International Journal of Innovation and Scientific Research
ISSN 2351-8014 Vol. 23 No. 2 May 2016, pp. 455-465
© 2015 Innovative Space of Scientific Research Journals
http://www.ijisr.issr-journals.org/

SUR UNE APPLICATION « SINGULIÈRE » DU THÉORÈME DE ROUCHÉ-FONTENÉ EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

David MAPENDANO BAHAGAZE

Département de Mathématique-Physique,
Institut Supérieur Pédagogique d'Idjwi (ISP /IDJWI), RD Congo

ABSTRACT: The Rouché-Fontené theorem plays a fundamental role in the study of linear equations. It gives, in fact, the general rule for solving linear systems of the type $n \times p$ (that is to say, systems of linear equations in *n* unknowns *p*, $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$). This rule is based on the determination and calculation of the respective values of critical characteristics or "trimmed" and, of course, on their list, given that, as they are all zero or one of them do not be the result of a linear system which they are extracted radically changes. The demonstration to prove that the set $\mu(p, q, r)$ real matrices $p \times q$ type and rank *r* is a variety diving is based on the same type of reasoning based on the identification and calculation tacking matrices determinants; It can therefore rightly be regarded as a unique illustration and / or application of an aspect of Rouché-Fontené theorem. The aim of this article is precisely to show how Rouché-Fontené theorem (mainly within linear algebra) is a scope in the dives varieties theory (rather under differential geometry).

KEYWORDS: System of linear equations, matrix and determinant, determinant feature, bordered matrices , Compatibility, Rank, Immersion, Variety, Variety dives.

RÉSUMÉ: Le Théorème de Rouché-Fontené joue un rôle fondamental dans l'étude des d'équations linéaires. Il donne, en effet, la règle générale de résolution de systèmes linéaires de type $n \times p$ (c'est-à-dire des systemes de n équations linéaires à p inconnues,$(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$). Cette règle est fondée sur la détermination et le calcul des valeurs respectives de déterminants caractéristiques ou « bordés » et, bien entendu, sur leur énumération, étant donné le fait que, selon qu'ils soient tous nuls ou que l'un d'eux ne le soit pas, le résultat d'un système linéaire dont ils sont extraits change radicalement. La démonstration visant à prouver que l'ensemble $\mu(p, q, r)$ des matrices réelles de type $p \times q$ et de rang r est une variété plongée s'appuie sur ce même type de raisonnement basé sur l'identification et le calcul des déterminants de matrices bordées ; Elle peut donc, à juste titre, être considérée comme une singulière illustration et /ou application d'un aspect du théorème de Rouché-Fontené. L'enjeu du présent article est précisément de montrer comment le Théorème de Rouché-Fontené (relevant principalement de l'algèbre linéaire) trouve un champ d'application dans la théorie de variétés plongées (relevant plutôt de la géométrie différentielle).

MOTS-CLEFS: Système d'équations linéaires, Matrice et Déterminant, Déterminant caractéristique, matrices bordées, Compatibilité, Rang, Immersion, Variétés, Variétés plongées.

1 INTRODUCTION: UN PETIT APERCU HISTORICO-ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LE THÉORÈME DE ROUCHE-FONTENÉ

1.1 LE THÉORÈME DE ROUCHE-FONTENÉ OU LA « RÈGLE GÉNÉRALE » DE RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

En 1880, le mathématicien français Rouché publie un texte intitulé *Notes sur les équations linéaires* (dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*) dont l'ambition est explicitement d'exposer un énoncé bref permettant la résolution de n'importe quel système d'équations linéaires. Il déclare, en effet, ce qui suit :

« *Malgré les travaux assez nombreux qui ont suivi la publication de ma Note dans les Compte rendus des séances de l'Académie des Sciences (29 novembre 1875), l'étude complète du système de n équations linéaires à m inconnues n'a pas encore reçu la forme la plus simple et précise dont elle est susceptible : comme dans la plupart des théories inachevées, le nombre des cas que l'on distingue et la diversité apparente des conclusions relatives à chacun d'eux laissent dans l'esprit une confusion regrettable. Je me propose de développer ici les principes que je m'étais borné, faute d'espace, à indiquer dans les Compte rendus, et de montrer qu'on peut tout réduire à un seul théorème qui, par sa simplicité extrême et son entière généralité, mérite, ce me semble, d'attirer l'attention*. »[1]

A la suite de cette introduction, Rouché définit le « déterminant principal » d'un système quelconque de n équations linéaires à m inconnues, m pouvant être supérieur, égal ou inférieur à n, comme étant un des déterminants non nuls de plus grand ordre p.

« *Dans cette hypothèse, il existera toujours parmi les déterminants déduits du tableau (T), au moins un déterminant qui sera différent de zéro et dont l'ordre soit supérieur ou égal à celui de tout autre déterminant non nul. S'il en existe plusieurs jouissant de cette double propriété, on choisira l'un d'eux à volonté. Nous donnerons au déterminant ϑ ainsi choisi le nom du déterminant principal du système (I), et nous désignerons par p son ordre, qui ne peut évidemment surpasser le plus petit des deux nombres m et n.* » (Rouché (1880), p. 222)

Il définit ensuite les « déterminants caractéristiques » comme étant tous les déterminants obtenus de la manière suivante :

« En bordant le déterminant principal ϑ à la partie inférieure par les éléments homologues de l'une des horizontales du tableau (T) et à droite par les termes tous connus correspondants, on obtient $n-p$ déterminants d'ordre $p+1$ (…) que nous appelons les déterminants caractéristiques du système (I). »

