trouver sa solution générale y=$c1e^{-3x} + c1e^{2x} + \frac{1}{6}x - \frac{5}{35} + \frac{1}{6}e^{-x}$ (6)

(C1 et C2 étant deux constantes arbitraires).

Théorème : la résolution d'un système normal d'ordre n se ramène à la résolution d'un certain nombre d'équation différentielle dont la somme des ordres est égale à n qui contiennent chacune une seule fonction inconnue.

Preuve : soit le système normal d'ordre n

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

1) Il peut arriver que la première équation, par exemple, ne contienne au second membre que x et y_1 en fonction de x. Alors on intègre cette équation pour obtenir y_1 en fonction de x. En remplaçant y_1 par sa valeur dans les $(n-1)$ équations restantes, il restera un système d'ordre $(n-1)$ à résoudre.

   Ainsi, le système normal proposé se ramène, dans ce cas à une équation différentielle du premier ordre et à un système normal d'ordre $(n-1)$.

2) Si le second membre de deux premières équations, par exemple sont des fonctions uniquement de x, de y_1 et de y_2, alors on ramène la résolution du système

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad (17)$$

à la résolution d'une équation du 2ème ordre à une seule inconnue comme nous venons de le montrer dans un théorème. Ainsi, le système normal proposé se ramène, dans ce cas à une équation différentielle du second ordre et à un système normal d'ordre $(n-2)$

3) En général, les n fonctions inconnues $y_1, \dots, y_n$ interviennent dans les seconds membres des équations.

Alors la méthode de par dérivation et élimination ramènera la résolution du système normal à la résolution d'une seule équation différentielle du $n^{ème}$ ordre à une seule fonction inconnue ; nous avons déjà démontré ce théorème.

5 RESOLUTION D'UN SYSTEME QUELCONQUE D'EQUATION DIFFERENTIELLE

La méthode par dérivation et élimination combinée permet de résoudre les systèmes différentiels normaux et par suite tout système d'équation différentielle ; puis que ceux-ci peuvent se ramener aux systèmes normaux.

Cependant, il n'est pas nécessaire de faire cette transformation pour appliquer la méthode par dérivation et élimination.

Exemple : résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2y' = 2'^2 & (1) \\ y=2+x2' & (2) \end{cases}$$

En dérivant l'équation (1), on a : $y' = 2z' + xz''$ (3)

En tenant compte des équations (1) et (3) ;

$2xz'' = 2'(2' - 4)$ (5)

Cette équation ne contient plus qu'une seule fonction inconnue Z. En posant $z' = P$ (5)

On est ramené à l'Equation de BERNOULLI : *

$2xp + 4p = p^2$ (6)

1) Il suffit de résoudre cette équation, puis de tenir compte de (5) pour trouver :

Z=$\frac{2}{\sqrt{c1}} arc\ tag\ 2x\sqrt{c1} + c2$ (7)

L'équation (2) donne alors :

Z=$\frac{2}{\sqrt{c1}} arc\ tag\ 2x\sqrt{c1} + c2 + \frac{4x}{1+4c1^{x^2}}$ (8)

On peut vérifier facilement que les fonctions y et z trouvées satisfont identiquement les équations (1) et (3) quelques soient C1 et C2.

6 RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRE A DEUX INCONNUES

Ce sont des équations linéaires mais pas nécessairement du premier ordre. Dans le cas de deux équations à deux inconnues, un tel système peut s'écrire :

$$\begin{cases} A(D)y_1 + B(D)y_2 = f_1(x) \\ E(D)\, y_1 + F(D)y_2 = f_2(x) \end{cases} \quad (18)$$

où A(D), B(D), E(D) et F(D) sont les opérateurs de dérivation, polynôme en D et le nombre d'équations est égal au nombre de fonction.

Exemples :

A : $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$ Ou A': $\begin{cases} 2(D-2)\ x+ (D-1)\ y=e^t \\ )x+y=0 \end{cases}$ Ou D=$\frac{d}{dt}$ et

B : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{d^2}{dt} + 2x + 2 = 1 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{d^2}{dt} + y+22=0 \end{cases}$ ou B' : $\begin{cases} Dx+ (D+1)\ y=1 \\ (D+2)\ x-(D-1)2=0 \\ (D+1)\ y+ (D+2)2=0 \end{cases}$

Nous admettons, sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 5 : le nombre des constantes arbitraires contenues dans la solution générale du système d'équation différentielle (18) est égal au degré le plus élevé de D dans développement du déterminant.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(D) & B(D) \\ E(D) & F(D) \end{vmatrix}$$

pour autant que ce déterminant D ne s'annule pas identiquement.

Si D=0, les équations du système sont dépendantes, de tels systèmes ne seront pas considérés dans ce travail.

