International Journal of Innovation and Applied Studies
ISSN 2028-9324 Vol. 40 No. 4 Oct. 2023, pp. 1458-1469

http://www.ijias.issr-journals.org/

Détermination de la distance d'un point à une droite par la méthode analytico-graphique

[Determination of the distance from a point to a line by analytic-graphical method]

Edouard MUKONKOLE MWANANSENGA

Assistant 2, Département de mathématiques, Institut Supérieur Pédagogique, BP 682 Mbujimayi, RD Congo

ABSTRACT: The analytical resolution of the problems posed in descriptive geometry by the MONGE method would be a plus that we bring to the scientific world and to secondary education.
Our subject is entitled: Determination by the analytical-graphical method of the distance from a point C to a straight line AB.
To solve the problem thus posed in this article, we have used:
- To the formula which makes it possible to calculate the distance between two points in space,
- To the construction in elementary geometry seen in the first scientific year, of a triangle knowing the lengths of its three sides as well as that of the height resulting from a given point of the triangle,
- To the notion of similar triangles.

KEYWORDS: cartesian coordinate system, Sketch, distance between two points, triangle, real size.

RESUME: La résolution analytique des problèmes posés en géométrie descriptive par la méthode de MONGE serait un plus que nous apportons dans le monde scientifique et en enseignement secondaire.
Notre sujet est intitulé : Détermination par la méthode analytico-graphique de la distance d'un point C à une droite AB.
Pour résoudre le problème ainsi posé dans cet article, nous avons fait recours :
- A la formule qui permet de calculer la distance existante entre deux points de l'espace,
- A la construction en géométrie élémentaire vue en première année scientifique, d'un triangle connaissant les longueurs de ses trois côtés ainsi que celle de la hauteur issue d'un point du triangle donné,
- A la notion des triangles semblables.

MOTS-CLEFS: repère cartésien, épure, distance entre deux points, triangle, vraie grandeur.

1 INTRODUCTION

La géométrie descriptive nous donne des techniques laborieuses pour trouver la vraie grandeur d'un triangle ABC.

Considérons trois points A, B et C du plan non alignés. Les points A et B déterminent une droite car on sait, par l'axiome d'EUCLIDE, que par deux points distincts du plan passe une et une seule droite [10]. La perpendiculaire issue du point C à la droite AB nous permet de trouver la distance du point C à la droite AB [9].

Ainsi, en géométrie descriptive, pour trouver la distance d'un point C à la droite AB, on a coutume de recourir à l'une des méthodes suivantes :

Méthode générale

- Mener par le point C un plan α perpendiculaire à la droite AB ;
- Déterminer le point de percée D de la droite AB dans le plan α ;
- Construire la vraie grandeur du segment [CD].

Méthode de rabattement [7]

- Rabattre le plan (A, B, C) sur le plan horizontal (ou frontal) π ; passant par le point C, d'où A_r^h, B_r^h, C_r^h ou (A_r^f, B_r^f, C_r^f)
- Trouver le pied $D_r^h(D_r^f)$ de la perpendiculaire menée du point C_r^h (ouC_r^f) à la droite $A_r^hB_r^h$ou ($A_r^fB_r^f$) ;

Le segment $\llbracket C_r^hD_r^h \rrbracket$ ou ($\llbracket C_r^f\ D_r^f \rrbracket$) représente la distance du point C à la droite AB.

A tout chercheur soucieux de déterminer la distance d'un point C à une droite AB, la question suivante vaut la peine d'être posée :

Est-il possible de trouver la vraie grandeur d'un triangle sans recourir aux rabattements ni au changement des plans de projection [2], ni à la rotation [5] ?

Le système éducatif en République Démocratique du Congo, la loi cadre et les instructions officielles publiées en chaque début de l'année scolaire par le ministère de tutelle régissent le système de fonctionnement de l'enseignement secondaire. Chaque discipline a un programme national dans lequel se trouvent toutes les matières à enseigner et cela pour chaque degré.

La géométrie descriptive étant une branche de mathématiques, ses matières sont inscrites dans le programme national de mathématique de 2005 surtout à sa partie géométrie et cela pour chaque degré.

Les apprenants du degré moyen, à la fin de leurs cours de géométrie descriptive, sont incapables de trouver la vraie grandeur d'un triangle ABC car les deux méthodes citées ci-haut, ne sont pas vues dans ce degré. Ainsi donc, ce présent article aidera tout enseignant ou tout chercheur soucieux de ramener les matières de degré supérieur (degré terminal) au degré inférieur (moyen) et de résoudre les problèmes compliqués en géométrie descriptive en utilisant la méthode analytico-graphique, afin de contourner les notions de rabattement, de changement de plans de projection et de rotation en ce qui concerne la détermination de la distance d'un point C à une droite AB.

Notre méthode analytico-graphique consiste à résoudre analytiquement les problèmes (épures) puis amener cette solution en géométrie descriptive. Elle est importante car elle joue le rôle du pont entre la géométrie analytique et la géométrie descriptive.