En s'appuyant sur ces deux définitions, Rouché énonce alors son théorème qui, dit-il, « renferme toute la théorie des équations linéaires » :

« *Pour que n équations linéaires à m soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants caractéristiques du système soient tous nuls. Dans cette hypothèse, le système a une solution unique ou est indéterminé suivant que l'ordre de ses déterminants caractéristiques surpasse ou non le nombre des inconnues*. » (Ibidem, p. 223)

Signalons en peu de mots que, pour démontrer ce théorème, E. Rouché a utilisé essentiellement la propriété de linéarité du déterminant, le développement par rapport à une ligne ou une colonne et le fait qu'un déterminant ayant deux lignes ou deux colonnes identiques est nul (Signalons que ces propriétés – et leur utilisation dans cette démonstration – seront illustrées par des exemples concrets dans la section consacrée à la tentative de justification de l'introduction de la notion de déterminant « bordé », « bordant » ou « augmenté »). Suite à la démonstration de ce théorème dans le cadre de la théorie des déterminants, E. Rouché donne le moyen de calculer les solutions dans les deux cas de compatibilité. Dans le cas d'une solution unique, (ou $p=m$), il généralise les formules de Cramer :

« *Si $p=m$, ce qui suppose $n \geq m$ (…) le système a une solution unique qui est donnée par la règle suivante, qui est une généralisation de celle de Cramer : Le dénominateur commun des inconnues est le déterminant principal du système, et chaque numérateur s'obtient en remplaçant, dans ce déterminant principal, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée par les termes tous connus correspondants*. » (Ibidem, p. 227)

Dans le cas « indéterminé » ($p<m$), il précise la nature de l'indétermination de la manière suivante :

« *Si $p<m$, le système est indéterminé. Les inconnues dont les indices sont ceux des verticales qui concourent à la formation du déterminant principal s'expriment en fonction des autres inconnues, qui restent arbitraires, sous la forme de fractions ayant pour dénominateur le déterminant principal : chaque numérateur est le déterminant déduit du déterminant principal en y remplaçant par les expressions* $k_1 - a_{1,\,p+1}x_1 - \cdots - a_{1,\,m}x_m$, … ,

[1] *Eugène Rouché (1880, p. 221), cité par J.-L. Dorier (1999). p. 242.*

$k_p - a_{p,\,p+1}x_1 - \cdots - a_{p,\,m}x_m$ *, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée (…). On dit que l'indétermination est d'ordre* $m - p$. » (ibidem, p. 228)

Il est utile de faire remarquer que le concept de « rang » apparaît de façon implicite comme l'ordre p du déterminant principal, mais ce nombre n'est pas mis en évidence comme nombre maximal d'équations indépendantes ou nombre minimal d'équations permettant de déterminer l'ensemble des solutions du système. En outre, la notion d'invariance de p pour des systèmes ayant même ensemble de solutions n'est pas évoquée. De même, la notion d'ordre d'indétermination du système est donnée indépendamment de celle de dimension de l'espace des solutions.

Nous présentons ci-dessous cette notion de rang telle qu'elle est exposée dans quelques syllabus d'algèbre destinés aux étudiants de première année de Baccalauréat en Mathématiques ou dans les ouvrages d'algèbre linéaire que nous avons pu consulter et nous essayerons de mettre en évidence le rapport (certain) qui existe entre l'acception que nous avons accordée au concept « rang » dans notre discours heuristique et celle que lui accordent les ouvrages consultés. Il en est de même pour le théorème qui résume celui de Rouché-Fontené.

1.2 POURQUOI « THEOREME DE ROUCHE-FONTENE » ET NON SEULEMENT « THEOREME DE ROUCHE » ?

La règle générale permettant de résoudre n'importe quel système d'équations linéaires a été ainsi établie par Rouché. Il importe, toutefois, de faire remarquer que cette même règle fut découverte la même année (en 1875) sur la base des mêmes principes et de manière tout à fait indépendante, par un autre mathématicien français dénommé Fontené.

Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter un coup d'œil sur la note de « *réclamation à propos du théorème dit « de Rouché »* »[2], publiée dans les *Nouvelles annales de mathématiques,* 3ème série, tome 19, (1900), figurant à la page 188, rédigée par le mathématicien M. G. Fontené, dans laquelle ce dernier déclare ce qui suit :

« Il est d'usage de donner le nom de *théorème de Rouché* à la discussion d'un système d'équations du premier degré. Bien qu'on ait mauvaise grâce à parler de soi, je crois pouvoir rappeler que j'avais remis au mois de *septembre* 1875 à Gerono l'article qui a paru au mois de *décembre* de la même année dans les *Nouvelles annales*, et qui donnait cette discussion. Cela résulte d'une note de Gerono insérée dans le numéro de janvier suivant, en réponse à une réclamation, d'ailleurs bienveillante, de M. Rouché. Or la note de M. Rouché à l'Académie est du mois de *novembre* de la même année. On pourrait donc, comme l'a fait M. H. Laurent dans son *Traité d'Algèbre* (1879), dire sans injustice « *le théorème de MM Fontené et Rouché* ». Je crois que cela ne contrarierait pas M. Rouché, dont le bagage scientifique est d'ailleurs considérable. »

C'est pour cette raison que cette règle générale donnant la discussion des systèmes d'équations linéaires porte actuellement le nom de « théorème de Rouché-Fontené ». Dans cette règle, le concept de « rang » apparaît de façon implicite comme l'ordre p du déterminant principal, mais ce nombre n'est pas mis en évidence comme nombre maximal d'équations indépendantes ou nombre minimal d'équations permettant de déterminer l'ensemble des solutions du système. En outre, la notion d'invariance de p pour des systèmes ayant même ensemble de solutions n'est pas évoquée. De même, la notion d'ordre d'indétermination du système est donnée indépendamment de celle de dimension de l'espace des solutions. Le travail de mise en ordre de Rouché-Fontené permet donc au concept de rang d'affleurer sans pour autant pleinement émerger, outillé par le concept de déterminant déjà formalisé et permettant d'attaquer des espaces à n dimensions.