7 DEUX METHODE DE RESOLUTION

Il existe plusieurs méthodes de résolution mais nous allons utiliser deux méthodes. La méthode de la résolution est évidemment la dérivation et élimination, mais dans ce cas-ci, nous pouvons utiliser les opérateurs de dérivation.

1) Utilisons maintenant les opérateurs de dérivation. Nous allons pouvoir procéder comme s'il s'agissait de résoudre un système de deux équations algébriques à deux inconnues, ceci est dû au fait que l'opérateur D peut être traité comme il s'agissait d'un coefficient littéral en algèbre.
2) Nous allons utiliser la méthode de déterminant en considérant, comme dans la première méthode, que nous avons à résoudre un système de deux équations à deux inconnues y_1 et y_2 et en considérant D comme un coefficient littéral.

Procédé fondamental : résoudre un système d'équation différentielle ordinaire comportant n fonctions, consiste à obtenir par dérivation des équations données et par élimination, un ensemble de n équations telles que dans chacune une figure qu'une seule fonction : nous pourrons le comprendre à ces exemples.

Exemples : $\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t \ (1) \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \quad (2) \end{cases}$

Solution : on remarque d'abord que la solution générale x=x(t), y=y(t) de ce système vérifié aussi.

$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$ (3) obtenue en dérivant (2)

De plus, en multipliant (1) par -1 ; (2) par -1 et (3) par 1, et en ajoutant, on obtient $\frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t$ (4) qui est aussi vérifiée par x=x (t), y=y(t). Cette dernière équation, qui est indépendante de y et ses dérivées peut se résoudre aisément et x=c_1 cos t +c_2 sin t-$\frac{1}{D^2+1}e^t$ (5) et entre (1), (2), (3) et (5), et on élimine λ et ses dérivées. Il est cependant plus simple de procéder comme suit :

De(2), on tire y= $-\frac{dx}{dt} - 3x = -(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}e^t)$-3($c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t$)= ($c_1-3c_2$) $\sin t - (3c_1 + c_2)\cos t + 2e^t$ est donc la solution générale.

Quand les équations sont écrites à l'aide de l'opérateur D, il y a un parallélisme frappant entre les procédures utilisées ici et les méthodes de résolutions d'un système de n équations à n inconnues. Cela est dû au fait, déjà noter que l'opérateur D peut quelque fois être traité comme une simple variable numérique.

Solution 2 : considérons le système

$$\begin{cases} 2(D-2)x + (D-1)y = e^t \ (1) \\ \qquad (2+3)x + y = 0 \ (2) \end{cases}$$

En procédant comme le cas de deux équations à deux inconnues x et y, on multiplie (2) par $(D-1)$. On repère alors sur (2) par $(D-1) = (\frac{d}{dt} - 1)$ pour obtenir $(D-1)(D+3)x + (D-1)y = 0$ dont on soustrait (1) pour obtenir $(D-1)(D+3) - 2(D-2)x = -e^t$ ou $(D^2+1)x - e^t$. Cette dernière équation n'est autres que (4), comme on pouvait le prévoir, puisque faire opérer $(D-1)$ sur (2), c'est dériver (2) et lui ajouter son opposé, comme dans la première solution. La solution générale est obtenue de la même façon que dans la solution 1.

Solution3.

On peut aussi à l'aide de déterminant du système A' obtenir :

$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ 0+3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ 0+3 & 0 \end{vmatrix}$ où $(D^2+1)x = -e^t$ et $(D^2+1)y = 4e^t$.

La 1ère de ces équations est l'équation (4) et la seconde aurait été obtenue par le procédé mentionné et non utilisé dans la solution 1.

Nous allons voir maintenant pourquoi nous avons écarté son emploi. Les solutions de ces deux équations sont :

X=C_1 cos t +C_2.sint-$\frac{1}{2}$e^t (b) et y= C_3 cos t+C_4sint + 2e^t on voit d'après (b) et (7) qu'on a introduit des solutions étrangères.

Pour les éliminer, (c'est-à-dire pour réduire le nombre de constantes arbitraires) on reporte dans (2) et l'on constate que (2+3C_1+C_3) cos t + (3(2-C_1+C_4) sin t=0 doit être identiquement vérifié, doncC_3= -(3C_1+C_2) et c4= C_1-3C_2.

Lorsque ces valeurs sont reportées dans (b) et (7), on obtient bien la solution générale déjà trouvé. Le nombre de constantes arbitraires indépendantes qui apparaissent dans la solution générale du système

$$\begin{cases} \text{F1 (D)x + g1(D)y = h1(t)} \\ \text{F2 (D)x + g2(D)y = h2(t)} \end{cases}$$

est égal au degré de D dans le déterminant Δ= $\begin{vmatrix} F1(D) & g1(D) \\ F2(D) & g2(D) \end{vmatrix}$ à condition que D ne soit pas nul

Nous ne considérons pas ici de système où D=0.