C'est cette méthode qui servira aux élèves de la troisième (première année) et quatrième (deuxième année) à déterminer la distance d'un point à une droite tout en contournant les notions difficiles de grandes classes.

Suite à tout ce qui précède, nous nous posons la question suivante : comment résoudre le problème de détermination de la vraie grandeur d'un triangle sans recourir à l'une des méthodes données ci-haut de manière à amener les élèves de degré moyen en section scientifique de le résoudre sans difficultés. Ce présent article tachera d'une manière ou d'une autre de répondre à ces deux principales questions.

2 MATERIELS ET METHODES

2.1 MATÉRIELS

Les matériels suivants nous ont servis à réaliser ce travail :

- Règles graduée,
- Le compas,
- Le crayon,
- La gomme

2.2 MÉTHODES

Notre méthode analytico-graphique consiste à résoudre analytiquement les problèmes (épures) puis amener cette solution en géométrie descriptive. Elle est importante car elle joue le rôle du pont entre la géométrie analytique et la géométrie descriptive.

C'est cette méthode qui servira aux élèves de la troisième (première année) et quatrième (deuxième année) à déterminer la distance d'un point à une droite tout en contournant les notions difficiles des classes supérieures.

3 Vraie Grandeur D'un Triangle

3.1 Dans l'espace

Repère cartésien de l'espace

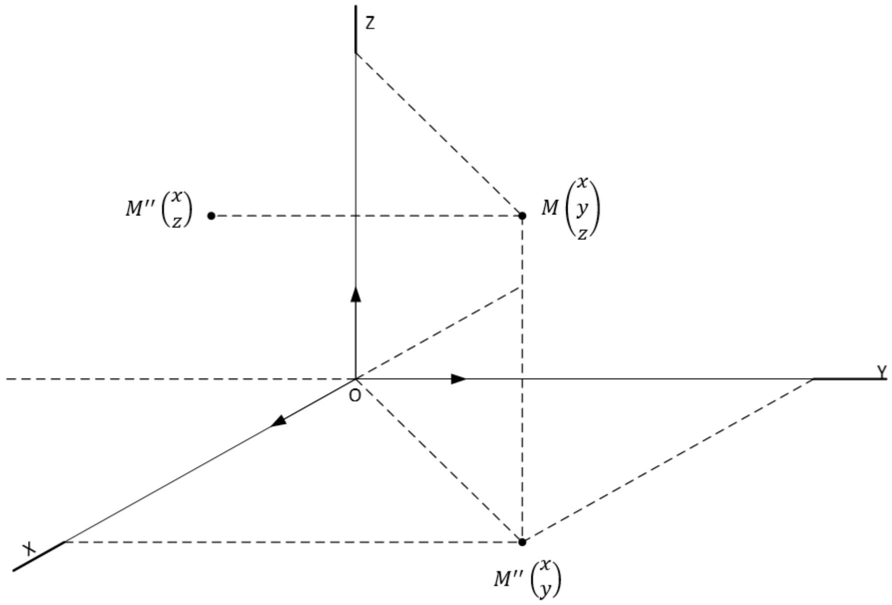
On appelle repère cartésien (ou simplement repère) de $\vec{E}$, tout quadruplet (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) où O est un point de $\vec{E}$ et ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) est une base de $\vec{E}$[6].

Considérons un point M de l'espace E qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans l'espace E, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire dans la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$)de la manière suivante :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

X est l'abscisse, y l'ordonnée de M et z la cote (hauteur) de M.

Graphiquement le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est représenté comme suit :



Sur la figure ci-haut, le point M' est la projection du point M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le plan XOY parallèlement à l'axe OZ et le point M'' est la projection de point M$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans le plan XOZ parallèlement à l'axe OY.

En considérant le point M$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, les point M' et M'' auront comme coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Distance de deux points dans l'espace

Soient deux points de l'espace X$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et Y* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Lorsque les axes sont rectangulaires, la distance existant entre ces deux est calculée par la relation suivante :

d(X,Y)=$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$ [3]

Ainsi pour deux point X$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et Y$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ de l'espace, la distance existant entre ces deux points, sera calculée comme suit :

d(X,Y)= $\left\|\overrightarrow{XY}\right\| = \sqrt{(5-1)^2+(6-2)^2+(7-3)^2}$

=$\sqrt{16+16+16}$

= $\sqrt{48}$ = $4\sqrt{3}$

Nous avons noté la distance d(X,Y) par aussi la norme du vecteur $\left\|\overrightarrow{XY}\right\|$ car l'espace considéré ($\mathbb{R}$) est un espace vectoriel sur lui-même. C'est pour cela, comme nous sommes dans $\mathbb{R}^3$, nous nous sommes permis d'écrire d(X,Y) par $\left\|\overrightarrow{XY}\right\|$[1].