Voici, pour mettre un terme à cette section, une version condensée du *théorème* résultant de ce travail laborieux de mise en ordre et que nous nommerons dans toute la suite « *le théorème de Rouché-Fontené* »[3] :

Soit un système (S) de p équations linéaires à n inconnues, de rang r.

- Si $r = p$, alors le système (S) a des solutions obtenues en attribuant des valeurs arbitraires aux $n - r$ inconnues non principales et en résolvant le système de Cramer aux r inconnues principales. (1)

---

[2] *Article numérisé par NUMDAM (Numérisation de Documents Anciens Mathématiques, en sigle) et mis en ligne sur le site Internet : http : // www.numdam.org/*

[3] *Source : A. Doneddu, (1984). Polynômes et algèbre linéaire, Vuibert, Paris, p. 272.*

- Si *r* est strictement inférieur à *p*, et si l'un des déterminants caractéristiques de (*S*) est différent de zéro, alors le système (*S*) n'a pas de solution. (2)

- Si *r* est strictement inférieur à *p*, et si tous les déterminants caractéristiques de (*S*) sont nuls, alors le système (*S*) se réduit aux *r* équations principales et se résout comme dans le cas (1).

1.3 UNE PRÉSENTATION PLUS « MODERNE » DE CE THÉOREME ET DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES SUR LESQUELS IL S'APPUIE

- *Introduction* : On rappelle qu'un espace vectoriel *E* sur un corps commutatif (ou champ) *K* est un groupe additif $(E, +)$ sur lequel est définie une loi externe $K \times E \to E$, notée multiplicativement, vérifiant les quatre propriétés suivantes : $\forall\, \alpha,\ \beta\ \in K, \forall\, x,\ y\ \in E,\ \alpha\,(x+y) = \alpha x + \alpha y,\ (\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x,\ \alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)x$ et $1\,.\,x = x$. Dans ce qui suit, nous prendrons en compte les espaces de coordonnées $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ qui, comme on le sait, sont des espaces vectoriels de dimensions respectives *p* et *n* sur le champ ℝ des réels. On rappelle que tout ℝ-espace vectoriel *E* de dimension finie *n* est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Les espaces de coordonnées de dimension *n* ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$) peuvent donc être considérés comme de représentants fidèles des ℝ-espaces vectoriels de dimension finie *n*. On considère alors une application linéaire $f : IR^p \to IR^n$, i.e. une application telle que $\forall\, x,\ y\ \in \mathbb{R}^p,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$, et $\forall\ \lambda \in K, \forall\, x\ \in \mathbb{R}^p$, $f(\lambda\, x) = \lambda\ f(x)$, à partir des relations linéaires définies entre les différentes variables. Une telle application admet un **noyau** $Ker\ f = \{x \in IR^p\ /\ f(x) = 0 \in IR^n\}$ et une **image** $\mathrm{Im}\ f = f(IR^p)$ dont vont dépendre et le **rang** du système et l'ensemble des solutions du système linéaire considéré. Par ailleurs, on définit la **matrice** A de f à partir des images des éléments d'une base donnée, en particulier celles de la base dite canonique de l'espace IR^p disposées en colonnes et écrites comme combinaisons linéaires des éléments de la base canonique de l'espace IR^n.

- *Sur le théorème du rang et sur le théorème fixant les conditions de compatibilité d'un système linéaire*

Soient E et F des espaces vectoriels sur le même corps de base noté K. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E vers F (c'est-à-dire une application telle que

$\forall\, x,\ y \in\ E,\quad \forall\, \lambda \in\ K$, on a : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda\, x) = \lambda\ f(x)$.)

On définit alors le noyau de f (noté $Ker\ f$) et l'image de f (notée $\mathrm{Im}\ f$) respectivement comme suit :

$Ker\ f = \{x \in E\ /\ f(x) = 0\}$ et $\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{y \in F\ /\ \exists\ x \in E,\ y = f(x)\}$. $Ker\ f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E et de F.

On rappelle que deux sous-espaces vectoriels U et W d'un même espace vectoriel E sont dits supplémentaires (et dans ce cas, on note $E = U \oplus W$) si $E = U + W\ \ et\ \ U \cap W = \{0\}$, et que si E est de dimension finie n, alors on a en plus : $\dim E = \dim U + \dim W$.

Remarque

Dans toute la suite, nous supposerons que E et F sont de dimensions finies. On appelle *rang* de f (noté $rg\,(f)$) la dimension de $\mathrm{Im}\, f = f(E)$.

Un théorème d'algèbre linéaire, nommé justement « théorème du rang » dans le *Dictionnaire des mathématiques modernes* (Bouvier, 1978), ajoute à cette définition la formule suivante qui permet de calculer le rang d'une application linéaire $f : E \to F$ (où E et F sont de dimensions finies) : $rg\,(f) = \dim_K E - \dim_K Ker\ f$.

Cette propriété peut être établie de la manière suivante :

- *Première étape* : Notons $Ker\ f = E_1$ et considérons un supplémentaire de E_1 dans E noté E_2. On démontre que $f(E_2) = f(E)$.