Pour le système A' : D= $\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ (D-3) & 1 \end{vmatrix}$= -(D^2+1)

Le degré (2) de D correspond au nombre des constantes arbitraires qui apparaissent dans la solution générale. Le théorème pour s'étendre aisément au cas de n équation à n inconnues

Exemples :

Résoudre les systèmes

1. $\begin{cases} \text{(D − 1)x + Dy = 2t + 1(1)} \\ \text{(2D + 1)x + 2Dy = t (2)} \end{cases}$

En retranchant deux fois (1) de (2) on tire 3x= -3t-2. En substituant x= -t -2/3 dans 1 on obtient Dy= 2t + 1 – (Dy-1) x = $t+\frac{4}{3}$ et y = $\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c1$.

La solution générale est x= -t $-\frac{2}{3}$, y = $\frac{1}{2}t^{2+}\frac{4}{3}t+c1$

Remarquer que $\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+ & 2D \end{vmatrix}$ est de degré 1 en D et il n'y a qu'une seule constante arbitraire.

2. $\begin{cases} \text{(D + 2)x + 3y = 0 (1)} \\ \text{3x + (2D + 1)y = 2}e^{2t}\text{ (2)} \end{cases}$

En faisant opérer D+2, sur 1), en multipliant 2) et en ajoutant: (D^2+4D-5)x = -6e$^{2t.}$

D'où x = C$_1$e^t + C$_2$e^{-5t} - $\frac{6}{7}$ e^{-5t}. de 1) y = $-\frac{1}{3}(D+2)x = -$ C$_1$e^t + C$_2$e^{-5t} - $\frac{8}{7}$ e^{-2t}

3. $\begin{cases} \text{(D − 3)x + 2(D + 2)y = 2 sin}\,t \quad (1) \\ \text{2(D + 1)x + (D − 1)y = cos t.} \quad (2) \end{cases}$

En faisant opérer D-1 sur 1) et 2(D+2). Sur 2), on obtient

3) (D-1) (D-3) x + 2(D-1) (D+2)y = (D-1) [2 sin t] = 2 cos t – 2 sin t

4) 4 (D+2) (D+1) x + 2(D+2) (D-1)y = 2(D+2) cos t = 4 cos t – 2 sin t

En retranchant 3) de 4) et en remarquant que (D-1) (D+2) = (D+2) (D-1), puisque les opérateurs sont affectés de coefficient constants.

$[4(D^2+3D+2)-(D^2-4D+3)]x = (3D^2+16D+5)x = 2\cos\ t\ \ et$

X=c_1e^{-5t}+$c_2e^{-t/3}+\frac{2}{3D^2+16D+5}\cos t = c_1e^{-5t}+c_2e^{-t/3}+\frac{1}{8D+1}\cos t$

= c_1e^{-5t}+$c_2e^{-t/3}+(8\sin t+\cos t)/65$

De 2), (D-1)y = cos t-2(D+1)x

= cos t +8$c_1e^{-5t}-\frac{4}{3}c_2e^{-t/3}-(18\cos t+14\sin t)/65$

= $8c_1e^{-5t}-\ c_2e^{-t/3}+(47\cos t-14\sin t)/65$

D'où $ye^{-t}=\int 8\,c_1e^{-6t}-\frac{4}{3}c_2e^{-4t/3}+\frac{47\cos t-14\sin t}{65}e^{-t})dt$

= $\frac{4}{3}c_2e^{-4t/3}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}e^{-t}+c_3$

Et y = $-\frac{4}{3}c_2e^{-5t}+c_2e^{-t/3}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}$+$c_{3e}{}^{t}$

Puisque le degré $\Delta\ est\ 2$, la solution générale ne comporte que deux constantes arbitraires.

D'où la substitution de x et y dans (1) donnera $c_3=0, et$

X= c_1e^{-5t}+$c_2e^{-t/3}$+$\frac{8\sin t+\cos t}{65}, y=\frac{4}{3}c_1e^{-5t}+c_2e^{-t/3}+\frac{61\sin t-33\cos t}{130}$ est la solution générale.

4. $\begin{cases}(D^2-2)x-3y=e^{2t} & (1)\\ (D^2-2)y+x=0 & (2)\end{cases}$

Trouver la solution répondant aux conditions x=y=1, Dx=Dy=0 lors que t=0.