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE DANS LE PLAN

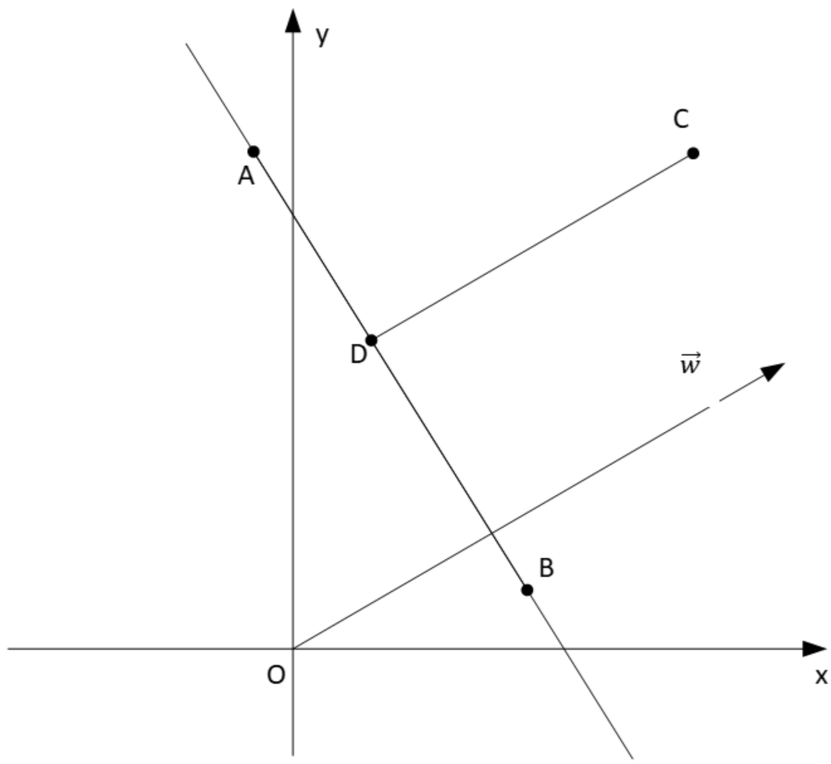
On donne trois points A, B et C dans le plan. On considère la droite (a) passant par les points A et B tout en sachant que les trois points donnés ci-haut ne sont pas alignés. Le point C, à partir de cette précision, devient extérieur à la droite AB. On demande de calculer la distance entre le point C et la droite AB.

Considérant que le point C a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ et le vecteur = $\overrightarrow{W} = \binom{u}{v}$.

La distance du point C$\binom{x}{y}$ à la droite AB est la distance de C à sa projection orthogonale D sur la droite AB.

Pour calculer cette distance, on utilise le produit scalaire :

$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DC}$



$\overrightarrow{W}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DC}$; on a donc :

$\left\|\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DC}\right\|$= DC. $\left|\overrightarrow{W}\right|$= DC. $\sqrt{u^2+v^2}$

D'autre part :

$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DC}$= $\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DO}$ + $\overrightarrow{W}.\overrightarrow{OC}$ = $\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DO}$ + ux+vy.

D étant un point de la droite AB, avec :

ux + vy + h = comme équation de la droite perpendiculaire au vecteur

$\overrightarrow{W} = \binom{x}{y}$

On a :

$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{OC} = ux + vy = -h$

$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DC}$= ux+vy+h.

On en déduit :

d= DC=$\frac{|\overrightarrow{W}.\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{W}.|}$

Soit : d=$\frac{ux+vy+h}{\sqrt{u^2+v^2}}$ [8]

Exemple :

La distance du point K$\binom{3}{2}$ à la droite d'équation 4x-5y+4=0 est :

d=$\frac{|4x-5y+4|}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} = \frac{|12-10+4|}{\sqrt{16+25}} = \frac{6}{\sqrt{41}} = \frac{6\sqrt{41}}{41}$

Notons que le point D qui est la projection orthogonale du point C sur la droite AB, est aussi appelé pied de la perpendiculaire issue du point à la droite.

CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE CONNAISSANT LES LONGUEURS DE SES COTES

Pour bien comprendre cette partie, nous allons, à partir d'un exemple, donner la marche à suivre pour construire un triangle donné si on connait les longueurs de ses côtés.

Problème

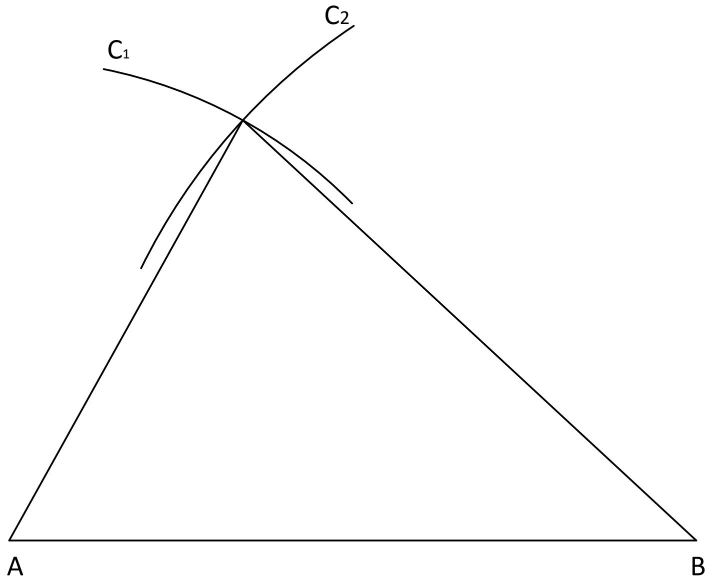
On donne les longueurs des côtés d'un triangle de la manière suivante :