Soit, en effet, $x \in E = E_1 + E_2$ (avec $E_1 = Ker\ f$). On a donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker\ f = E_1$ et $x_2 \in E_2$. Par suite, $f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_2)$ car $f(x_1) = 0$. Donc $f(E) \subset f(E_2)$. Comme on a trivialement l'inclusion $f(E_2) \subset f(E)$ (du fait que $E_2 \subset E$), alors on conclut que $f(E_2) = f(E)$.

- *Deuxième étape* : Soit $g = {}^{f}\!/_{E_2} : E_2 \to f(E) : x \mapsto g(x) = f(x)$ la restriction de f à E_2 et prenant ses valeurs dans $f(E)$. Montrons que g est bijective (et donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :

Soit $x' \in f(E)$.

Alors $\exists\ x = x_1 + x_2 \in E \quad (x_1 \in E_1, \quad x_2 \in E_2)$ tel que $x' = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_2) = g(x_2)$. Donc l'application g est surjective.

En outre, g est injective car, $\forall\ x_2,\ y_2 \in E_2,\ g(x_2) = g(y_2) \Rightarrow g(x_2 - y_2) = 0$, donc $x_2 - y_2 \in Ker\, f$. Comme $x_2 - y_2 \in E_2$ d'une manière triviale, alors on conclut que $x_2 - y_2 \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$ puisque $E_1 = Ker\, f$ et E_2 sont supplémentaires. Donc $x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2$. D'où g est injective. Il en résulte que l'application g est une bijection de E_2 sur $f(E)$.

Enfin, la linéarité de g découle de celle de f. A l'aide de cet isomorphisme g, le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F est identifiable au sous-espace vectoriel $E_1 = Ker\, f$ de E. On peut donc affirmer qu'à un isomorphisme près, on a $f(E) \approx E_2$ et donc $\dim_K f(E) = \dim_K E_2$.

Et comme $\dim_K E = \dim_K E_1 + \dim_K E_2$ (avec $E_1 = Ker\, f$),

Alors on conclut que $\dim_K E_2 = \dim_K E - \dim_K E_1$.

Donc $\dim_K f(E) = \dim_K E - \dim_K Ker\, f$. Par suite $rg(f) = \dim_K E - \dim_K Ker\, f$.

- *Remarque* : Il est à noter qu'en dépit de l'égalité $rg(f) = \dim_K E - \dim_K Ker\, f$, *où* $rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$, il serait impropre de noter $E = \operatorname{Im} f \oplus Ker\, f$, (même en signalant que l'égalité n'est valide qu'à un isomorphisme près) puisque $\operatorname{Im} f$ et $Ker\, f$ ne sont pas, *a priori*, tous deux des sous-espaces vectoriels de E (pour une application linéaire quelconque $f : E \to F$).

L'égalité $E = \operatorname{Im} f \oplus Ker\, f$ ne se réalise que si l'on suppose que l'application f est un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$ (i.e. que f est un projecteur de E). On vérifie, en effet, que, dans ce cas, on a bien $E = \operatorname{Im} f + Ker\, f$ puisque, $\forall x \in E$, on peut écrire $x = [x - f(x)] + f(x)$ avec $f(x) \in f(E) \subset E$. On vérifie alors que $f[x - f(x)] = f(x) - f^2(x)$. Comme $f^2 = f$ alors on conclut que $f[x - f(x)] = f(x) - f(x) = 0$. Donc $x - f(x) \in Ker\, f$ ce qui justifie l'égalité $E = \operatorname{Im} f + Ker\, f$ (du fait que, trivialement, on a $f(x) \in f(E) = \operatorname{Im} f$).

En outre, si l'on suppose que $x \in \operatorname{Im} f \cap Ker\, f$, alors on conclut que $x \in \operatorname{Im} f$ *et* $x \in Ker\, f$. Donc il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$ et $f(x) = 0$. Il en résulte que $f[f(y)] = f(x) = 0$. Comme $f^2(y) = f(y) = 0$ (du fait que $f^2 = f$) et $x = f(y)$ alors on conclut que $x = 0$. D'où $\operatorname{Im} f \cap Ker\, f = \{0\}$. On en déduit que $E = \operatorname{Im} f \oplus Ker\, f$.

La démonstration précédente montre que pour déterminer le rang d'une application linéaire, on se « débarrasse » de la classe des vecteurs de E qui correspondent au vecteur nul de F par f, ce qui se traduit par l'égalité $rg(f) = \dim_K E - \dim_K Ker\, f$, et on ne prend en compte que les autres vecteurs « restants » de E. La dimension du sous-espace vectoriel de E que ces derniers engendrent est alors le rang de f. Cette technique présente des similitudes avec la technique que nous avons utilisée pour introduire le rang d'un système d'équations linéaires en nous « débarrassant » tout d'abord des équations assimilables à des équations à coefficients d'inconnues tous nuls (à l'issue des transformations résultant de la méthode d'élimination de Gauss) et en ne prenant en considération que les autres équations que nous avons qualifiées d'équations indépendantes à coefficients d'inconnues non tous nuls. Il est certain que les « transformations » ainsi opérées sur les équations linéaires correspondent à des transformations sur les vecteurs colonnes formés par les coefficients des inconnues du système linéaire qui, en définitive, permettent de déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs colonnes. D'où l'analogie entre les deux manières de concevoir le concept de « rang » (i.e. celle adoptée dans notre discours heuristique et celle faisant partie du savoir savant relatif à ce concept et présentée dans les ouvrages spécialisés d'algèbre linéaire ou syllabus de cours du niveau universitaire consacrés à cette matière d'enseignement).