En faisant opérer $D^2\ sur\ D$ pour obtenir $D^4x-2D^2\,y=4e^{2t}$ en subissant $D^2x=2x+3y+e^{2t}\ tiré\ de\ (1)\ et\ D^2=-x-2y\ tiré\ de\ (2). on\ a\ (D^4-1)x=6e^{2t}$.

D'où x= c_1e^{t}+$c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{2}{5}e^{t}\ \ et\ par\ (1)$

y=$\frac{2}{3}[(D^2-2)x-e^{2t}]=-\frac{2}{3}(c_1e^{t}+c_2e^{-t})-(c_3\cos t+c_4\sin t)-\frac{1}{15}e^{t}$.

Remarquez que x pouvait s'obtenir aussi en utilisant les déterminants. Ainsi,

$\begin{vmatrix}D^2-2 & -3\\ 1 & D^2+2\end{vmatrix}$ x = $\begin{vmatrix}e^{2t} & 3\\ 0 & D^2+2\end{vmatrix}$ ou $(D^4-1)x=6e^{2t}\ etc.$

Quand t=0, x= c_1+$c_2+c_3+c_4+\frac{2}{5}=1\ et\ D_x=c_1$+$c_2+c_3+c_4+\frac{4}{5}=0$

y=$\frac{4}{5}$(c_1+c_2) $-\ c_3-\frac{1}{15}=1\ et\ \ D_y=-\frac{1}{3}$($c_1$- c_2) $-\ c_4-\frac{2}{15}=0$.

D'où $c_1=\frac{3}{4}, c_2=\frac{7}{3}, c_3=\ -\frac{19}{10}, c_4=\frac{1}{5}$et la solution particulière cherchée est

x = $\frac{1}{4}$(3e^{t}+ 7_e^{-t}) $-\frac{1}{10}$(19 cos t – 2 sin t) + $\frac{2}{5}$e^{2t}

y = -$\frac{1}{12}$($3et$+$7e^{-t}$) +$\frac{1}{10}$($19\cos t-2\sin t$) $-\frac{1}{15}e^{2t}$

5. $\begin{cases}(D+1)x+(D^2-1)y=e^{t}(1)\\ (D^2-D)x+D+1)x+(D^2-D+1)y3y=t^2 \quad (2)\end{cases}$

En faisant opérer D^2+D+1 sur 1), et D+1 sur 2), et en retranchant, on obtient

$2_y=t^2+2_t-3_{e^t}\ et\ y=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{3}{2}t^2$

En faisant opérer $D^2-D+1\ sur\ 1)\ et\ D-1$, sur 2), et en tranchant, on obtient

$2_x=t^2-2_t+e^{t}\ et\ x=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}e^{t}$

Remarquer que $\begin{vmatrix}D+1 & \mathrm{D}-1\\ D^2 & D^2-D+1\end{vmatrix}$=2 est de degré 0 en D. il n'y a donc pas de constante arbitraire dans la solution.

6. $\begin{cases} D^2x - m^2y = 0 \ (1) \\ D^2y + m^2x = 0 \ \ (2) \end{cases}$

En faisant opérer D^2 sur 1) $et\ en\ substituant\ D^2y = -m^2x\ tir$é de 2), $on\ obtient$

$D^4x - m^2(-m^2x) = D^4x + m^4x = (D^4 + m^4)x = 0. D'o$ù $D = \pm\dfrac{m}{\sqrt{2}}(1 \pm i)\ et$

x= $e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \cos mt/\sqrt{2} + c_2 \sin mt/\sqrt{2}\right) + e^{-\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_3 cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + c_4\, cos\frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$.

8 CONCLUSION

L'étude entamée dans ce travail a abordé la résolution du système d'équations différentielles ordinaires, à coefficients constant de manière explicite. Nous avons venons de mettre à la disposition des matheux un outil de référence susceptible de compléter leur formation sur les équations différentielles ordinaires. Le travail que nous avons développé avait comme objet de rendre potable certaines littératures parsemées dans les ouvrages d'analyses et traitant sur le système d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants de manière à être comprise très largement. Plusieurs méthodes ont été développées suivants chaque catégorie d'équations. Et la résolution des systèmes est donnée et illustrée de de manière plus concrète et pragmatique.

REFERENCES

[1] J. MASSART (1969), *cous d'analyse, tome2*, Edit DUNOD, paris

[2] AYERS JR.F (1972), *théorie et problème des équations différentielles*, MC GRAW-Hill, New-York, 1ère Edition,

[3] W.A GRANVILLE et al l (1970), *élément de calcul différentiel et intégral*, librairie Vuibert boulevard saint germain, 63, paris.

[4] P. FLORBERT, G. LAUTON et all (1978), *outils et modèles mathématiques,_équations et Systèmes différentiels, tome4. P.44*, librairie Vuibert 63, boulevard saint germain, paris.