AB=10 cm ; AC= 7 cm et BC= 9 cm.

On demande, à partir des longueurs données ci-haut, de construire le triangle ABC.

Procéde [4]

- Traçons un segment $[AB]$ tel que mes $[AB] = 10\ cm$
- Traçons un arc de cercle (C_1) de centre A et de rayon 7 cm
- Traçons un arc de cercle (C_2) de centre B et de rayon 9 cm.
- $C_1 \cap C_2 = \{C\}$



CONSTRUCTION DE LA HAUTEUR ISSUE DU SOMMET D'UN TRIANGLE

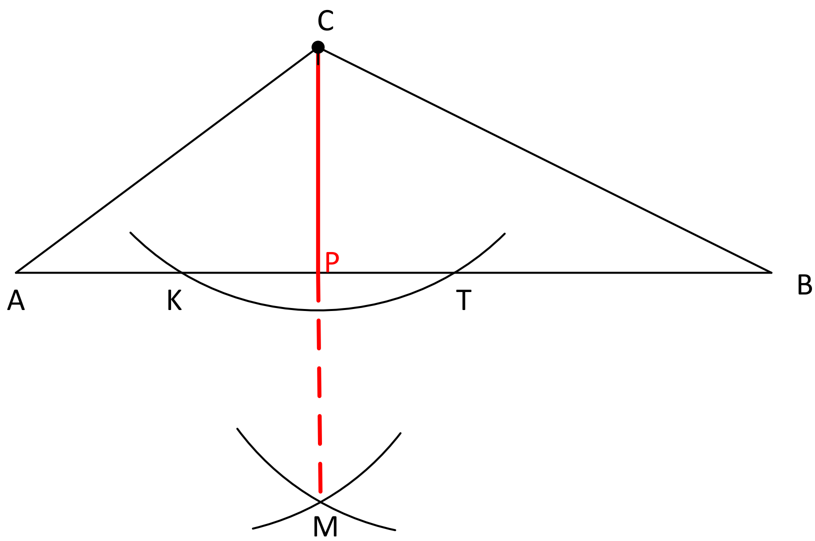
La hauteur d'un triangle est toute perpendiculaire issue d'un sommet au côté opposé à ce sommet.

Problème

On donne le triangle ABC et on demande de mener par le sommet C une perpendiculaire au côté AB

Procédé [4]

- Par le point C, on trace un arc de cercle de rayon supérieur à la distance du point à la droite AB, cet arc rencontre la droite AB en deux points soient les points K et T.
- Par K, on trace un arc de cercle C_1 et par T on trace un arc de cercle C_2 sans changer le premier rayon en K.
- $C_1 \cap C_2 = \{M\}$
- La hauteur en question passe par les points C et M.



Le point P es appelé pied de la perpendiculaire.

L'intersection de toutes les hauteurs d'un triangle est un point appelé orthocentre.

Problème

Enonce

On donne trois points non alignés sur l'épure p A,B et C déterminés par leurs projections dans tous les deux plans de projection, et une droite d passant par les deux points A et B. on demande de déterminer la distance du point C à la droite d.

Procédé [4]

Pour déterminer la distance du point C à la droite d, par notre méthode analytico-graphique on procède comme suit :

- On trouve (détermine) les coordonnées de ces trois points dans l'espace à partir des coordonnées données dans le plan (sur l'épure) ;
- On calcule les distances entre les points. En d'autres termes on calcule les mesures des côtés du triangle ABC ;
- On construit le triangle ABC connaissant les mesures de ses côtés ;
- Le triangle ABC construit est la vraie grandeur du triangle donné sur l'épure ;
- On construit dans le triangle ABC la perpendiculaire issue du sommet C au segment $[AB]$ soit le point D le pied de la perpendiculaire ;
- La distance d(C,D) est la distance demandée qui est celle du point C à la droite AB.