Le « théorème du rang » établi précédemment sert d'algorithme de calcul (en dimension finie) à un théorème plus général, proposant la condition de compatibilité d'un système d'équations linéaires. En consultant deux syllabus de cours du niveau universitaire, nous avons pu nous rendre compte que ce théorème – qui s'apparente à celui de ROUCHE-FONTENE et qui, comme ce dernier, donne la condition de compatibilité d'un système linéaire en s'appuyant sur la notion de rang – s'énonce respectivement comme suit :

- Premièrement, dans un premier cours d'algèbre[4] de niveau universitaire que nous avons consulté : après avoir introduit la notation matricielle $Ax = b$ représentant un système linéaire de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Et défini le rang du système $Ax = b$ comme étant le rang de la matrice A, on trouve dans le cours susmentionné le théorème suivant :

Théorème 1. : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le système (S) : $Ax = b$ est compatible ;

(ii) Toute solution $y \in IK^n$ de $yA = 0$ est telle que $yb = 0$;

(iii) Le rang de A est égal au rang de la matrice augmentée $(A|b)$.

Ce théorème d'équivalence a été démontré (à l'aide de trois implications $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$ dont se déduisent immédiatement les autres, en vertu des propriétés de l'implication logique) de la manière suivante :

- $(i) \Rightarrow (ii)$: En effet, si x est solution de (S) et si $yA = 0$ alors, en multipliant à droite par x, il vient : $yAx = yb = 0$.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: La condition (ii) signifie que toute relation linéaire ayant lieu entre les lignes de A a aussi lieu entre les lignes de la matrice augmentée $(A|b)$. Ainsi le nombre de lignes linéairement indépendantes dans A est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes dans $(A|b)$. Ceci signifie que $rg\,A = rg\,(A|b)$.

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Soit r le rang de A. La matrice A possède donc r colonnes linéairement indépendantes $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}$. Les vecteurs $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}$ et b sont linéairement dépendants car, par hypothèse, $rg\,(A|b) = r$. En d'autres termes, b est combinaison linéaire de $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_r}$ et donc de $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ainsi il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} x_j C_j = b$ et le système (S) possède une solution. *CQFD.*

- Ce même théorème apparaît dans un autre cours[5] d'algèbre sous la forme abrégée suivante (où on remarquera une notation différente pour la matrice augmentée du système) :

Théorème 1' : Le système non-homogène $Ax = b$ admet au moins une solution si, et seulement si, la matrice augmentée $[A\ b]$ a le même rang que la matrice A.

---

[4] *RIGO Michel,* ***Algèbre linéaire****, Bac 1 en Sciences physiques (et mathématiques), Université de Liège, année académique 2006-2007, pp. 84-85.*

[5] *SARTENAER Annick,* ***Algèbre (Deuxième partie)****, Bac 1 en Science informatique, FUNDP/Namur, 2006-2007, pp. 30-31.*

Et voici la preuve (fondée sur des principes analogues que ceux utilisés pour la démonstration précédente) qu'elle propose pour ce théorème :

- $\Longrightarrow$: La condition est nécessaire. En effet, si le système $Ax = b$ admet au moins une solution, cela signifie que le vecteur b peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A (c'est-à-dire $b \in \operatorname{Im} A = \{ Ax \in IR^m \ / \ x \in IR^n \}$). Le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes dans la matrice augmentée $[A\ b]$ est donc identique au nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes dans A, et donc les matrices $[A\ b]$ et A ont même rang.

- $\Longleftarrow$: La condition est suffisante. Supposons, en effet, par l'absurde que le système non-homogène $Ax = b$ n'admet pas de solution. Dans ce cas, le vecteur b ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A, ce qui implique que le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes dans la matrice augmentée $[A\ b]$ vaut $rg\,(A|\,b) = rg\,A + 1.$ Ce qui contredit l'hypothèse que $rg\,(A|\,b) = rg\,A.$ Le système non-homogène $Ax = b$ admet donc au moins une solution. *CQFD*.

2 Application « Élementaire » Du Theoreme De Rouche-Fontene Dans La Theorie Des Varietes Plongees (En Geometrie Differentielle)

2.1 Notions De Base Sur Les Concepts Geometriques Évoques

Rappelons, de prime abord, que d'après le *Dictionnaire des mathématiques*[6], le concept « *variété* » consiste en une généralisation dans plusieurs domaines de la notion de courbes, surfaces ou volumes. L'idée est d'introduire, dans les principaux cas étudiés, une représentation locale des objets, soumise à des conditions satisfaisantes de « recollement ». Le dictionnaire précité ajoute que, lorsqu'il est employé seul, le terme *variété* désigne les variétés différentielles.

- Une *variété différentielle* de classe C^k $(k > 0)$ et de dimension *m* est un espace topologique séparé *V* muni d'un $C^k -$ atlas *A*, c'est-à-dire une famille de cartes locales $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $(\alpha \in I \subset \mathbb{N})$, où $\forall\, \alpha \in I$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha\left(U_\alpha\right) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ est un homéomorphisme, de classe C^k, d'un ouvert U_α de *V* dans un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = V$

2. $\forall\, \alpha,\ \beta \in I,$ avec $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, les changements de cartes locales $\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}$ et $\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ sont des homéomorphismes de classe C^k.