Sur l'épure

Nous référant au problème donné au point précédent, pour déterminer la distance d'un point C à une droite passant par le point A et B sur l'épure on procède comme suit :

- Dans le plan V ou H on fait coïncider le point $A^f(ou\ A^h)$ avec A_1 et par ce point on trace une droite dans n'importe direction.
- A l'aide du compas, on porte sur cette droite la mesure du côté AB soit le B_1 ;
- On trace une droite passant par B_1 et $B^f(ou\ B^h)$
- Par le point A_1 on porte sur le segment $[A_1B_1]$ la mesure AD, soit le point D_1
- Par le point D_1 on trace une parallèle t à la droite passant par B_1 et $B^f(ou\ B^h)$
- $t^f \cap [A^fB^f]$ ou $t^h \cap [A^hB^h]$= $D^f(D^h)$

Par la méthode du triangle rectangle, on déterminera la vraie grandeur du segment $[CD]$ est la distance cherchée du point C à la droite AB

Illustration

On donne :

Cadre $170\ X\ 210$

Trois points A,B et C. Tels que

A$\begin{cases} A^f(30,115) \\ A^h(30,90) \end{cases}$ B$\begin{cases} B^f(80,190) \\ B^h(80,10) \end{cases}$ C$\begin{cases} C^f(140,120) \\ C^h(140,100) \end{cases}$

On demande de déterminer la distance du point C à la droite d passant par les points (AB).

Dans l'espace

La première chose que nous devons faire, après avoir représenté toutes les données sur l'épure, est de déterminer les coordonnées de ces trois points A, B et C dans l'espace à partir des coordonnées dans le plan.

Faisant référence à la figure 1, les points M'(x,y) et M''(x,z) sont les projections du point M(x,y,z) dans les plans frontal et horizontal de projection.

Pour ce faire les points A, B et C sur l'épure auront comme coordonnées dans l'espace :

A$\begin{cases} A^f(30,115) \\ A^h(30,90) \end{cases}$ → A(30,90,115) B$\begin{cases} B^f(80,190) \\ B^h(80,10) \end{cases}$ → (80,10,190)

C$\begin{cases} C^f(140,120) \\ C^h(140,100) \end{cases}$ → C(140,100,120)

Déterminons ensuite les distances entre les points A, B et C

Faisons usage de la relation (1)

d(A,B)=$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$=\sqrt{(80-30)^2 + (10-90)^2 + (190-115)^2}$

$=\sqrt{(50)^2 + (-80)^2 + (75)^2}$

$=\sqrt{2500 + 6400 + 5625}$

$=\sqrt{14525} = 120{,}519707\ldots$

d(A,C)=$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$

$=\sqrt{(140-30)^2 + (100-90)^2 + (120-115)^2}$

$=\sqrt{(110)^2 + (10)^2 + (5)^2}$

$=\sqrt{12100 + 100 + 25}$

$=\sqrt{12225} = 110{,}5667\ldots$

d(B,C)=$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$

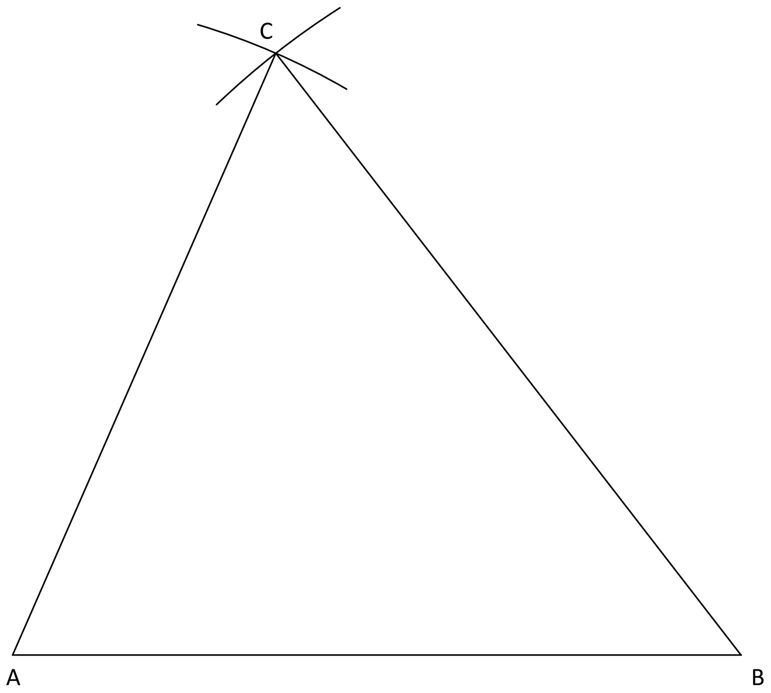
$=\sqrt{(140-80)^2 + (100-10)^2 + (120-190)^2}$

$=\sqrt{(60)^2 + (90)^2 + (-70)^2}$

$=\sqrt{3600 + 8100 + 4900}$

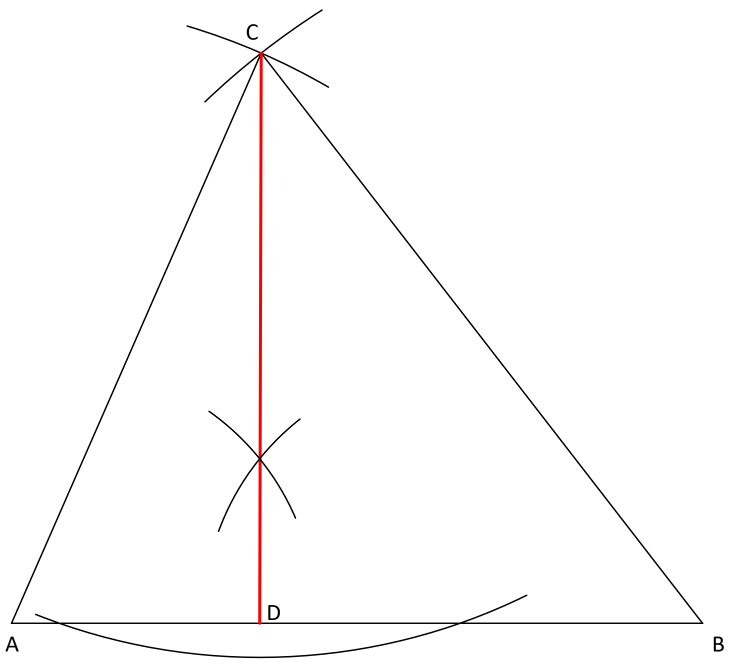
$=\sqrt{16600} = 128{,}8409\ldots$

Nous servant de la marche à suivre pour construire la figure 3, nous devons alors construire le triangle ABC connaissant les longueurs de ses côtés : $AB = 120{,}519707\ldots$; $AC = 110{,}5667\ldots$; $BC = 128{,}8409\ldots$



Ce triangle est la vraie grandeur du triangle ABC sur l’épure.

Construisons la perpendiculaire issue du sommet C au côté AB avec D le pied de la perpendiculaire.



Sur l’épure

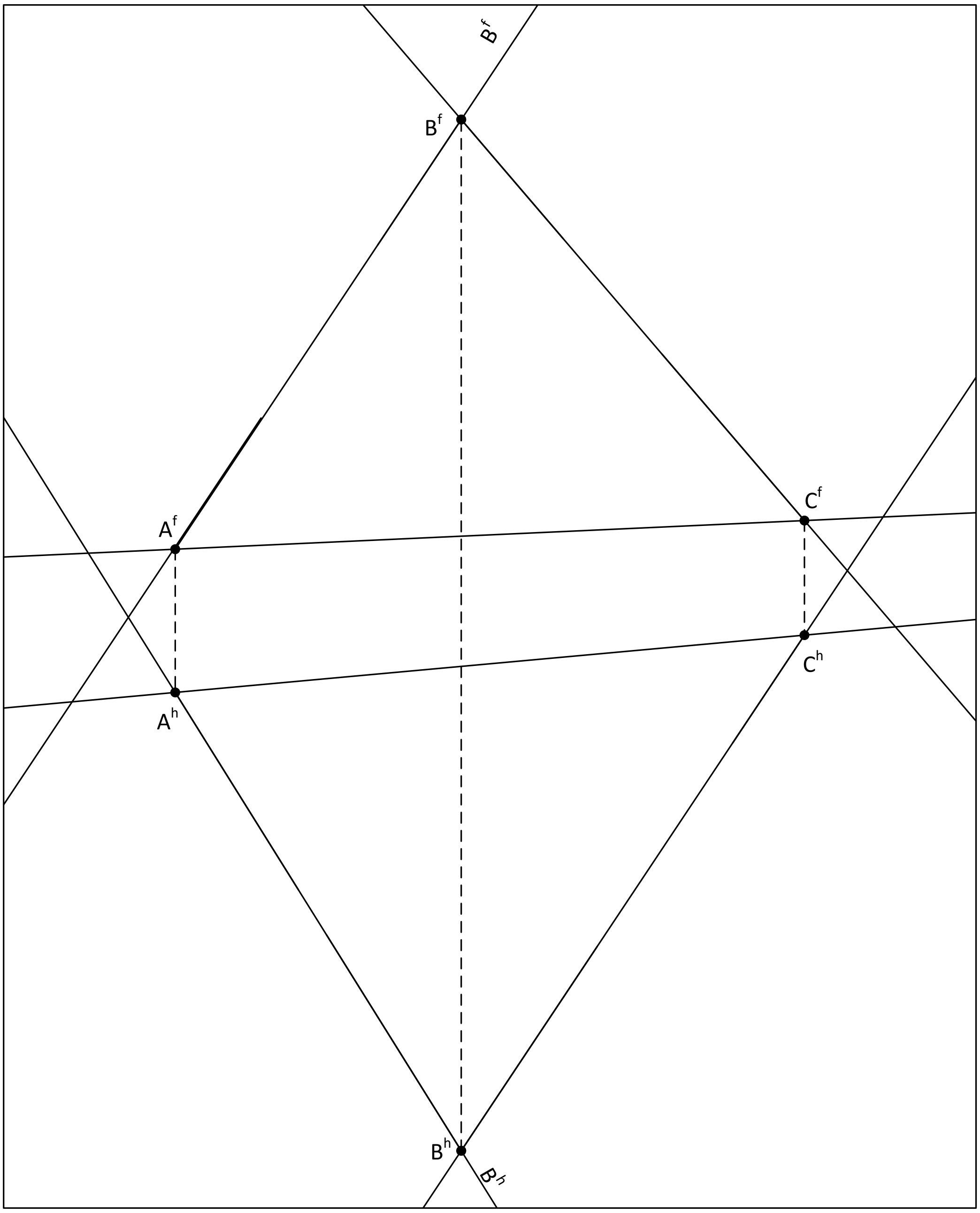
On donne :