3. La famille *A* est maximale (au sens de l'inclusion).

- Une *immersion* [7] : Soit $\sum$ une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$, de classe C^k $(k > 0)$, de représentation paramétrique $f : U \to \mathbb{R}^3$. Une application continue μ de $\sum$ dans $\mathbb{R}^3$ est une *immersion* de $\sum$ dans $\mathbb{R}^3$ si la composée $\mu \circ f : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable et si, pour tout point $(u_0,\ v_0) \in U$, il existe un voisinage ouvert U_0 (dans $\mathbb{R}^2$) de $(u_0,\ v_0)$, un voisinage ouvert V_0 (dans $\mathbb{R}^3$) de $(\mu \circ f)\,(u_0,\ v_0)$, un intervalle ouvert $I =]-\alpha,\ \alpha[$ de $\mathbb{R}$ et un difféomorphisme φ de $U_0 \times I$ sur V_0 tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$U_0 \xrightarrow{\mu \circ f} V_0$

$i \downarrow \qquad \uparrow Id_{V_0}$

$U_0 \times I \to V_0$ où $i : u \to i(u) = (u,\ 0)$.

---

[6] *BOUVIER Alain, GEORGE Michel, LE LIONNAIS François, (réédition de 2009). Dictionnaire des mathématiques, P.U.F., Paris. (p. 948)*
[7] *BOUVIER A. et Coll., Op. Cit., p. 464.*

- Un *plongement* [8] d'une variété *E* dans une variété *F* signifie que l'on identifie *E* à son image dans *F* par un homomorphisme canonique de *E* dans *F*. (Par exemple : le plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$, ou encore, en géométrie différentielle, le plongement de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ $(p, q \in \mathbb{N} - \{0\})$.

- *Plongement* d'une surface dans $\mathbb{R}^3$: étant donné une surface paramétrée $(\sum\ ,\ f)$ de $\mathbb{R}^3$, on appelle *plongement* de $\sum$ dans $\mathbb{R}^3$ une immersion μ de $\sum$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que μ soit un homéomorphisme de $\sum$ dans $\mu\ (\sum)$, les topologies de $\sum$ et $\mu\ (\sum)$ étant celles induites par la topologie de $\mathbb{R}^3$. On définit plus généralement le plongement d'une variété différentielle dans une autre. Intuitivement, si l'on déforme sans *pliure* ni *déchirure* une sphère $\sum$ de façon que deux points distincts de $\sum$ ne viennent jamais en coïncidence, la surface $\sum'$ obtenue est l'image de $\sum$ par divers plongements.

- *Variétés plongées* : La définition de la structure de *variété plongée* dépend du théorème suivant, que nous admettons sans démonstration :

Soit *V* une partie de $\mathbb{R}^m$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- Pour tout point *a* de *V*, il existe un ouvert ω de V contenant *a* et admettant un paramétrage $\varphi\ :\ U \subset \mathbb{R}^m \to \omega$. (a)
- Pour tout point *a* de *V*, il existe un ouvert ω de V contenant *a* et admettant une équation cartésienne[9] $F\ :\ \Omega \to \mathbb{R}^{m-p}$. (b)

Une partie *V* de $\mathbb{R}^m$ qui vérifie les propriétés (a) et (b) de ce théorème est une *variété plongée* dans $\mathbb{R}^m$.

2.2 LE THEOREME DE ROUCHE-FONTENE ET LES VARIETES PLONGEES

« Une matrice $A \in R_q^p$, l'espace des matrices (réelles) ayant p lignes et q colonnes, est de rang r si elle possède une sous-matrice carrée de dimension r dont le déterminant n'est pas nul et si les déterminants de ses sous-matrices carrées de taille $r+1$ sont nuls. Ceux-ci sont généralement assez nombreux et le théorème de Rouché-Fontené en détermine $(p-r)(q-r)$ dont l'annulation suffit à garantir celle des autres. Pour chaque ensembles d'indices $I,\ J$ nous noterons $A_{I\,J}$ la sous-matrice de la matrice A obtenue en ôtant de celle-ci les lignes dont le numéro ne figure pas dans I et les colonnes dont le numéro ne se trouve pas dans J. De plus, pour simplifier, nous poserons $I_i = I \cup \{i\}$. Avec ces conventions, le théorème s'énonce comme ceci. *Une matrice* $A \in R_q^p$ *est de rang* r *si et seulement si elle admet une sous-matrice carrée* $A_{I\,J}$ *de taille* r *dont le déterminant est non nul et si les déterminants des matrices* $A_{I_i\,J_j},\ i \notin I,\ j \notin J$, *sont nuls*. On appelle ces déterminants les *déterminants bordés* ou *bordants*. La figure ci-dessous montre de façon schématique une matrice A dans laquelle on a sélectionné une sous-matrice $A_{I\,J}$ que l'on a "bordée" avec des éléments des ligne et colonne $i,\ j$. Elle est représentée par le carré rosé.

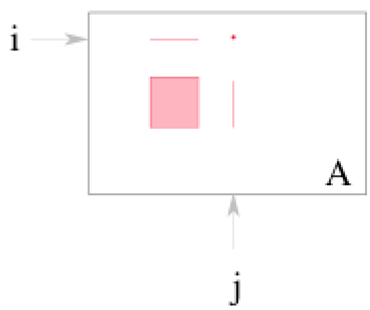

Figure 1. Illustration d'une matrice « bordée »

[8] *BOUVIER A. et Coll., Ibidem, p. 702.*
[9] *La notion d'« équation cartésienne » d'une partie V de $\mathbb{R}^m$ sera brièvement rappelée dans la suite.*