Cadre $170\ X\ 210$

Trois points A, B et C. Tels que :

A$\begin{cases} A^f(30{,}115) \\ A^h(30{,}90) \end{cases}$ B$\begin{cases} B^f(80{,}190) \\ B^h(80{,}10) \end{cases}$ C$\begin{cases} C^f(140{,}120) \\ C^h(140{,}100) \end{cases}$

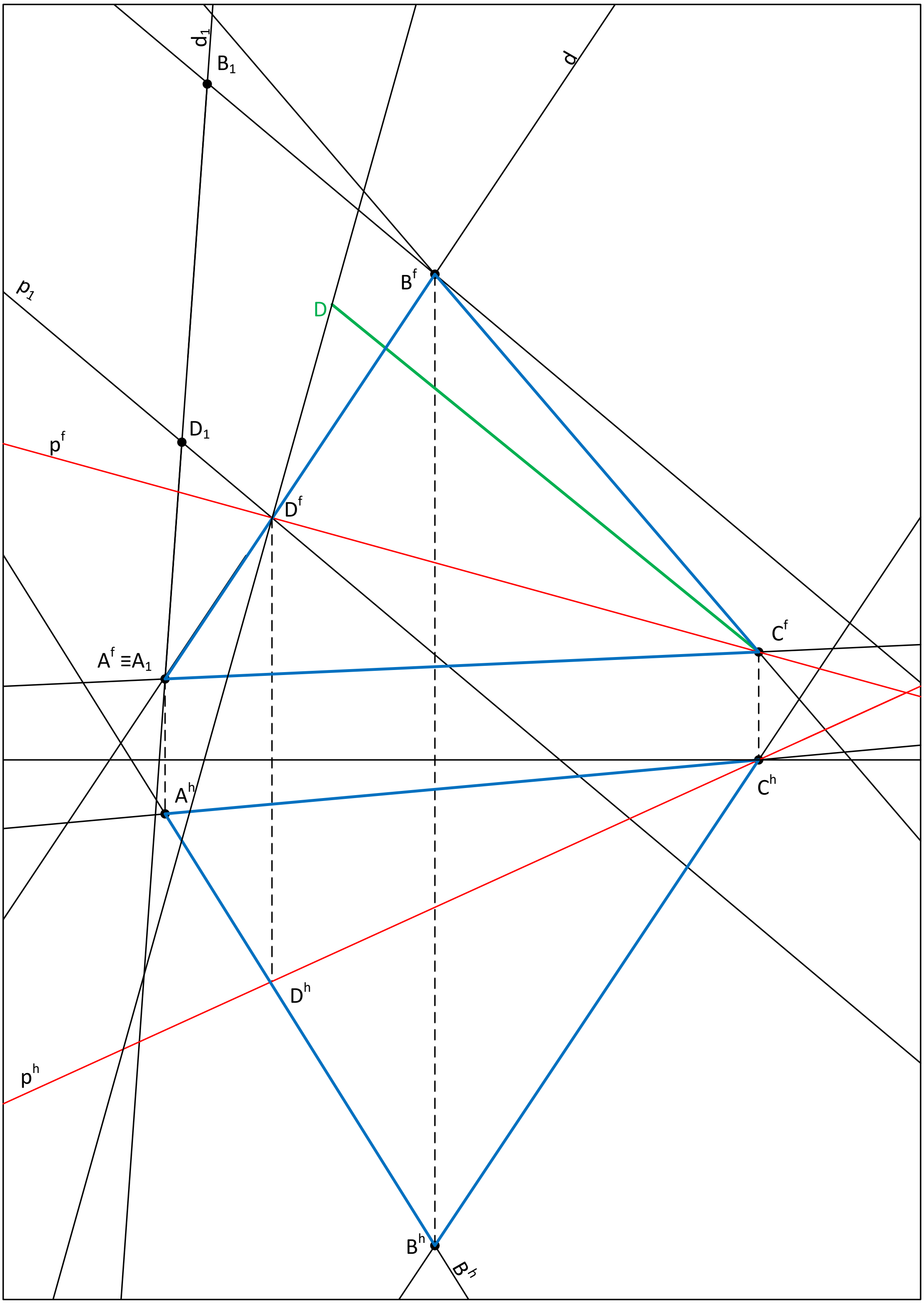
On demande de déterminer la distance du point C à la droite d passant par les points (AB).