Le théorème de Rouché-Fontené est utilisé pour étudier la compatibilité des systèmes d'équations du premier degré, ce que l'on comprend aisément puisque la condition de compatibilité du système $Ax + b = 0$ est l'égalité des rangs des matrices A et $(A|b)$. Nous allons en présenter un autre usage qui nous a fort surpris lorsque nous l'avons découvert en cherchant des exemples de variétés plongées pour illustrer un cours de géométrie. Il s'avère que l'ensemble $\mu\ (p,\ q,\ r)$ des matrices $A \in R_q^p$ de rang r est une variété de classe C^∞ plongée dans R_q^p et que le théorème de Rouché-Fontené en donne des équations cartésiennes au voisinage de chaque point. Pour rappel, des fonctions $f_i\ :\ \Omega \to R,\ i = 1, 2, ..., q$ de classe C^∞ dans un ouvert $\Omega \subset IR^N$ sont des *équations cartésiennes* d'une partie V de IR^N dans Ω, si $V \cap \Omega = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; f_1(x) = 0, ..., f_q(x) = 0\right\}$ et si les gradients des f_i sont linéairement indépendants en chaque point de cette intersection) ont r éléments et, en vertu du théorème de Rouché-Fontené, $\mu\ (p, q, r) \cap \Omega_{IJ} = \bigcap_{i \notin I,\ j \notin J} \left\{A \in \Omega_{IJ} \middle| \det A_{I_i J_j} = 0\right\}$

De plus, *les gradients des fonctions* $A \in \Omega_{IJ} \mapsto \det A_{I_i J_j} \in IR,\ i \notin I,\ j \notin J,$ *sont linéairement indépendants en chaque point de cette intersection.* C'est cette propriété que nous nous proposons d'établir dans le présent article. Signalons, en passant, que les fonctions en question constituent donc des équations cartésiennes pour $\mu\ (p,\ q,\ r)$, ce que nous allons également établir et illustrer dans les lignes qui suivent. Voici les éléments (assortis d'exemples illustratifs judicieusement choisis) qui, selon nous, apportent un modeste éclairage[10] au commentaire précédent :

a) Soit $\mu\ (p,\ q,\ r)$ l'ensemble des matrices à coefficients réels à p lignes, q colonnes et de rang r. Pour établir que $\mu\ (p,\ q,\ r)$ est une variété plongée dans l'espace des matrices (réelles) ayant p lignes et q colonnes, noté R_q^p, on a le choix entre deux possibilités (logiquement équivalentes) : soit en termes de paramétrages, soit en termes d'équations cartésiennes. On se propose de prouver que $\mu\ (p,\ q,\ r)$ est bien une variété plongée dans R_q^p, et pour pouvoir utiliser le théorème de Rouché-Fontené, on choisit comme approche celle qui s'appuie sur les équations cartésiennes.

b) Soit $A \in \mu\ (p,\ q,\ r)$. Pour un choix $\alpha = I \times J\ (où\ \ I \in \{1, 2, ..., p\},\quad J \in \{1, 2, ..., q\}$ de r indices de lignes et de r indices de colonnes, A_α désigne le mineur algébrique de la matrice A obtenu en ne retenant dans cette matrice que les éléments dont les indices de lignes et de colonnes figurent dans I et J respectivement.

[En guise d'exemple illustratif, considérons l'ensemble $\mu\ (3,\ 3,\ 2)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mu\ (3, 3, 2).$

- Pour $\alpha = \{1,\ 2\} \times \{1,\ 2\},\quad A_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$

- Pour $\beta = \{2,\ 3\} \times \{1,\ 3\},\quad A_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}.$]

c) $\mu_\alpha\ (p,\ q)$ désigne l'ensemble des matrices M pour lesquelles $M_\alpha \neq 0.$ C'est un ouvert de R_q^p (puisque c'est le complémentaire d'un fermé).

[10] *Cet « éclairage » provient essentiellement du syllabus de cours du professeur Pierre Lecomte (du département de mathématiques de l'Université de Liège (ULg, en sigle), intitulé : « Variétés plongées dans R^m » destiné aux étudiants de Bac 2, (2007, pp. 21 – 24).*

d) On rappelle que le théorème de Rouché-Fontené fonde la compatibilité de systèmes linéaires sur l'annulation ou non de tels déterminants bordés le nombre de « déterminants bordés » qui, pour un mineur donné de rang r, sont au nombre de $(p-r)\,(q-r)=(r-p)\,(r-q)=pq-r\,(p+q-r)$, car un tel déterminant s'obtient en ajoutant à α un indice de ligne i et un indice de colonne j ; Ce qui fournit un nouvel ensemble d'indices noté $\alpha(i,\ j)$. Le déterminant bordé correspondant est le mineur associé aux indices de lignes et de colonnes figurant dans cet ensemble. Nous le noterons $A_{\alpha(i,\ j)}$.

[En guise d'illustration, considérons dans l'ensemble $\mu\ (3,\ 4,\ 2)$ la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 7 & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\alpha=\{1,\ 2\}\times\{1,\ 2\}$, on a $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 7\end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}$ comme déterminants bordés obtenus à partir du mineur $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\ \neq\ 0.$]

e) Enfin, nous nous limiterons à signaler qu'à ce stade, il reste à prouver que les équations $f_{\alpha,i,\ j}=0$, $i\notin I,\ \ j\notin J$, où $f_{\alpha,i,\ j}: A\in\mu(p,\ q,\ r)\mapsto A_{\alpha,i,\ j}\in IR$, constituent bien des équations cartésiennes de $A\in\mu(p,\ q,\ r)$ pour conclure que $A\in\mu(p,\ q,\ r)$ est une variété plongée dans R_q^p. Les étapes d'une telle démonstration sont les suivantes :

Première étape : décomposer $f_{\alpha,\ i,\ j}$ en $dét$ o $\pi_{\alpha,\ i,\ j}$ où $\pi_{\alpha,\ i,\ j}$ est la projection de l'espace des matrices à p lignes et q colonnes sur $GL(r+1,\ IR)$ consistant à prélever d'une matrice celle dont le mineur $A_{\alpha(i,\ j)}$ est le déterminant, et où $dét\ :\ GL(r+1,\ IR)\ \rightarrow\ IR$ est le passage au déterminant.