Après avoir représenté toutes les données sur l'épure, nous référant à la construction d'un triangle connaissant les longueurs de ses côtés donnée au point précédant de cette illustration, nous pouvons utiliser notre méthode de la manière suivante :

Nous référant au problème donné au point précédent, pour déterminer la distance d'un point C à une droite passant par le point A et B sur l'épure on procède comme suit :

- Dans le plan V ou H on fait coïncider le point $A^f(ou\ A^h)$ avec A_1 et par ce point on trace une droite dans n'importe direction.
- A l'aide du compas, on porte sur cette droite la mesure du côté AB soit le B_1 ;
- On trace une droite passant par B_1 et $B^f(ou\ B^h)$
- Par le point A_1 on porte sur le segment $[A_1B_1]$ la mesure AD, soit le point D_1
- Par le point D_1 on trace une parallèle t à la droite passant par B_1 et $B^f(ou\ B^h)$
- $t^f \cap [A^fB^f]$ ou $t^h \cap [A^hB^h]$= $D^f(D^h)$



4 RESULTAT

- Cet article a comme objectif principal, faire le pont entre la géométrie analytique plane et la géométrie descriptive ; et son objectif spécifique est la résolution des problèmes laborieux de degré terminal de l'enseignement du cours de géométrie descriptive en degré moyen cas de la distance d'un point à une droite.
- Cet article servira aux élèves et à tout chercheur de contourner les notions de rabattement, de relèvement et de changement de plan de projection dans la détermination de la distance d'un point à une droite.

5 CONCLUSION

Nous avons développé une théorie qui pourra aider les apprenants de degré moyen voir même tout chercheur à contourner les notions à apprendre au degré terminal, comme le rabattement et le changement des plans de projection pour déterminer la distance d'un point à une droite par la méthode analytico-graphique. Ceci aidera non seulement les apprenants du secondaire mais aussi tout chercheur qui veut gagner en temps et être bien précis dans ses travaux.

La méthode analytico-graphique présente les avantages suivants :

- Gagner en temps et en calcul.
- Précision dans les calculs
- Contourner les notions difficiles à comprendre afin de résoudre un problème bien déterminé
- Anticiper les notions de degré supérieur, mieux les comprendre et les appliquer au degré inférieur sans savoir que ce sont ces notions qui sont appliquées,
- Faire le pont entre la géométrie analytique et la géométrie descriptive.

Il sied de signifier que le champ d'investigation est encore vierge, et il y a un si grand nombre de thématiques à développer car il n'existe pas jusque-là un document qui fait le pont entre la géométrie analytique et la géométrie descriptive à part celui de Faustin NGOYI NGOYI qui est chef de travaux à l'Institut Supérieur Pédagogique de Mbujimayi en sigle ISP / MJM en République Démocratique du Congo. Parmi ces thématiques nous pouvons citer :

- Détermination de l'orthocentre, du centre de cercle circonscrit, du centre de cercle inscrit, du centre de gravité par la méthode analytico-graphique.
- Construction de toutes les figures géométriques construites en géométrie descriptive par la méthode de MONGE en utilisant la méthode analytico-graphique.

Poursuivre des recherches dans ce domaine avec cette nouvelle méthode sera une découverte nouvelle dans les relations entre les branches mathématiques. A nous d'affirmer, qu'après avoir développé cette théorie, pour ceux nous auront lu, qu'il est possible de déterminer la distance d'un point à une droite sans passer par le rabattement ou par le changement des plans de projection.

REFERENCES

[1] AEBISCHER (B) (2011), Analyse Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique, Vuibert Paris
[2] DESBATS (1995), *Géométrie descriptive*, édition magnard N° 250, Paris
[3] GAUTIER (C) & cie (1973), *ALEPH 1 Algèbre / Géométrie 2ème CT*, Classiques Hachete Paris
[4] KAYEMBE KALALA & Cie (2001), *Maîtriser les maths 2 2ème année secondaire*, Edition Loyola Kinshasa
[5] MAKIADI NZUMBA (J.M) (1992), *Dessin scientifique 4ème Secondaire*, CRP, Kinshasa
[6] MAKILI OL'OMYEN Cie (1972), *Mathématiques géométrie 5ème*, Collection CREM Collection Saint Paul Limete-Kinshasa
[7] MUSELU WA MUSWIYI (1988), *Exercices de géométrie descriptive classe de sixième*, CRP. Collection Boboto
[8] LESSIEUR, CL JOULAIN (1973), *Mathématiques tomes 1, algèbre et géométrie*, Armand Colin Paris.
[9] VERSCHRAEGEN (5) (1972.), *Dessin scientifique 1 projection et constructions géométriques*, Editions JOSEPH VAN IN, & Cie, SA-LIER Bruxelles
[10] https://www.academia.edu/29794981/%C3%89cole_dArchitecture_de_Nancy_G%C3%89OMETRIE_DESCRIPTIVE