[*Illustration* : Dans l'ensemble $\mu(3,\ 4,\ 2),\ \ \alpha=\{1,\ 2\}\times\{1,\ 2\},\ \ \pi_{\alpha,3,3}$ est $A=\begin{pmatrix}u & v & w\\ x & y & z\\ au+bx & av+by & aw+bz\end{pmatrix}$ pour

$$A=\begin{pmatrix}u & v & w & t\\ x & y & z & s\\ au+bx & av+by & aw+bz & at+bs\end{pmatrix}$$ avec $\begin{vmatrix}u & v\\ x & y\end{vmatrix}\neq 0$ (par exemple).]

Deuxième étape : Calculer les différentielles :

$$\left(f_{\alpha,\ i,\ j}\right)_{\circ A}H\ =\ \left(dét\ \text{o}\ \pi_{\alpha,\ i,\ j}\right)_{*A}H\ =\left(dét\right)_{*\pi_{\alpha,\ i,\ j}(A)}\ (\pi_{\alpha,\ i,\ j})_{*A}H$$

(on rappelle que $(f\ \text{o}\ g)_{*a}=f_{*g(a)}\ \text{o}\ g_{*a}$).

Par suite, on a :

$$\left(f_{\alpha,i,j)}\right)_{*A}H=\left(dét\right)_{*\pi_{\alpha,\ i,\ j}(A)}(\pi_{\alpha,\ i,\ j})_{*A}H$$

$$=\ \left(dét\right)_{*\pi_{\alpha,\ i,\ j}(A)}\ \pi_{\alpha,\ i,\ j}\ (H)\ \ \text{(car } \pi_{\alpha,\ i,\ j} \text{ étant linéaire, elle coïncide avec sa différentielle)}$$

$$=\ \left(grad_{\ *\pi_{\alpha,\ i,\ j}(A)}\ dét\right)\cdot\ \pi_{\alpha,\ i,\ j}\ (H)\ \ \text{(où la multiplication est le produit scalaire)}$$

(on rappelle également que $grad_A (dét) = \Gamma$ qui est la matrice des cofacteurs de A. Le gradient de $f : IR^m \to IR$ est l'unique élément $u \in IR^m$ tel que $\forall h \in IR^m,\ f_{*a}\ h = u \cdot h$)

Troisième étape : Prendre H tel que tous les éléments sont nuls, sauf celui situé sur $i(i, j)$ qui vaut 1.

Ainsi, pour $(k, l) \neq (i, j),\ \pi_{\alpha,k,l}\ H = 0$ et donc $\left(f_{\alpha,k,l}\right)_{*A} H = 0$

Et $\left(f_{\alpha,i,j}\right)_{*A} H = \left(grad_{*\pi_{\alpha,i,j}(A)}\ dét\right) \cdot \pi_{\alpha,i,j}(H) = \pm A_{\alpha(i,j)} \neq 0,$ où $grad_{*\pi_{\alpha,i,j}(A)}\ dét$ est la matrice des cofacteurs de $\pi_{\alpha,i,j}(A).$

3 CONCLUSION

Qu'on ne s'y méprenne donc pas. Le théorème de Rouché-Fontené intervient dans le problème décrit ci-dessus uniquement à des fins d'énumération (de comptage) du fait qu'il aide à déterminer le nombre de déterminants bordés intervenant dans la définition des équations cartésiennes servant de support à la démonstration de la nature de variété plongée de $\mu(p, q, r)$ mais il ne donne aucune indication sur la nature de ces équations cartésiennes, question fondamentale dans ce problème qui, par sa complexité, dépasse (on le devine) très largement le modeste champ d'application de ce théorème. Aussi avons-nous qualifié de modeste l'application du théorème de Rouché-Fontené que nous avons présentée ci-dessus, même s'il faut reconnaitre que cette application est, comme chacun a pu s'en rendre compte dans les développements précédents, d'une portée non négligeable dans la détermination des équations cartésiennes d'une variété plongée.

REFERENCES

[1] BOUVIER Alain, GEORGE Michel, sous la direction de François Le LIONNAIS (1979). *Dictionnaire des mathématiques*, Presses Universitaires de France (P.U.F.), Paris.

[2] DORIER J.-L. et Col., (1999). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* La Pensée sauvage Editions, Grenoble, France, p. 242.

[3] LECOMTE Pierre*, Géométrie élémentaire, ULg,* Centrale des cours de l'AEES, 42.013, année académique 2001-2002.

[4] LECOMTE Pierre*, Variétés plongées dans* R^m*, Bac. 2 en Sciences Mathématiques*, ULg, année académique 2006-2007 pp. 21 – 24.

[5] QUEYSANNE Michel, (1968). *Algèbre MP et Spéciales AA'*, Armand Colin, Paris.

[6] RIGO Michel, *Algèbre linéaire, Bac 1 en Sciences physiques (et mathématiques)*, Université de Liège, année académique 2006-2007, pp. 84-85.

[7] SARTENAER Annick, « *Algèbre (Deuxième partie)* », Bac 1 en Science informatique, FUNDP/Namur, année académique 2006-2007, pp. 30-31.

[8] WITTMANN Erich Ch., (1998). *Géométrie élémentaire et réalité : Introduction à la pensée géométrique*, Didier Hatier, Bruxelles.